シークエント計算入門

くま

2026/03/20 第 9 回すうがく徒のつどい

自己紹介とあらまし

自己紹介

- X（旧 Twitter）：@kumatsubalgc
- 所属：神戸大学新 M2
- 専門：数理論理学（非古典論理）

あらまし

1. 数理論理学という分野について
2. シークエント計算 LK, LJ
3. LK, LJ のカット除去定理
4. カット除去定理の応用

登場人物

- **論理結合子**：記号化された 「かつ」,「または」, などの論理語（$\wedge, \vee, \neg, \to, \forall, \exists$）.
- **論理式**：記号化された命題（$A \wedge B$, $\forall x A(x) \to B$ など）.

	古典論理	直観主義論理
シークエント計算	LK	LJ
排中律	○	×
カット除去定理	○	○
選言特性	×	○

目次

数理論理学とは

- **数理論理学**（数学基礎論）とは，数学の営みを記号を用いて形式化し，その構造を数学的に調べる分野である．
- 数理論理学では,「かつ」「または」などを記号（**論理結合子**）を用いて表す.

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\to$	$\forall x$	$\exists x$
でない	かつ	または	ならば	すべての x で	ある x で

- 本講演では,（記号化された）命題 $A, B, \ldots$ や，これらを上記の記号で繋いだものを**論理式**という.
- 例えば「$(A$ かつ $B)$ ならば C」は論理式 「$(A \wedge B) \to C$」と書く.

注意：形式化について

注意

- 数理論理学では「証明」などの概念を記号により形式化し，それらを**群や環などと同様の数学的対象として**数学的分析を行う．
- ここで分析されるのは実際の証明（いわゆるメタレベルの証明）ではなく，トイモデルとして定式化された「証明」（オブジェクトレベルの証明）である．
- このため「数理論理学により数学の基礎が保証・構築されている」という認識は正確ではない．むしろ，既存の数学を基盤として,「数学的推論」の数理モデルを数学的に分析している．

古典論理と直観主義論理

- 数理論理学では，必要に応じて様々な論理を分析する．
- 特に，**古典論理**と**直観主義論理**という論理体系が重要である．
- **古典論理**とは，命題の真偽はその証明とは独立に，数学的対象の在り方によって予め客観的に定まっているとみなす論理である．
    - どんな命題も真偽が決まっているので，古典論理では**排中律**（任意の命題 A について $A \vee \neg A$ ）が成り立つ．
- **直観主義論理**とは，命題が真であることを，その命題の証明が存在することと考える論理である．
    - $A \vee \neg A$ が真であるには，A の証明か $\neg A$ の証明（A の反証）がなければいけない．
    - しかし，未解決問題はどちらの証明も与えられていない．この場合は $A \vee \neg A$ は真ではなく，排中律が成り立たない．
- 古典論理・直観主義論理の定式化の一つが後述するシークエント計算 **LK, LJ** である．

目次

シークエント計算とは

- シークエント計算 **LK, LJ** は，古典論理と直観主義論理の形式的分析のためにゲンツェンによって導入された．

古典論理	直観主義論理
LK	LJ

- シークエント計算では,「仮定 Γ から 結論 Δ が帰結する」ことを表す**シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$** を導出する．
  - ここで Γ, Δ は論理式の有限列である（空列も可）．
  - より詳しく，$A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, B_2, \ldots, B_m$ は,「A_1 かつ A_2 かつ $\cdots$ かつ A_n なら，B_1 または B_2 または $\cdots$ または B_m」を表す．

Gerhard Gentzen
(1909–1945)

シークエント計算の証明の例

- シークエントの導出に用いる規則を **推論規則**という．
- 例えば後述する (R $\wedge$), (L $\wedge$), (R $\to$) といった推論規則から，$\varnothing \Rightarrow (A \wedge B) \to (B \wedge A)$ （仮定なしで「A かつ B」ならば「B かつ A」が成り立つ）が次のように証明される．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{A \wedge B \Rightarrow B}\,(\mathrm{L}\ \wedge 1) \qquad \dfrac{A \Rightarrow A}{A \wedge B \Rightarrow A}\,(\mathrm{L}\ \wedge 2)}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)}\,(\mathrm{R}\ \wedge)}{\varnothing \Rightarrow (A \wedge B) \to (B \wedge A)}\,(\mathrm{R}\ \to)$$

Definition

推論規則を用いて作られる有限の木構造を**証明図** という（有限木として，シークエントが節点，推論規則が枝となる）．

シークエント計算

Definition (証明可能性)

- シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ を根とする証明図が存在する時，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ は**証明可能である**という．
- 特に $\varnothing \Rightarrow A$ の形のシークエントが証明可能である時，論理式 A が証明可能であるという．

例

前ページの例は，論理式 $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$ が証明可能であることの例となっている．

シークエント計算 LK, LJ

- まず，シークエント計算 **LK** を定義する．以下では $A, B, \ldots$ は任意の論理式，$\Gamma, \Delta, \ldots$ は任意の論理式の有限列である．

Definition (LK)

LK の推論規則は**公理・構造規則・論理規則**からなる．
公理は (Ax) 規則のみである．

$$\frac{}{A \Rightarrow A}\ (\mathrm{Ax})$$

- (Ax) 規則は，どのような場合でも $A \Rightarrow A$ （「A ならば A」）は証明可能であることを意味する．この規則をはじめとして，証明図が作られる．
- 以降では上部の棒は書かないこととする．

構造規則 1: 弱化規則・縮約規則

- 以下で導入する弱化規則，縮約規則，交換規則，カット規則は総称して**構造規則**と呼ばれ，証明の中で用いる操作を形式化したものである．

Definition

弱化規則 (Weakening) と**縮約規則** (Contraction) を次で定める．

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{LW}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\,(\mathrm{RW})$$

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{LC}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\,(\mathrm{RC})$$

- 弱化規則は「無駄な仮定や結論を付け足して主張を弱めてもよい」．
- 縮約規則は「同じ仮定や結論は一つにまとめてもよい」．

構造規則 2: 交換規則・カット規則

Definition

交換規則 (Exchange) とカット規則 (Cut) を次で定める.

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{B, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{LE}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A}\ (\mathrm{RE})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ (\mathrm{Cut})$$

- 交換規則は「仮定や結論の順序を変えてもよい」.
- カット規則は「「A ならば B」 かつ 「B ならば C」ならば,「A ならば C」」という三段論法の形式化である.
  - 下段で A が「カット」されているのでカット規則という.

論理規則1: 連言（かつ）・選言（または）

- 論理結合子 $\neg, \wedge, \vee, \to, \forall, \exists$ についての規則を**論理規則**という.
- 論理規則は，下に行くほど論理式が複雑になるよう作られている.

Definition

$\wedge$（かつ），$\vee$（または）の規則を次で定める.

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{A \vee B, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ (\mathrm{L}\vee) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma' \Rightarrow \Delta', B}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', A \wedge B}\ (\mathrm{R}\wedge)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}\wedge 1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ (\mathrm{R}\vee 1)$$

$$\frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}\wedge 2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ (\mathrm{R}\vee 2)$$

論理規則 2: 否定（でない）・含意（ならば）

Definition

¬（〜でない），→（ならば）の規則を次で定める．

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}\neg) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ (\mathrm{R}\neg)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{A \to B, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ (\mathrm{L}\to) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\ (\mathrm{R}\to)$$

論理規則 4: 全称量化（すべての）・存在量化（ある〜）

Definition

$$\frac{A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (\mathrm{L}\forall) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(y)}{\Gamma \Rightarrow \Delta \forall x A} \ (\mathrm{R}\forall)$$

$$\frac{A(y), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (\mathrm{L}\exists) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A} \ (\mathrm{R}\exists)$$

ここで，(L∃)(R∀) で現れる y は推論規則の適用後のシークエントで自由に現れていない（$\forall x$ や $\exists x$ の形で現れるか，シークエントに含まれない）とする．

- 上の条件は変数の衝突を避けるための「おまじない」だが，この条件がついている規則が「すべての〜」，ついていない規則が「ある〜」に対応する．

シークエント計算 LJ

Definition (LJ)

シークエント計算 **LJ** は，LK の推論規則においてシークエントの右辺の長さを高々1 に制限した体系である．

- LK では，排中律 $A \vee \neg A$ は次のように証明される．
- 排中律の証明では，右辺のシークエントが 2 つ現れていることが本質的に効いており，LJ ではこれは通らない．また実際に，LJ では排中律は証明不可能である．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A \vee \neg A}\ (\mathrm{R}\ \vee)}{\color{red}{\varnothing \Rightarrow \neg \mathbf{A}, \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}}}\ (\mathrm{R}\ \neg)}{\color{red}{\varnothing \Rightarrow \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}, \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}}}\ (\mathrm{R}\ \vee)}{\varnothing \Rightarrow A \vee \neg A}\ (\mathrm{RC})
$$

シークエント計算まとめ

- LK は以下の推論規則からなる推論体系である.
  - 公理
    - (Ax) 規則 $A \Rightarrow A$.
  - 構造規則
    - 弱化規則：仮定や結論を増やす.
    - 縮約規則：同じ仮定や結論をまとめる.
    - 交換規則：仮定の順序を交換する.
    - カット規則：三段論法.
  - 論理規則
    - $\neg, \land, \lor, \rightarrow, \forall, \exists$ についての規則.
    - 右辺の規則が真の時，左辺の規則が偽の時に対応する.
- LJ は，LK の規則で右辺のシークエントを高々1つに制限したものである.

目次

カット規則の問題

Definition(再)

カット規則とは次の推論規則である.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(\mathrm{Cut})$$

- カット規則は証明のためには有用である. 一方この規則の存在は, 証明の構造の分析のためには不都合である.
- 特に, 与えられたシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ がどのように証明されたかを分析する際に問題がある. カット規則が存在すると, A を変えることによって, 上部のシークエントがどのようなものでもありえてしまう.

カット除去定理

- カット除去定理はゲンツェンによって示された．

Theorem (カット除去定理)

LK (LJ) で $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能であれば，*LK (LJ)* でカット規則を用いずに $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能である．カットが用いられていない $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図を $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の **cut free proof** という．

- 以下では，カット除去定理の概略を述べる．詳細は [5] などを参考にして欲しい．
- 方針としては，カット規則が用いられた $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図を書き換えることで，カット規則を除去する．
- 具体的には，カット規則を上に持ち上げるように書き換え，最上部（公理）においてカット規則を取り除く．

カット除去定理の証明 1: Extended cut rule

- カット除去定理の証明のための準備として，より強いカット規則 (e-Cut) を定義する．

Definition

e-Cut(Extended cut rule) を以下によって定める．

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Gamma', \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma_A \Rightarrow \Delta_A, \Delta'} \text{(e-Cut)}$$

ここで Γ'_A , Δ_A は， Γ' から，Γ' に現れる A を 0 以上の任意の数取り除いたものである．

- LJ の (Cut) を (e-Cut) に置き換えた体系を LJ^e と呼ぶ．
- LJ^e でのカット除去された証明図は，LJ のカット除去された証明図でもあるので，LJ^e のカット除去について考えればよい．

カット除去定理の証明 2: ランクと重さ

- 各カット規則（以下では (e-Cut)）に次の数を定める.

Definition

- カット規則の**ランク**とは，カットされる A に現れる論理結合子の数である.
- カット規則の**重さ**とは $\Gamma, \Rightarrow, \Delta, A$ から公理までに現れるシークエントの個数の最大数（最大の枝の長さ，深さ）と，$A, \Gamma', \Rightarrow \Delta'$ から公理までに現れるシークエントの個数の最大数の和である.

- 次の証明図中のカットのランクは 0 ，重さは $2 \times 2 = 4$ である（A に論理結合子は含まれないとする）.

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \wedge B \Rightarrow A}\,(\mathrm{L}\wedge) \qquad \dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A \vee B}\,(\mathrm{R}\vee)}{A \wedge B \Rightarrow A \vee B}\,\textbf{(e-Cut)}$$

カット除去定理の証明 3: 二重帰納法

- カット規則のランク r，重さ w の組を (r, w) と書く．
- (r, w) の全体に順序 $\preceq$（辞書式順序）を次のように定める．

$$(r, w) \preceq (r', w') \iff \begin{cases} r \leq r' & \text{または} \\ r = r' \text{ かつ } w \leq w' \end{cases}$$

- 上記の辞書式順序は整列順序（全順序で，無限下降列が存在しない）となるため，次の二重帰納法を用いることができる．特に P として「カット除去可能」を考える．

Proposition (二重帰納法)

任意の (r, h) に対し，

$$\left(\text{任意の } (r', w') \precneqq (r, w) \text{ で } P(r', w') \right) \text{ ならばば } P(r, w)$$

が成り立つならば，すべての (r, w) について $P(r, w)$ が成り立つ．

カット除去定理の証明 4: 一方が公理である場合

- ここから LJ のカット除去定理について概略を示す．LK も同様．
- 証明図は有限木であるため,（もしカット規則があれば）最上部のカット規則一つを除去できることを示せばよい．最上部のカット規則が次の形であるとする．

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\ \text{((e-Cut) なし)}}{\Gamma \Rightarrow A} \qquad \dfrac{\vdots\ \text{((e-Cut) なし)}}{A, \Gamma' \Rightarrow C}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow C}\ \text{(e-Cut)}$$

- 上段のシークエント $\Gamma \Rightarrow A$ と $A, \Gamma' \Rightarrow C$ のいずれかが公理である場合は，次のように書き換えることでカットが除去される．

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Rightarrow A} \qquad A \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A}\ (e-Cut) \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma \Rightarrow A}$$

カット除去定理の証明 5: 一方が構造規則である場合

- 上段のシークエント $\Gamma \Rightarrow A$ と $A, \Gamma' \Rightarrow C$ のいずれかが構造規則である場合も，(r, w) が減少する形に証明図を書き換えられる．
- 例えば一方が (LC) で，(LC) が適用された A がカットされる場合は次のように書き換えられる．

$$
\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Rightarrow A} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{A, A, \Gamma' \Rightarrow C}}{A, \Gamma' \Rightarrow C}\,(\mathrm{LC})}{\Gamma, \Gamma'_A \Rightarrow C}\,(\mathrm{e\text{-}Cut})
\quad \Longrightarrow \quad
\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \quad \dfrac{\vdots}{A, A, \Gamma' \Rightarrow C}}{\Gamma, \Gamma'_A \Rightarrow C}\,(\mathrm{e\text{-}Cut})
$$

- 右のカットではランクは等しいが重さが減っているため，帰納法の仮定によりカットが除去できる．

カット除去定理の証明6: 両方が論理規則である場合

- $\Gamma \Rightarrow A$, $A, \Gamma' \Rightarrow C$ の両方が構造規則である場合も同様である．
- 例えば (L $\wedge$1) (R$\wedge$) が使われていて，$A = B \wedge C$ の時は次のように書き換えられる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1 \Rightarrow B} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma_2 \Rightarrow C}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow B \wedge C}(\mathrm{R}\wedge) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{B, \Gamma_3 \Rightarrow D}}{B \wedge C, \Gamma_3 \Rightarrow D}(\mathrm{L}\wedge)}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{3,B\wedge C} \Rightarrow D}(e-Cut)$$

カット除去定理の証明6: 両方が論理規則である場合

- Γ_3 が $B \land C$ を含まない（特に $\Gamma_{3,B\land C} = \Gamma_3$）の場合：
- カットする論理式が $B \land C$ から B になっているので，ランクが一つ下がっている．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, B} \qquad \dfrac{\vdots}{B, \Gamma_3 \Rightarrow D}}{\Gamma_1, \Gamma_3 \Rightarrow D}\,(\text{e-Cut})}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Rightarrow D}\,(\text{LW})
$$

カット除去定理の証明 6: 両方が論理規則である場合

- Γ_3 が $B \wedge C$ を含む場合：
- 上のカットは重さが，下のカットはランクが下がっている．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1 \Rightarrow B} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow B \wedge C} \qquad \dfrac{\vdots}{B, \Gamma_3 \Rightarrow D}}{B, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{3,B\wedge C}, \Rightarrow D}\text{(e-Cut)}}{\Gamma_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{3,B\wedge C}, \Rightarrow D}\text{(e-Cut)}}{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{3,B\wedge C} \Rightarrow D}\text{(LC), (LE)}}$$

目次

カット除去定理の応用

Theorem (カット除去定理（再）)

LK (*LJ*) で $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能であれば，*LK* (*LJ*) でカット規則を用いずに $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能である．カットが用いられていない $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図を $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の **cut free proof** という．

- カット除去された証明図は，カット規則により論理式が消去されることがない．このため，公理で与えられた論理式が証明図に残り続ける．このため，次の応用を持つ．
  - Subformula Property
  - Separation Property
  - 論理の無矛盾性
  - LJ の選言特性・存在特性
  - 公理の独立性

Subformula property

Definition

論理式 B が 論理式 A の**部分論理式** (subformula) であるとは,（適切に変数を取り替えて）A の文字列中に B が含まれることである.

Theorem (Subformula Property)

LK (LJ) で $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能であれば, 証明図に現れる全ての論理式が, Γ, Δ に現れる論理式の部分論理式になっているような *LK (LJ)* の $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図が存在する.

Proof.

カット規則以外は上段の論理式は下段の論理式の部分論理式となるため, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の Cut free proof が求めるものである □

- $\Gamma \Rightarrow \Delta$ を証明するには Γ, Δ 中の論理式のみがあればよい.

Separation property

Theorem (Separation Property)

LK (*LJ*) で $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能なら, Γ, Δ に現れる論理規則と構造規則のみを用いた $\Gamma \Rightarrow \Delta$ の証明図が存在する.

Proof.

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ の cut free proof P を考える．P 中で $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に現れない論理結合子 $\circ$ に関する規則が用いられると仮定すると，P 中には $\circ$ を含む論理式 A が現れる．しかし，A は $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 中の論理式の部分論理式にはなり得ず，Subformula property に反する．よって，そのような規則は用いられず，P が求めるものである． □

- Separation property は，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能であれば，Γ, Δ 中の論理結合子に関する規則だけで $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能であるということを意味する．

無矛盾性

- もし $\varnothing \Rightarrow \varnothing$ が証明できると，Weakening によってどんなシークエントも導けてしまい，体系が矛盾する．

Proposition (無矛盾性)

LK (LJ) は $\varnothing \Rightarrow \varnothing$ を証明しない．このため，*LK (LJ)* は無矛盾である．

Proof.

- もし $\varnothing \Rightarrow \varnothing$ が証明可能であれば，その cut free proof P が存在する．
- カット規則以外の推論規則では推論規則の下段に現れる論理式の総数は 1 以上であることに注意すると，P に現れるすべてのシークエントには論理式が 1 つ以上現れている．
- このため P は $\varnothing \Rightarrow \varnothing$ の証明図であるにもかかわらず，$\varnothing \Rightarrow \varnothing$ が現れないため矛盾．

□

LJ の選言特性 1

Definition (LJ(再))

シークエント計算 **LJ** は，LK の推論規則においてシークエントの右辺の長さを高々1 に制限した体系である．

Proposition (選言特性)

LJ で $A \vee B$ が証明できるなら，*LJ* で A が証明できるか，または B が証明できるかのいずれかである．

- 選言特性は，LJ で「A または B」が証明できるなら，A と B のどちらかが具体的に LJ で証明できるということである．
- 排中律が証明できる LK では選言特性は成りたたず，LJ あるいは直観主義論理の特徴の一つと言える．

LJ の選言特性 2

Proof.

$\varnothing \Rightarrow A \vee B$ の cut free proof をとる．この時，$\varnothing \Rightarrow A \vee B$ の直前の規則は (RW), (R $\vee$ 1), (R $\vee$ 2) のいずれかである．

$$\frac{\varnothing \Rightarrow \varnothing}{\varnothing \Rightarrow A \vee B}\ (\mathrm{RW}) \qquad \frac{\varnothing \Rightarrow A}{\varnothing \Rightarrow A \vee B}\ (\mathrm{R}\vee 1) \qquad \frac{\varnothing \Rightarrow B}{\varnothing \Rightarrow A \vee B}\ (\mathrm{R}\vee 2)$$

しかし，無矛盾性から (RW) の場合は不可である．よって，$\varnothing \Rightarrow A$ または $\varnothing \Rightarrow B$ が証明可能である．すなわち，A が証明可能であるか，B が証明可能であるかのいずれかである． □

- 同様に推論規則を遡ることで次も証明できる．

Proposition (LJ の存在特性)

LJ で $\exists x A(x)$ が証明できるなら，ある a について *LJ* で $A(a)$ が証明できる．ここで $A(a)$ は $A(x)$ 中の x への a の代入である．

公理の独立性

Proposition (排中律の独立性)

ある A が存在して，LJでは $A \lor \neg A$ を証明できない．

- LJ より強い LK では 排中律が証明できるため，無矛盾性を考えると LJ では排中律の否定を証明できない．
- この命題から，LJ では排中律もその否定も証明できない，独立した公理となっていることがわかる．

Lemma

A を論理結合子を含まない論理式とする．この時，LK，LJでは $A \Rightarrow \varnothing$ も $\varnothing \Rightarrow A$ も証明できない．

Proof.

Subformula property から． □

公理の独立性

Proposition (排中律の独立性)

ある A が存在して，LJ では $A \vee \neg A$ を証明できない．

Proof.

- A を論理結合子を含まない論理式とする．
- $A \vee \neg A$ が証明可能であると仮定すると，選言特性より A または $\neg A$ が証明可能である．
- もし A が証明可能であれば，$\varnothing \Rightarrow A$ が証明可能であり上の補題に矛盾．
- もし $\neg A$ が証明可能であれば，その cut free proof は $\frac{A \Rightarrow \varnothing}{\varnothing \Rightarrow \neg A}$ の形をとるため，$A \Rightarrow \varnothing$ が証明でき同様に矛盾．

□

目次

まとめ

- 数理論理学では，記号で形式化した「数学」を分析する．
- ゲンツェンが考案したシークエント計算 LK, LJ はそれぞれ古典論理・直観主義論理の体系の一つであり，シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ を導出する．
- LK, LJ では，シークエントが証明可能なら，カットを用いずにそれを証明することができる．これをカット除去定理という．
- カット除去定理は論理の無矛盾性や公理の独立性の証明など，様々な応用を持つ．

参考文献

- 大西琢朗. 論理学. 昭和堂, 2021
- 鹿島亮. 数理論理学. 朝倉書店, 2009
- 戸次大介. 数理論理学. 東京大学出版会, 2012
- Troelstra A.S. and Schwichtenberg H. Basic Proof Theory 2ed. *Cambridge University Press*, 2000
- Ono H. Proof Theory and Algebra in Logic. *Springer*, 2019