ファジィ理論入門

yuchains

2026 年 3 月 21 日

ファジィ理論

- ファジィとは
  - あいまいな
  - ぼやけた
  - はっきりしない
- ファジィ理論とは
  - あいまいさを数学的に扱うための枠組み
  - 人間の扱うあいまいさや主観的評価を表現するために用いられる
- ファジイ理論の要素
  - ファジィ論理
  - ファジィ集合
  - ファジィ測度

ファジィ論理

- 古典論理 (クリスプ論理)：真偽が明確な命題を扱う
  - 今日は猛暑日だ。
- ファジィ論理：真偽があいまいな命題を扱えるように拡張
  - 今日は暑い日だ。
- 古典論理の真理値は $\{0, 1\}$ であったが、ファジイ論理では $[0, 1]$ を真理値とするように拡張する。

ファジィ論理の (論理) 演算

Definition (（ゲーデルの）ファジイ論理の (論理) 演算)

ゲーデルのファジイ論理において、連言 ($\wedge$)、選言 ($\vee$)、否定 ($\sim$) は以下のように定義する。

- $p \wedge q := \min\{p, q\}$
- $p \vee q := \max\{p, q\}$
- $\sim p := 1 - p$

- 連言 ($\wedge$)、選言 ($\vee$)、否定 ($\sim$) は、上記以外のものが用いられることもある。

ファジィ論理の性質 (1)

Definition ((ゲーデル) ファジィ論理の性質)

(ゲーデル) ファジイ論理では、古典論理と同様以下の性質が成り立つ。

- $p \wedge q = q \wedge p, p \vee q = q \vee p$
- $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r, p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$
- $p \wedge (p \vee r) = p, p \vee (p \wedge q) = p$
- $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r), p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $\sim (\sim p) = p$
- $p \wedge 0 = 0, p \vee 0 = p$
- $p \wedge 1 = p, p \vee 1 = 1$
- $\sim (p \wedge q) =\sim p \vee \sim q, \sim (p \vee q) =\sim p \wedge \sim q$
- $(p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim q) = q \wedge \sim q, (p \vee \sim p) \vee (q \wedge \sim q) = p \vee \sim p$

ただし、以下の性質は一般には成り立たない。

- $p \wedge \sim p = 0, p \vee \sim p = 1$

ファジィ論理の性質 (2)

- (ゲーデル) ファジイ論理では、一般に相補律が成り立たない。
  - 矛盾律：$p \wedge \sim p = 0$
  - 排中律：$p \vee \sim p = 1$
- ただし、相補律を弱めたクリーネ律が成立する。
  - $(p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim q) = q \wedge \sim q$
  - $(p \vee \sim p) \vee (q \wedge \sim q) = p \vee \sim p$

その他の論理演算

- 用途によっては、(ゲーデル) ファジィ論理以外の論理演算が用いられることがある。

	積	和
論理積/和	$\min\{p, q\}$	$\max\{p, q\}$
代数 (確率) 積/和	$p \times q$	$p + q - p \times q$
限界積/和	$\max\{0, p + q - 1\}$	$\min\{1, p + q\}$
激烈積/和	$\begin{cases} p & q = 1 \\ q & p = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$	$\begin{cases} p & q = 0 \\ q & p = 0 \\ 1 & otherwise \end{cases}$

- 積/和は片方が決まれば、ド・モルガンによりもう片方を定義することができる。
- 上記のような各種の積・和を一般化した概念として、t ノルム・t コノルムがある。

ファジィ含意

- ファジィ論理において、含意 ($\to$) の定義についても複数の方法がある。

	含意（$p \to q$）
ゲーデルの含意	$\begin{cases} 1 & p \leq q \\ q & p > q \end{cases}$
クリーネの含意	$\max\{1-p, q\}$
ルカシェヴィッツの含意	$\min\{1, 1-p+q\}$
ザデーの含意	$\max\{1-p, \min\{p, q\}\}$

集合

- 通常数学で扱うことができる概念（集合）
  - 20 以上 30 以下の整数：$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 20, x \leq 30\}$
  - 猛暑日：$\{T \in \mathbb{R} \mid T \geq 35\}$
- 人間は、よりあいまいな概念を扱うことがある
  - だいたい 20 以上 30 以下の整数
  - 暑い日
- あいまいなもの（集合）を数学的に扱えるようにしたものがファジィ集合である。

クリスプ集合/特性関数

Definition (特性関数)

全体集合 X のある部分集合 A に対して、関数 $\chi_A :\to \{0,1\}$

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

を（クリスプ）集合 A の特性関数という。

- 全体集合 X の部分集合 A と、特性関数 χ_A を同一視できる。
- （クリスプ）集合の特性関数 χ_A を一般化したものがメンバーシップ関数である。
- ファジィ集合は、メンバーシップ関数を用いて定義される。

ファジィ集合/メンバーシップ関数

Definition (ファジィ集合/メンバーシップ関数)

ファジィ集合 A は、全体集合 X と関数 $\mu_A : X \to [0, 1]$ の組 (X, μ_A) である。また、この関数 μ_A をメンバーシップ関数という。

- メンバーシップ関数 μ の値（メンバーシップ値）は、集合に属している度合いを表している。

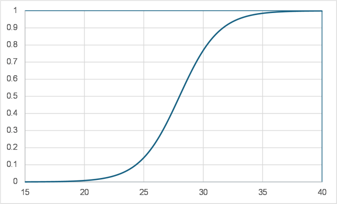
ファジィ集合の例

Example (だいたい 20 以上 30 以下の整数)

$\mu(x) =$
$\{17/0.2, 18/0.5, 19/0.8, 20/1.0, \ldots, 30/1.0, 31/0.8, 32/0.5, 33/0.2\}$

Example (暑い日)

$\mu(T) = \frac{1}{1+\exp(-0.6(T-28))}$



ファジィ集合の (集合) 演算

Definition (ファジィ集合の部分集合・演算)

$A = (X, \mu_A)$,$B = (X, \mu_B)$ をファジィ集合、実数 $\alpha \in [0, 1]$ とする。

- 部分集合 $A \subseteq B$：$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X$
- 補集合 A^c：$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X$
- 共通部分 $A \cap B$：$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in X$
- 和集合 $A \cup B$：$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in X$
- 差集合 $A \setminus B$：$\mu_{A \cup B}(x) = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}, \forall x \in X$
- デカルト積 $A \times B$：$\mu_{A \times B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$
- スカラー倍 αA：$\mu_{\alpha A}(x) = \alpha \mu_A(x), \forall x \in X$

ファジィ集合の性質

Definition (ファジィ集合の性質)

$A = (X, \mu_A)$,$B = (X, \mu_B)$ をファジィ集合とする。ファジイ集合では、クリスプ集合と同様以下の性質が成り立つ。

- $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A$
- $A \cap X = A, A \cup X = X$
- $A \subseteq B$ のとき、$A \cap B = A, A \cup B = B$
- $(A^c)^c = A$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

ファジィ集合の性質

Definition (ファジィ集合の性質)

ただし、以下の性質は一般には成り立たない。

- $A \cap A^c = \emptyset, A \cup A^c = X$

Definition (レベル集合)

$A = (X, \mu_A)$ をファジィ集合とする。

$$L_\alpha(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

を、A の α-レベル集合という。

- A の α-レベル集合 $L_\alpha(A)$ はクリスプ集合である。

台/コア

Definition (台)

$A = (X, \mu_A)$ をファジィ集合とする。

- 台 $\mathrm{Supp}\,(A) = \{x \in X \mid \mu_A\,(x) > 0\}$
- コア $\mathrm{Core}\,(A) = \{x \in X \mid \mu_A\,(x) = 0\}$

- コアを持つファジィ集合を、正規ファジイ集合という。

分解定理

Theorem (分解定理)

任意のファジィ集合 A は以下のようにクリスプ集合を用いて表現できる。

$$A = \cup_{\alpha \in [0,1]} \alpha L_{\alpha}(A)$$

像/逆像

Definition (像)

X, Y をクリスプ集合とする。関数 $f : X \to Y$ によるファジィ集合 $A = (X, \mu_A)$ の像は、

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x)$$

である。ただし、$f^{-1}(y) = \emptyset$ のとき $\mu_{f(A)}(y) = 0$ とする。

Definition (逆像)

関数 $f : X \to Y$ によるファジィ集合 $B = (Y, \mu_B)$ の逆像は、

$$\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B(f(x))$$

である。

ファジィ数

Definition (ファジィ数)

ファジィ集合 $A = (\mathbb{R}, \mu_A)$ が以下を満たすとき、ファジイ数という。

1. 【正規性】$\mu_A(a) = 1$ なる $a \in \mathbb{R}$ が存在する。
2. 【凸性】任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と $\lambda \in [0,1]$ について
   $\mu_A(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
3. 【連続性】$\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ は連続関数である。
4. 【有界性】台 $\mathrm{Supp}(A)$ が有界である。

- ファジィ数は実数（あるいは区間）の一般化である。

ファジィ数の (算術) 演算

- ファジイ数は実数を一般化したものであるため、実数同様に演算（和・差・積・商・MAX・MIN など）を定義したい。
- ファジィ集合の像

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x)$$

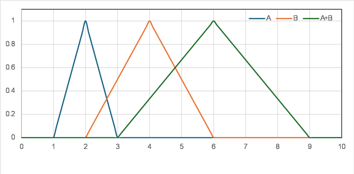
を用いることで、実数の演算をファジイ数に拡張する。

- これを、拡張原理という。

Example (ファジィ数の和)

ファジィ数 $A = (\mathbb{R}, \mu_A)$ とファジィ数 $B = (\mathbb{R}, \mu_B)$ の和 $A + B$ は、関数 $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$ の像により定義する。

$$\begin{aligned}\mu_{A+B}(z) &= \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \mu_{A\times B}(x, y) \\ & \sup_{(x,y):x+y=z} \mu_{A\times B}(x, y) \\ &= \sup_{(x,y):x+y=z} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\end{aligned}$$



ファジィ測度

- 一般に、確率 (測度) は、加法性を満たす。
  - 事象 E_1, E_2 について、$E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ ならば、$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
- しかし、人間の主観的確率は、加法性を満たすとは限らない。
- 測度の加法性を単調性に弱めたものがファジィ測度である。
  - 事象 E_1, E_2 について、$E_1 \subseteq E_2$ ならば、$P(E_1) \leq P(E_2)$

エルスバーグのパラドックス

Example (エルスバーグのパラドックス（曖昧さ回避）)

赤色の玉 30 個と、青色・黄色の玉が合わせて 60 個入った壷から、1 つの玉を取り出す。このとき、以下のくじを考える。

- くじ 1A：赤色の玉を取り出すと 1000 円もらえる。
- くじ 1B：青色の玉を取り出すと 1000 円もらえる。
- くじ 2A：赤色か黄色の玉（青色でない玉）を取り出すと 1,000 円もらえる。
- くじ 2B：青色か黄色の玉（赤色でない玉）を取り出すと 1,000 円もらえる。

このとき、① くじ 1A/1B ではくじ 1A が選ばれやすく、② くじ 2A/2B ではくじ 2B が選ばれやすい。

青色が選ばれる主観的確率を p とする。主観的確率が加法性を満たすとすると、① より $p < \frac{1}{3}$、② より $1 - p < \frac{2}{3}$ と評価していることになり矛盾する。

可測空間

Definition (可測空間)

X を非空集合とする。X の部分集合の族 $\mathscr{F} \subseteq X$ が以下の条件を満たすとき、$\mathscr{F} \subseteq X$ を X 上の σ 加法族という。

- $\emptyset \in \mathscr{F}$
- $A \in \mathscr{F}$ ならば、$A^c \in \mathscr{F}$
- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}$ ならば、$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

また、このとき $(X, \mathscr{F})$ を可測空間という。

測度

Definition (測度)

$(X, \mathscr{F})$ を可測空間とする。次の性質をもつ関数 $m : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ を測度という。

- $m(\emptyset) = 0$
- 【加法性】$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{F}$ が互いに素ならば、 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

ファジィ測度

Definition (ファジィ測度)

$(X, \mathscr{F})$ を可測空間とする。次の性質をもつ関数 $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ をファジィ測度という。

- $\mu(\emptyset) = 0$
- 【単調性】$A_1, A_2 \in \mathscr{F}$ が $A_1 \subseteq A_2$ を満たすならば、$\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$

さらに、ファジィ測度 $\mu : F \to [0, 1]$ が以下の性質を満たすとき、正規ファジィ測度という。

- $\mu(X) = 1$

- 正規ファジィ測度の例として、可能性測度・必然性測度がある。

可能性測度

Definition (可能性測度)

$\Pi : \mathscr{F} \to [0,1]$ を正規ファジィ測度とする。任意の $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$ について、

$$\Pi\left(A_1 \cup A_2\right) = \max\left\{\Pi\left(A_1\right), \Pi\left(A_2\right)\right\}$$

を満たすとき、可能性測度という。

Definition (必然性測度)

$N : \mathscr{F} \to [0,1]$ を正規ファジィ測度とする。任意の $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$ について、

$$\Pi\left(A_1 \cap A_2\right) = \min\left\{\Pi\left(A_1\right), \Pi\left(A_2\right)\right\}$$

を満たすとき、必然性測度という。

可能性測度の例 (1)

Example (可能性測度の例 (1))

$A, B \in \mathscr{F}$ とする。関数 $\Pi_B : \mathscr{F} \to [0,1]$ を

$$\Pi_B(A) = \begin{cases} 1 & A \cap B \neq \emptyset \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

で定義すると、Π_B は可能性測度となる。
$A \cap B \neq \emptyset$ の場合は、集合 B の要素が A に属することは可能であるため、Π_B は可能性の度合いを表していると見做せる。

可能性測度の例 (2)

Example (可能性測度の例 (2))

先ほどの例を B が正規ファジィ集合の場合に拡張する。関数 $\Pi_B : \mathscr{F} \to [0,1]$ を

$$\Pi_B(A) = \sup_{x \in A} \mu_B(x)$$

で定義すると、Π_B は可能性測度となる。

必然性測度の例 (1)

Example (必然性測度の例 (1))

$A, B \in \mathscr{F}$ とする。関数 $N_B : \mathscr{F} \to [0, 1]$ を

$$N_B(A) = \begin{cases} 1 & B \subseteq A \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

で定義すると、N_B は必然性測度となる。
$B \subseteq A$ の場合は、集合 B の要素が A に属することは必然であるため、N_B は必然性の度合いを表していると見做せる。

必然性測度の例 (2)

Example (必然性測度の例 (2))

先ほどの例を B が正規ファジィ集合の場合に拡張する。関数 $N_B : \mathscr{F} \to [0,1]$ を

$$\Pi_B(A) = \inf_{x \in A} \mu_B(x)$$

で定義すると、Π_B は必然性測度となる。

双対性

Theorem (双対性)

- 関数 $\Pi_B : \mathscr{F} \to [0,1]$ を可能性測度とすると、$N_B(A) := 1 - \Pi_B(A^c)$ は必然性測度である。
- 関数 $N_B : \mathscr{F} \to [0,1]$ を必然性測度とすると、$\Pi_B(A) := 1 - N_B(A^c)$ は可能性測度である。

- 様相論理における可能性演算子・必然性演算子の双対性と同様の関係が成立している。
  - $\Box p \equiv \sim \Diamond \sim p$
  - $\Diamond p \equiv \sim \Box \sim p$

確率・可能性・必然性の違い

Example (可能性・必然性・確率の違い)

偏りのないサイコロをふった場合に出る目を考える。集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$、P を確率測度、Π を可能性測度、N を必然性測度とする。例えば、それぞれの値は以下のように与えることが考えられる。

- 各目が出る確率は等しいので、$P(x) = \frac{1}{6}, \forall x \in X$
- どの目が出ることも等しく可能であるので、$\Pi(x) = 1, \forall x \in X$
- どの目が出ることも必然ではないので、$N(x) = 0, \forall x \in X$

調和原理

一般に、可能性・必然性・確率は以下のような関係が成り立つと期待される。

- 確率と可能性の関係
  - 「確率が高い」$\Rightarrow$「可能性が高い」
  - 「確率が低い」$\not\Rightarrow$「可能性が低い」
  - 「可能性が高い」$\not\Rightarrow$「確率が高い」
  - 「可能性が低い」$\Rightarrow$「確率が低い」
- 確率と必然性の関係
  - 「確率が高い」$\not\Rightarrow$「必然性が高い」
  - 「確率が低い」$\Rightarrow$「必然性が低い」
  - 「必然性が高い」$\Rightarrow$「確率が高い」
  - 「必然性が低い」$\not\Rightarrow$「確率が低い」

可測関数

Definition (可測関数)

$(X, \mathscr{F})$ を可測空間とする。関数 $f : X \to [-\infty, \infty]$ が

$$\{x \in X \mid f(x) > r\} \in \mathscr{F}, \forall r \in \mathbb{R}$$

を満たすとき、$\mathscr{F}$-可測であるという。

ショケ積分

Definition (ショケ積分)

$\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ を可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上のファジィ測度とする。可測関数 $f : X \to [0, \infty]$ の μ に関するショケ積分は、

$$(C) \int f d\mu := \int_0^\infty \mu(\{x \in X\} \mid f(x) > r)\, dr$$

で定義される。

- μ が測度のとき、上記はルベーグ積分と一致する。

ショケ積分の例

Example (アルバイト報酬問題)

$N = \{A, B, C\}$ がアルバイトをする。協力してアルバイトをすることで作業効率が変化する。歩合で報酬が支払われる。$S \subseteq N$ が協力したときの報酬を $v(S)$ とすると、

$$v(\emptyset) = 0, v(\{A\}) = 6, v(\{B\}) = 9, v(\{C\}) = 8$$
$$v(\{A, B\}) = 17, v(\{A, C\}) = 20, v(\{B, C\}) = 19, v(\{A, B, C\}) = 30$$

となる。同時にアルバイトを開始し、A, B, C はそれぞれ $4, 5, 7$ 時間働くとき、報酬の総額はいくらとなるか。

- $f : N \to \mathbb{R}$ を、$f(A) = 4, f(B) = 5, f(C) = 7$ と定義する。報酬の総額は、

$$(C)\int f dv = 2 \times 8 + 1 \times 19 + 4 \times 30 = 16 + 19 + 120 = 155$$

となる。

危険下の意思決定

- ショケ積分は、「危険（リスク）下の意思決定」にも応用される。
- ここでは、行動経済学で扱われている、「累積プロスペクト理論」について概観する。

有限くじ

- 危険下の意思決定問題の多くは、有限くじでモデル化できる。

Definition (有限くじ)

$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ を結果の集合とする。X 上の確率 $P : X \to [0,1]$ を、集合 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 上の有限くじという。$\mathcal{L}$ を集合 X 上の有限くじの集合とすると、

$$\mathcal{L} := \left\{ P : X \to [0,1] \mid \sum_{k=1}^{n} P(x) = 1 \right\}$$

となる。X は任意の集合でよいが、以下では簡単のため $x_k \in \mathbb{R}$ とする。

Example (有限くじの例)

偏りのないサイコロをふって、1 が出れば 2000 円、2or3 が出れば 500 円がもらえるくじは、確率 P を $P(2000) = \frac{1}{6}, P(500) = \frac{1}{3}, P(0) = \frac{1}{2}$ とする $X = \{2000, 500, 0\}$ 上の有限くじと見做せる。

アレのパラドックス

Example (アレのパラドックス（不確実性回避））

以下のくじを考える。

- くじ 1A：確実に 1,000 円もらえる
- くじ 1B：80%で 1,500 円もらえる
- くじ 2A：50%で 1,000 円もらえる
- くじ 2B：40%で 1,500 円もらえる

このとき、① くじ 1A/1B ではくじ 1A が選ばれやすく、② くじ 2A/2B ではくじ 2B が選ばれやすい。

くじ 2A は「50%でくじ 1A がもらえる」くじ、くじ 2B は「50%でくじ 1B がもらえる」くじと見做せる。

期待効用理論

- 有限くじ $L_1, \ldots, L_n \in \mathcal{L}$ が与えられたとき、どれを選択するかという問題を考える。
- １つの考え方として、「期待効用理論」がある。

【期待効用理論】
意思決定者は、各結果 x_k に対して「効用」$u(x_k)$ を割り当てる。意思決定者は、各くじの効用の期待値（期待効用）

$$EU(L) := \sum_{k=1}^{n} P(x_k)\, u(x_k)$$

を評価し、期待効用が最大となる選択をする。

- 期待効用理論は意思決定のモデルとして有用であるが、反例として先述の「エルスバーグのパラドックス」や「アレのパラドックス」がある。

累積プロスペクト理論

【累積プロスペクト理論】

- 意思決定者は「参照点（今の状態）」からの増減として結果を感じる。
  - 0 を「参照点」として、 を「利得」、 を「損失」とみなす。
- 価値関数 v：結果 $x_k \in \mathbb{R}$ に対して効用ではなく「価値」 $v\left(x_k\right)$ を割り当てる。
  - 参照点から離れるほど感応度が鈍化する。
  - 「利益」より「損失」を過大に評価する。

$$v\left(x\right) = \begin{cases} x^{\alpha} & x \geq 0 \\ -\lambda\left(-x\right)^{\beta} & x < 0 \end{cases} \left(\alpha, \beta \in \left(0, 1\right), \lambda > 1\right)$$

累積プロスペクト理論

【累積プロスペクト理論】

- 確率加重関数 w：客観的確率ではなく、加法性を満たさない「確率加重」$w(p)$ を用いる。
  - 小さい確率を過大評価し、大きい確率を過小評価する。

$$w(p) = \begin{cases} w^{+}(p) = \frac{p^{\gamma}}{((p^{\gamma}+(1-p)^{\gamma}))^{\frac{1}{\gamma}}} & x \geq 0 \\ w^{-}(p) = \frac{p^{\delta}}{\left(\left(p^{\delta}+(1-p)^{\delta}\right)\right)^{\frac{1}{\delta}}} & x < 0 \end{cases} \quad (\gamma, \delta \in (0,1))$$

- くじ L は、価値関数 v、確率加重関数 w（ファジィ測度）を用いたショケ積分を用いて評価する。

まとめ

- ファジィ理論の主要素である、「ファジィ論理」「ファジィ集合」「ファジィ測度」について説明した。
- ファジィ理論は、工学や経済学など様々な分野に応用される。

補足：数学的構造のファジィ化

- クリスプ集合をファジィ化したものがファジィ集合であった。
- 順序構造、位相構造、代数構造などの数学的構造についても同様にファジィ化たものが考えられる。
- 今回は、ファジィ順序関係、ファジイ位相空間、ファジィ部分群の例を示す。

補足：ファジィ関係

Definition (ファジィ関係)

X, Y をクリスプ集合とする。直積 $X \times Y$ におけるファジィ関係 R は、メンバーシップ関数 $\mu_R : X \times Y \to [0, 1]$ で特徴づけられるファジィ集合 $(X \times Y, \mu_R)$ である。

Definition (ファジィ関係の合成)

$R = (X \times Y, \mu_R), S = (Y \times Z, \mu_S)$ をファジィ関係とする。ファジィ関係の合成 $S \circ R : X \times Z \to [0, 1]$ は、以下のメンバーシップ関数 $\mu_{S \circ R} : X \times Z \to [0, 1]$ で特徴づけられるファジィ集合 $(X \times Z, \mu_{S \circ R})$ である。

$$\mu_{S \circ R}(x, z) = \sup_{y \in Y} \min \{\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)\}$$

補足：ファジィ関係

Definition (ファジィ関係)

X, Y をクリスプ集合とする。直積 $X \times Y$ におけるファジィ関係 R は、メンバーシップ関数 $\mu_R : X \times Y \to [0,1]$ で特徴づけられるファジィ集合 $(X \times Y, \mu_R)$ である。

Definition (ファジィ関係の合成)

$R = (X \times Y, \mu_R)\,, S = (Y \times Z, \mu_S)$ をファジィ関係とする。ファジィ関係の合成 $S \circ R : X \times Z \to [0,1]$ は、以下のメンバーシップ関数 $\mu_{S \circ R} : X \times Z \to [0,1]$ で特徴づけられるファジィ集合 $(X \times Z, \mu_{S \circ R})$ である。

$$\mu_{S \circ R}(x, z) = \sup_{y \in Y} \min \{\mu_R(x, y)\,, \mu_S(y, z)\}$$

補足：ファジィ関係の性質

Definition (ファジィ関係の性質)

$R = (X \times X, \mu_R)$ をファジィ関係とする。ファジィ関係についても以下の性質が定義できる。

- 【反射性】$\mu_R(x, x) = 1, \forall x \in X$
- 【対称性】$\mu_R(x_1, x_2) = \mu_R(x_2, x_1), \forall x_1, x_2 \in X$
- 【推移性】
  $\mu_R(x_1, x_3) \geq \sup_{y \in Y} \min\{\mu_R(x_1, x_2), \mu_R(x_2, x_3)\}, \forall x_1, x_2, x_3 \in X$
- 【反対称性】$\mu_R(x_1, x_2) > 0$ かつ $x_1 \neq x_2$ ならば、
  $\mu_R(y, x) = 0, \forall x_1, x_2, x_3 \in X$
- 【比較可能性】$x_1 \neq x_2$ ならば、$\mu_R(x_1, x_2) > 0$ または
  $\mu_R(x_2, x_1) > 0, \forall x_1, x_2 \in X$

補足：類似関係

Definition (ファジィ関係の類似関係)

$R = (X \times X, \mu_R)$ をファジィ関係とする。R が反射性、対称性、推移性を満たすとき、類似関係という。

- 類似関係 R の α-レベル集合 $L_\alpha(R)$ は同値関係となっている。
- 類似関係を用いることで、階層的な同値関係を表現できる。

補足：ファジィ順序

Definition (ファジィ順序)

- ファジィ関係 R が、反射性、推移性を満たすとき、R はファジィ前順序関係であるという。
- ファジィ関係 R が、反射性、推移性、反対称性を満たすとき、R はファジィ半順序関係であるという。
- ファジィ関係 R が、反射性、推移性、反対称性、比較可能性を満たすとき、R はファジィ線形順序関係であるという。

- ファジィ前順序関係、ファジィ半順序関係、ファジィ線形順序関係 R の α-レベル集合 $L_\alpha(R)$ はそれぞれ前順序関係、半順序関係、線形順序関係となっている。

補足：ファジィ位相

Definition (ファジィ位相空間)

X をクリスプ集合とする。X におけるファジィ集合の族 $\mathscr{T}$ が以下の条件を満たすとき、$(X, \mathscr{T})$ をファジィ位相空間という。

- $\emptyset, X \in \mathscr{T}$
- $A, B \in \mathscr{T}$ ならば、$A \cap B \in \mathscr{T}$
- $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{T}$ ならば、$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathscr{T}$

Definition (ファジィ連続写像)

ファジィ位相空間 $(X, \mathscr{T}_X)$ からファジィ位相空間 $(X, \mathscr{T}_Y)$ への関数 f がファジィ連続写像であるとは、任意のファジィ集合 $B \in \mathscr{T}_Y$ について、その逆像 $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}_X$ となることである。

補足：ファジィ部分群

Definition (ファジィ位相空間)

G を群とする。G 上のファジィ集合 A が以下の条件を満たすとき、A を群 X のファジィ部分群という。

- $\mu_A\left(x^{-1}\right) \geq \mu_A(x), \forall x \in G$
- $\mu_A(x \cdot y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}, \forall x, y \in G$

- ファジィ部分群、A の α-レベル集合 $L_\alpha(A)$ は群 G の部分群となっている。

参考情報

参考書籍

- GEORGE J. KLIR, BO YUAN『Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications』
- 水本雅晴『ファジイ理論とその応用』
- 中島信之, 竹田英二, 石井博昭 『社会科学の数理 ファジィ理論入門』
- 菅野道夫, 室伏俊明『ファジィ測度』
- 室岡健志 『行動経済学』