Weak equivalence and homotopy equivalence

秋桜

代数的位相幾何学では，位相空間を直接調べることが困難であるため，しばしばホモロジー群やコホモロジー群などの不変量を考える．その不変量はホモトピー不変性をもつことが多い．しかし，一般に，より弱い「弱ホモトピー不変性」はもたないことが多い．つまり，ホモトピー群の間の同型を導くときに不変量の間に同型を導くとは限らない．これは単体的集合やアーベル圏上の cochain 複体でも同じ様なことが考えられる．

位相空間の場合は Whitehead の定理があるので，CW 複体であればホモロジー群やコホモロジー群は弱ホモトピー不変性をもつ．では，単体的集合やアーベル圏上の cochain 複体の場合はどうだろうか？ また，モデル圏での共通的な一般化はできないだろうか？ という自然な疑問が湧く．ここで，モデル圏とは 1967 年に Daniel Gray Quillen によって [Qui67] で導入された weak equivalence, cofibration, fibration という 3 つの射のクラスをもつ良い圏であり, 現在では代数的位相幾何学だけでなく様々な分野で用いられている．

本講演では，位相空間と単体的集合とアーベル圏上の cochain 複体における weak equivalence と homotopy equivalence との関係を考察し，モデル圏での視点で一般化する．

基本的な位相空間論，単体的集合論，代数学，圏論の知識を仮定するが, できるだけ気持ちを述べることで広い層に楽しんで頂けるようにするつもりである．代数的位相幾何学の知識があるとより楽しめる．

参考文献

[Hov13] Mark Hovey. Quillen model categories. In: J. K-Theory 11.3 (2013), pp. 469–478.

[Hov99] Mark Hovey. Model categories. Vol. 63. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999.

[Qui67] Daniel G. Quillen. Homotopical algebra. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Berlin: Springer-Verlag, 1967.