

同型でないものを同じとみなす

～モデル圏の話～

alg-d <https://www.youtube.com/@alg-dx>

数学ではよく、〈同型〉なものを同一視するということをします。例えば位相空間論では位相空間の同型 (同相) というものを考えて、同相な位相空間は同じものだと考えます。これを一般化したのが圏における〈同型〉で、例えば位相空間の圏 **Top** を考えれば、**Top** における〈同型〉が「位相空間の同相」と一致します。

ところが数学では、このような〈同型〉とは異なる同一視を行いたい場面があります。例えば位相幾何学では、位相空間に対して「ホモトピー同値」というものを考えます。これは「同相 \implies ホモトピー同値」という関係にあり、例えば位相空間 X, Y で「 X と Y はホモトピー同値だが同相ではない」というようなものが存在したりします。すると、ホモトピー同値な位相空間を同一視する立場の人にとっては、**Top** という圏は実態と少しずれているわけです。

そこで登場するのが〈モデル圏〉というもので、これは圏に追加の構造が付与されたものです。例えば **Top** はモデル圏にすることができます。このモデル圏 **Top** を使うことで、圏論的に「ホモトピー同値な位相空間を同一視する」というようなことが可能になります。

この講演では、まずモデル圏の基本的なことを説明して、どのようにして「ホモトピー同値な位相空間を同一視する」のかを理解します。そして最終的にモデル圏の応用例として、 ∞ 圏の定義である「topological category」と「simplicial category」が本質的に同じものであるという事実を理解することを目標とします。(∞ 圏については [1] を見ておいてください。あと [2] も見といてください。) 必要な圏論はある程度復習しながら話しますが、基本的には常識的な圏論の知識は仮定します ([3] を見ましょう)。

参考文献

- [1] alg-d, 第 11 回関西すうがく徒のつどい「高次元圏入門」, Youtube 配信アーカイブ, <https://www.youtube.com/watch?v=SZvWqu8xfbY>
- [2] alg-d, 第 12 回関西すうがく徒のつどい「#豊穰圏は射が取れないからクソ」, Youtube 配信アーカイブ, <https://www.youtube.com/watch?v=h06EtxSbc18>
- [3] alg-d, 圏論 (初心者向け), Youtube 動画リスト, <https://www.youtube.com/playlist?list=PLeBc8K3RvbSyoSx4NURPQPBSopMJAr7Tm>
- [4] alg-d, モデル圏, https://alg-d.com/math/kan_extension/
- [5] W. G. Dwyer and J. Spalinski, Homotopy theories and model categories, HANDBOOK OF ALGEBRAIC TOPOLOGY (1995)
- [6] M. Hovey, Model Categories, volume 63 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society (1999)