圏論の入門で陥りやすい誤り, 疑問について

岡本 和也

2026 年 3 月 21 日

はじめに

この発表では, 圏論の入門で陥りやすい誤り, 疑問について解説します.
なお, 論理体系は古典 1 階述語論理, 公理系は ZFC とします.

ZFC の公理の一部

外延性公理 $\forall A \forall B ((\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)) \Rightarrow A = B)$.

分出公理図式 $P(x)$ を論理式, $P(x)$ の A, x 以外の自由変数は $w_0, \ldots, w_{i-1}$ で, B は P の自由変数でないとする.
$\forall w_0 \ldots \forall w_{i-1} \forall A \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x))$.

注意

- 自分が使う論理体系と公理系は, 初めに宣言しましょう.
- 等号 $=$ と帰属関係 $\in$ に定義はありません.
- ZFC では**すべてのものは集合**です. 集合を定義するなら, いつでも真になる論理式を使い, たとえば

$$x \text{ は集合} :\Leftrightarrow x = x$$

  とすればよいのです.
- **論理式はものではありません**. 論理式と集合は別の概念です.
- 任意 $\forall$, 存在 $\exists$ の直後は $\forall x \cdots$ や $\exists y \cdots$ のように変数記号しか使えません. $\exists(-x)\cdots$ のような文字列は文法エラーです.
- $\forall x \cdots$ や $\exists y \cdots$ に現れる変数の範囲は集合です. 論理式 P に $\forall P, \exists P$ とは書けません.

動機

※あとでそれぞれの定義を解説します.
局所小圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ の対象 a について, hom 関手とよばれる集合の圏 **Set** への関手が構成できます.

$$\hom_{\mathcal{C}}(a, -) \colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}.$$

hom 関手を構成するときに, いくつか注意点があります.

1. 集まりの大きさ.
2. hom 関手の射関数の well-defined, 一般の写像の構成.
3. 有向グラフ.

hom 関手は様々な定義や定理で現れるため, 構成できないと致命的です.
また, 関手圏でも集まりの扱いには注意が必要です.

集まり

圏論に限らず, 数学では「ものを集める」ことをします. つまり論理式 $P(x)$ をみたす x を集めて, 集合 $\{x \mid P(x)\}$ を作りたいわけです.

$$\forall x(x \in \{z \mid P(z)\} \Leftrightarrow P(x)).$$

たとえば $x = a$ をみたす x を集めて, 1 点集合 $\{x \mid x = a\} = \{a\}$ が作れます.

$$\forall x(x \in \{a\} \Leftrightarrow x = a).$$

ただし $\{x \mid P(x)\}$ は**定義できないことがあります**.

たとえば $\{x \mid x \notin x\}$ や集合全体 $\{x \mid x = x\}$ は定義できません.

定理

1. $\neg\exists R \forall x(x \in R \Leftrightarrow x \notin x)$.
2. $\neg\exists V \forall x(x \in V \Leftrightarrow x = x)$.

証明. (1) $\exists R \forall x(x \in R \Leftrightarrow x \notin x)$ とすると $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ となり矛盾.
(2) $\exists V \forall x(x \in V \Leftrightarrow x = x)$ とする. 分出公理図式より
$\exists R \forall x(x \in R \Leftrightarrow x \in V \land x \notin x)$. よって $\forall x(x \in R \Leftrightarrow x \notin x)$ となり (1) と矛盾. □

集まり

次のときに $\{x \mid P(x)\}$ が定義できます.

定理

論理式 $P(x)$ について

$$(\exists A \forall x (P(x) \Rightarrow x \in A)) \Rightarrow \exists! B \forall x (x \in B \Leftrightarrow P(x)).$$

証明. (存在) 分出公理図式より $\exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x))$. 仮定より $\forall x (x \in B \Leftrightarrow P(x))$.
(一意性) $\forall x (x \in B' \Leftrightarrow P(x))$ とすると $\forall x (x \in B \Leftrightarrow x \in B')$. 外延性公理より $B = B'$. □
このただ一つ存在する B を**内包的記法** $\{x \mid P(x)\}$ と定義しています.

定義

論理式 $P(x)$ について

$$(\exists A \forall x (P(x) \Rightarrow x \in A)) \Rightarrow \forall x (x \in \{z \mid P(z)\} \Leftrightarrow P(x)).$$

集まり

内包的記法 $\{x \mid P(x)\}$ が定義できるかどうかが, 集まりの大小の定義になっています.

定義

論理式 $P(x)$ の変数 x について考えるとき**クラス (class)** とよぶ. また,

$$\exists A \forall x (P(x) \Rightarrow x \in A)$$

をみたすとき $P(x)$ は変数 x について**小さいクラス (small class)**, あるいは**集合とみなせる**とよぶ.
逆に, $P(x)$ が x について小さくない, つまり

$$\neg \exists A \forall x (P(x) \Rightarrow x \in A)$$

をみたすとき, $P(x)$ は変数 x について**大きい**, あるいは**真クラス (proper class)** とよぶ.

ここでは, クラスという言い方は避けて, そのまま論理式とよぶことにします.

集まり

- 論理式のどの変数で集めるかは重要です. たとえば $x \in a$ であれば変数 x, a のどちらを集めるかで集まりが変わります.
- 圏論では大きい論理式も扱いたいので, 必要にならない限り, $\{x \mid P(x)\}$ を作ることを**あきらめます**. たとえば小さい論理式 $P(x)$ と論理式 Q について

$$(\forall x \in \{x \mid P(x)\}\ Q) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \Rightarrow Q),$$

$$(\exists x \in \{x \mid P(x)\}\ Q) \Leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge Q)$$

が成り立ちます. 左辺は小さい論理式しか使えませんが, 右辺なら大小は関係ありません. つまり, 右辺の方が強力です.

集合論の復習

定義

部分集合	$A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x \in A\ x \in B$
2 点集合	$\{x, y\} := \{z \mid z = x \vee z = y\}$
1 点集合	$\{x\} := \{x, x\}$
順序対	$\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$
和集合	$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
直積集合	$A \times B := \{z \mid \exists x \in A\ \exists y \in B\ z = \langle x, y\rangle\}$
写像	$f\colon A \to_{写像} B :\Leftrightarrow f \subseteq A \times B \wedge \forall x \in A\ \exists! y \in B\ \langle x, y\rangle \in f$
値	$\forall f \forall x((\exists! y\ \langle x, y\rangle \in f) \Rightarrow \langle x, f(x)\rangle \in f)$
合成	$g \circ_{写像} f := \{w \mid \exists x \exists y \exists z(w = \langle x, z\rangle \wedge \langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g)\}$
恒等写像	$\mathrm{id}_A^{写像} := \{z \mid \exists x \in A\ z = \langle x, x\rangle\}$

※ 話の都合で，写像，合成，恒等写像に「写像」と書いていますが，普通は付けずに $\to, \circ, \mathrm{id}$ と書きます．
※ 値や写像の合成の定義は特にそうですが，どれが変数なのかは注意しなければいけません．使いにくくならない限りは，変数を減らしましょう．
※ 3 つの組は $\langle x, y, z\rangle := \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$ の略記とします．

集合論の復習

定理

1. $\forall w \forall x \forall y \forall z (\langle w, x\rangle = \langle y, z\rangle \Rightarrow w = y \land x = z)$.
2. $\forall a \forall b \forall f \colon a \to_{\text{写像}} b\ \forall x \in a\ \langle x, f(x)\rangle \in f$.
3. $\forall a \forall b \forall c \forall f \colon a \to_{\text{写像}} b\ \forall g \colon a \to_{\text{写像}} c\ ((\forall x \in a\ f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g)$.
4. $\forall a \forall b \forall c \forall f \colon a \to_{\text{写像}} b\ \forall g \colon b \to_{\text{写像}} c.$
   $(g \circ_{\text{写像}} f \colon b \to_{\text{写像}} c \land \forall x \in a\ g \circ_{\text{写像}} f(x) = g(f(x)))$.
5. $\forall h \forall g \forall f\ (h \circ_{\text{写像}} g) \circ_{\text{写像}} f = h \circ_{\text{写像}} (g \circ_{\text{写像}} f)$.
6. $\forall a (\mathrm{id}_a^{\text{写像}} \colon a \to a \land \forall x \in a\ \mathrm{id}_a^{\text{写像}}(x) = x)$.
7. $\forall a \forall b \forall f \subseteq a \times b\ (f \circ_{\text{写像}} \mathrm{id}_a^{\text{写像}} = f \land \mathrm{id}_b^{\text{写像}} \circ_{\text{写像}} f = f)$.

※ (3) は外延性公理を使って示します．写像専用の等号を定義する必要はありません．

集合論の復習

次の定理は「写像の作り方」であって「写像の定義」ではありません.

定理

1. 論理式 $P(x,y)$ について
$f = \{z \mid \exists x \in a\ \exists y \in b\ (z = \langle x,y\rangle \land P(x,y))\}$ とおくと
$(\forall x \in a\ \exists! y \in b\ P(x,y)) \Rightarrow (f : a \to b \land \forall x \in a\ P(x, f(x)))$.
2. 項 $F(x)$ について $f = \{z \mid \exists x \in a\ \exists y \in b\ (z = \langle x,y\rangle \land F(x) = y))\}$
とおくと $(\forall x \in a\ F(x) \in b) \Rightarrow (f : a \to b \land \forall x \in a\ F(x) = f(x)))$.

なお, 代数学などで商集合からの写像を作るときは上記の定理の (1) を使っています.

圏

圏は有向グラフとモノイドを合わせた概念，つまり，点，矢印，矢印の合成の組でいい条件をみたす概念です．

定義

論理式 $a\colon O, f\colon a \to b$，項 $g \circ f$ が次をみたすとき組 $(O, \to, \circ)$ を**圏 (category)** とよぶ．

- 射の合成 $\forall a,\ b,\ c\colon O\ \forall f\colon a \to b\ \forall g\colon b \to c\ g \circ f\colon a \to c$,
- 結合律 $\forall a,\ b,\ c,\ d\colon O\ \forall f\colon a \to b\ \forall g\colon b \to c\ \forall h\colon c \to d\ (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$,
- 恒等射の存在 $\forall a\colon O\ \exists i\colon a \to a\ \forall b\colon O\ ((\forall f\colon a \to b\ f \circ i = f) \wedge (\forall g\colon b \to a\ i \circ g = g))$,
- 始域と終域の一意性 $\forall a,\ b,\ c,\ d\colon O\ \forall f\colon a \to b\ (f\colon c \to d \Rightarrow a = c \wedge b = d)$.

$a\colon O$ を**対象 (object)**，$f\colon a \to b$ を a から b への**射 (morphism, arrow)**，$g \circ f$ を g と f の**合成 (composition)** とよぶ．

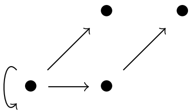
圏の注意点

- **疑問** 群や位相空間は集合に演算や位相などの構造が入っていたのに, なぜ論理式を考えるんですか?
  答え 集合全体などの大きな集まりも調べたいから.
- **疑問** 圏の定義に論理式や項が変数として入っているけど大丈夫?
  答え 無数の論理式を同時に扱っていると思えばよい. 内包的記法 $\{x \mid P(x)\}$ や数学的帰納法が具体例.
- **疑問** 圏を 1 文字で $\mathcal{C}$ などと書いていいですか?
  答え はい. ただし, 順序対は集合しか使えないので $\mathcal{C} = \langle \mathcal{O}, \rightarrow, \circ \rangle$ のような書き方は**できません**. 圏の定義に代入した論理式と思うのが無難だと思います.

圏の注意点

- **疑問** 図を書けば証明になりますか?
  答え 個人的には, 図から証明が復元できるなら許せます. ただし, 図は見通しをよくしたり, 要点をまとめるのには便利ですが, 数学の文法は守りましょう. また, 証明に現れる順に点や矢印を書くので, 書き順が大事になります.
- **疑問** 「演算が存在して〜」「合成が存在して〜」と書かれていることがありますが, 式にすると $\exists \circ \cdots$ ですか? それとも $\exists (g \circ f) \cdots$ ですか?
  答え まず, $\exists$ の直後は変数記号なので $\exists (g \circ f) \cdots$ は文法エラーです.
  また, ここでは $\circ$ は集合ではないので $\exists$ はつきません.
  ただし, 今回の圏の定義以外で, 集合と順序対を使ってなにかを $\cdots :\Leftrightarrow \exists M \exists * \ \ a = \langle M, * \rangle \cdots$ などはありえますが, 合成以外の構造に「存在」と書いてないなら, 「存在」は無視してください.

圏の注意点



やめて 合成が与えられてないのに，なにかを矢印で繋いだものを「圏」だと言ってしまう人がいますが，それは

圏ではなく有向グラフ

です.

集合の圏について

集合全体を表す論理式を次のようにおきます.

$$a\colon \mathbf{V} :\Leftrightarrow a = a$$

対象を集合, 射を写像, 合成は写像の合成を考えると $(\mathbf{V}, \rightarrow_{\text{写像}}, \circ_{\text{写像}})$ について射の合成, 結合律, 恒等射の存在が示せます.
ただ, 始域と終域の一意性をみたさないで, **圏になりません**. 空写像 $\emptyset$ がその例です.

$$\emptyset,\ \{\emptyset\}\colon \mathbf{V},\ \emptyset\colon \emptyset \rightarrow_{\text{写像}} \emptyset,\ \emptyset\colon \emptyset \rightarrow_{\text{写像}} \{\emptyset\},\ \emptyset = \emptyset,\ \emptyset \neq \{\emptyset\}.$$

弱い圏

疑問 始域と終域の一意性をみたすように調整できないか?
答え できます.
ここでは, 圏の定義から始域と終域の一意性を抜いたものを弱い圏とよびます.

定義

論理式 $a \colon O, f : a \to b$, 項 $g \circ f$ が次をみたすとき組 $(O, \to, \circ)$ を**弱い圏**とよぶ.

射の合成 $\forall a,\ b,\ c \colon O\ \forall f : a \to b\ \forall g \colon b \to c\ g \circ f : a \to c$,

結合律 $\forall a,\ b,\ c,\ d \colon O\ \forall f : a \to b\ \forall g \colon b \to c\ \forall h \colon c \to d$
$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$,

恒等射の存在 $\forall a \colon O\ \exists i \colon a \to a\ \forall b \colon O$
$((\forall f : a \to b\ f \circ i = f) \wedge (\forall g \colon b \to a\ i \circ g = g))$,

弱い圏

弱い圏の射に始域と終域を組として情報を加えると, 圏を構成できます.

定理

弱い圏 $(O, \to, \circ)$ について

$$f\colon a \to' b :\Leftrightarrow \exists g\colon a \to b\ f = \langle g, a, b\rangle$$

$$\langle g, b, c\rangle \circ' \langle f, a, b\rangle := \langle g \circ f, a, c\rangle$$

とおくと $(O, \to', \circ')$ は圏.

ここでは, 上記の操作を**有向グラフ化**とよびます.

集合の圏

- $(\mathbf{V}, \to_{\text{写像}}, \circ_{\text{写像}})$ は弱い圏.
- $(\mathbf{V}, \to_{\text{写像}}, \circ_{\text{写像}})$ を有向グラフ化をした $(\mathbf{V}, \to'_{\text{写像}}, \circ'_{\text{写像}})$ は圏.
  $(\mathbf{V}, \to'_{\text{写像}}, \circ'_{\text{写像}})$ を集合の圏 **Set** とよぶ.

圏の注意点

- **疑問** $f\colon a \to b$ と書いてあったら, a と b の間の射は 1 つだけですか?
答え f が変数なら違います. 任意で書いているだけで, 射の個数はわかりません. たとえば $f\colon \{0\} \to_{写像} \{0,1\}$ と書かれていたら $f = \{\langle 0,0\rangle\}$, $\{\langle 0,1\rangle\}$ ですが, どちらかは決めていません.
- **疑問** $f\colon a \to b$ は写像ですか? 要素 $x \in a$ をとって値 $f(x)$ を考えていいですか?
答え 一般にはできません. 射が写像でない圏もあるので, 射が写像でないならできません.

恒等射

定理

圏または弱い圏 $(O, \to, \circ)$ について
$\forall a \colon O\ \exists! i \colon a \to a\ \forall b \colon O\ ((\forall f \colon a \to b\ f \circ i = f) \wedge (\forall g \colon b \to a\ i \circ g = g))$.

証明. (存在) $a \colon O$ とすると定義より

$$\exists i \colon a \to a\ \forall b \colon O\ ((\forall f \colon a \to b\ f \circ i = f) \wedge (\forall g \colon b \to a\ i \circ g = g)).$$

(一意性)

$$j \colon a \to a, \forall b \colon O\ ((\forall f \colon a \to b\ f \circ j = f) \wedge (\forall g \colon b \to a\ j \circ g = g))$$

とすると $i = i \circ j = j$. □

上記のただ 1 つ存在する i を**恒等射 (identity morphism)** とよびます.

定義

圏または弱い圏 $(O, \to, \circ)$ について
$\forall a \colon O\ (\mathrm{id}_a^{(O,\to,\circ)} \colon a \to a \wedge$
$\forall b \colon O\ ((\forall f \colon a \to b\ f \circ \mathrm{id}_a^{(O,\to,\circ)} = f) \wedge (\forall g \colon b \to a\ \mathrm{id}_a^{(O,\to,\circ)} \circ g = g)))$.

恒等射

※ 普通 $\mathrm{id}_a^{(O,\to,\circ)}$ は id_a と書きますが，ここでは省略しません．

例

- 集合 a について $\mathrm{id}_a^{(\mathbf{V},\to_{写像},\circ_{写像})} = \mathrm{id}_a^{写像}$.
- 集合 a について $\mathrm{id}_a^{(\mathbf{V},\to'_{写像},\circ'_{写像})} = \langle \mathrm{id}_a^{写像}, a, a\rangle$.
- 弱い圏 $(O,\to,\circ)$ と $a\colon O$ について $\mathrm{id}_a^{(O,\to',\circ')} = \langle \mathrm{id}_a^{(O,\to,\circ)}, a, a\rangle$.

始域, 終域

射の始域と終域をみない方がよいときがあるので, 射であることを次のように定義します.

定義

論理式 $a\colon O, f : a \to b$ について

$$f : \mathrm{Mor}(O, \to) :\Leftrightarrow \exists a,\ b\colon O\ f : a \to b.$$

定理

論理式 $a\colon O, f : a \to b$ について, 始域と終域の一意性

$$\forall a,\ b,\ c,\ d\colon O\ \forall f : a \to b\ (f : c \to d \Rightarrow a = c \land b = d)$$

をみたすなら次が成り立つ.

1. $\forall f : \mathrm{Mor}(O, \to)\ \exists! a\colon O\ \exists b\colon O\ f : a \to b.$
2. $\forall f : \mathrm{Mor}(O, \to)\ \exists! b\colon O\ \exists a\colon O\ f : a \to b.$

始域, 終域

定義

論理式 $a\colon O, f : a \to b$ について, 始域と終域の一意性

$$\forall a,\ b,\ c,\ d\colon O\ \forall f : a \to b\ (f : c \to d \Rightarrow a = c \wedge b = d)$$

をみたすとき**始域 (domain, source)** $\mathrm{dom}_{(O,\to)}$ と**終域 (codomain, target)** $\mathrm{cod}_{(O,\to)}$ を次のように定義する.

1. $\forall f : \mathrm{Mor}(O, \to)\ (\mathrm{dom}_{(O,\to)}(f)\colon O \wedge \exists b\colon O\ f : \mathrm{dom}_{(O,\to)}(f) \to b)$.
2. $\forall f : \mathrm{Mor}(O, \to)\ (\mathrm{cod}_{(O,\to)}(f)\colon O \wedge \exists a\colon O\ f : a \to \mathrm{cod}_{(O,\to)}(f))$.

※ 普通 $\mathrm{dom}_{(O,\to)}$ は dom, $\mathrm{cod}_{(O,\to)}$ は cod と書きますが, ここでは省略しません.

※ 始域と終域の定義に合成 $\circ$ は関係ないので, 定義から変数を減らせます.

例

弱い圏 $(O, \to, \circ)$ と $a,\ b\colon O,\ f : a \to b$ について
$\mathrm{dom}_{(O,\to')}(\langle f, a, b\rangle) = a,\ \mathrm{cod}_{(O,\to')}(\langle f, a, b\rangle) = b$.

関手

2つの圏について, 対象, 射, 合成, 恒等射を保存する対応を関手といいます.

定義

圏 $(O_0, \to_0, \circ_0), (O_1, \to_1, \circ_1)$ と項 $F_0(a), F_0(f)$ について**関手 (functor)** $(F_0, F_1)\colon (O_0, \to_0, \circ_0) \to_{\text{関手}} (O_1, \to_1, \circ_1)$ を次のように定義する.

- **対象の保存** $\forall a\colon O_0\ F_0(a)\colon O_1,$
- **射の保存** $\forall a,\ b\colon O_0\ \forall f\colon a \to_0 b\ F_1(f)\colon F_0(a) \to_1 F_0(b),$
- **合成の保存** $\forall a,\ b,\ c\colon O_0\ \forall f\colon a \to_0 b\ \forall g\colon b \to_0 c$
  $F_1(g \circ_0 f) = F_1(g) \circ_1 F_1(f),$
- **恒等射の保存** $\forall a\colon O_0\ F_1(\mathrm{id}_a^{(O_0, \to_0, \circ_0)}) = \mathrm{id}_{F_0(a)}^{(O_1, \to_1, \circ_1)}.$

F_0 を**対象関数 (object function)**, F_1 を**射関数 (arrow function)** とよぶ.

関手

疑問 関手は $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ のように書いていいですか?
答え はい. 省略とわかって書くなら大丈夫です.
ただし, たとえば恒等射の保存を

$$F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$$

のように書いてあることが多いですが, 一般に, 左辺の id と右辺の id は異なります. また左辺の F は射関数で, 右辺の F は対象関数で, 異なります.

弱い圏と圏の違い

疑問 圏の定義に始域と終域の一意性は必要なのか? 弱い圏で十分ではないか?
答え 弱い圏も有用です. 実際, 弱い圏を調べてから, 有向グラフ化した圏を調べることが多いと感じます.
ただし, 弱い圏では hom 関手が**構成できません**. 米田の補題などの重要な定理が成り立たなくなります.

弱い圏と圏の違い

ウソ

$(O, \to, \circ)$ を弱い圏, $a\colon O$ とする.
$x\colon O$ について **hom 集合**を次で定義する.

$$\mathrm{hom}(a, x) := \{f \mid f\colon a \to x\}.$$

射 $f\colon x \to y$ に写像 $\mathrm{hom}^{写像}(a, f)\colon \mathrm{hom}(a, x) \to_{写像} \mathrm{hom}(a, y)$ を次で定義する.

$$\forall g \in \mathrm{hom}(a, x)\ \mathrm{hom}^{写像}(a, f)(g) := f \circ g.$$

このとき

$$(\mathrm{hom}(a, -), \mathrm{hom}^{写像}(a, -))\colon (O, \to, \circ) \to_{関手} (\mathbf{V}, \to_{写像}, \circ_{写像}).$$

well-defined. $f\colon x \to y$ とする. $g \in \mathrm{hom}(a, x)$ とすると $g\colon a \to x$.
$f \circ g\colon a \to y$ より $f \circ g \in \mathrm{hom}(a, y)$.

弱い圏と圏の違い

前述の説明には誤りが 2 つあります.

1. 一般に $\mathrm{hom}(a,x) := \{f \mid f\colon a \to x\}$ は $f\colon a \to x$ の変数 f について小さくないと定義できません.
2. 一般に $\mathrm{hom}^{\text{写像}}(a,f)$ は, f の始域 x と終域 y が一意でないため, $\mathrm{hom}(a,x)$ と $\mathrm{hom}(a,y)$ が定まりません.

定義を展開すると次のようになります.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{hom}^{\text{写像}}(a,f)\\
&= \{p \mid \exists g \in \mathrm{hom}(a,x)\ \exists h \in \mathrm{hom}(a,y)\ (p = \langle g,h\rangle \wedge f \circ g = h)\}\\
&= \{p \mid \exists g\colon a \to x\ (f \circ g\colon a \to y \wedge p = \langle g, f \circ g\rangle)\}
\end{aligned}
$$

左辺の変数は a, f ですが, 右辺の変数は a, f, x, y ですから, 変数の数が合っていません

関手の有向グラフ化

定理

圏 $(O_0, \to_0, \circ_0)$ と弱い圏 $(O_1, \to_1, \circ_1)$ と関手
$(F_0, F_1)\colon (O_0, \to_0, \circ_0) \to_{関手} (O_1, \to_1, \circ_1)$ について

$$F_1'(f) := \langle F_1(f), F_0(\mathrm{dom}_{(O,\to)}(x)), F_0(\mathrm{cod}_{(O,\to)}(y))\rangle$$

とおくと $(F_0, F_1')\colon (O_0, \to_0, \circ_0) \to_{関手} (O_1, \to_1', \circ_1')$.

定理

弱い圏 $(O_0, \to_0, \circ_0)$, $(O_1, \to_1, \circ_1)$ と関手
$(F_0, F_1)\colon (O_0, \to_0, \circ_0) \to_{関手} (O_1, \to_1, \circ_1)$ について

$$F_1''(\langle f, x, y\rangle) := \langle F_1(f), F_0(x), F_0(y)\rangle$$

とおくと $(F_0, F_1'')\colon (O_0, \to_0', \circ_0') \to_{関手} (O_1, \to_1', \circ_1')$.

弱い圏と圏の違い

hom 関手の説明を修正します.

定義

圏, または弱い圏 $(O, \to, \circ)$ が次をみたすとき**局所小, 局所的に小さい (locally small)** とよぶ.

$$\forall a,\ b\colon O\ \exists h \forall f\colon a \to b\ f \in h.$$

※ 文献によっては局所小圏を圏と定義していることもあります.

定義

局所的に小さい圏, または弱い圏 $(O, \to, \circ)$ と対象 $a,\ b\colon O$ について **hom 集合 (hom-set)** を次で定義する.

$$\mathrm{hom}_{\to}(a, b) := \{f \mid f\colon a \to b\}.$$

※ 普通 $\mathrm{hom}_{\to}(a, b)$ は $\mathrm{hom}(a, b)$ と書きます.

hom 関手

圏で話をまとめるなら $(\mathbf{V}, \to_{\text{写像}}, \circ_{\text{写像}})$ ではなく，$(\mathbf{V}, \to'_{\text{写像}}, \circ'_{\text{写像}})$ に有向グラフ化する必要があります．

定理

$(O, \to, \circ)$ を局所小圏，$a \colon O$ とする．
射 $f \colon \mathrm{Mor}(O, \to)$ に写像
$\hom^{\text{写像}}_{(O,\to,\circ)}(a, f) \colon \hom_{\to}(a, \mathrm{dom}_{(O,\to)}(f)) \to_{\text{写像}} \hom_{\to}(a, \mathrm{cod}_{(O,\to)}(f))$
を次で定義する．

$$\forall g \in \hom_{\to}(a, \mathrm{dom}_{(O,\to)}(f))\ \hom^{\text{写像}}_{(O,\to,\circ)}(a, f)(g) := f \circ g.$$

射関数を次で定義する．$\hom'^{\text{写像}}_{(O,\to,\circ)}(a, f)$
$:= \langle \hom^{\text{写像}}_{(O,\to,\circ)}(a, f), \hom_{\to}(a, \mathrm{dom}_{(O,\to,\circ)}(f)), \hom_{\to}(a, \mathrm{cod}_{(O,\to,\circ)}(f)) \rangle.$
このとき

$$(\hom(a, -), \hom'^{\text{写像}}_{(O,\to,\circ)}(a, -)) \colon (O, \to, \circ) \to_{\text{関手}} (\mathbf{V}, \to'_{\text{写像}}, \circ'_{\text{写像}}).$$

hom 関手

well-defined. $f\colon \mathrm{Mor}(O,\to)$ とする．$g \in \mathrm{hom}_{\to}(a, \mathrm{dom}_{(O,\to)}(f))$ とすると $g\colon a \to \mathrm{dom}_{(O,\to)}(f)$. $f \circ g\colon a \to \mathrm{cod}_{(O,\to)}(f)$ より $f \circ g \in \mathrm{hom}_{\to}(a, \mathrm{cod}_{(O,\to)}(f))$.
[目標] 次を示す.

$$(\mathrm{hom}(a,-), \mathrm{hom}^{\text{写像}}_{(O,\to,\circ)}(a,f))\colon (O,\to,\circ) \to_{\text{関手}} (\mathbf{V}, \to_{\text{写像}}, \circ_{\text{写像}}).$$

対象の保存. 対象 $x\colon O$ について $\mathrm{hom}_{\to}(a,x)\colon \mathbf{V}$.
射の保存. $x,\ y\colon O,\ f\colon x \to y$ とすると定義より

$$\mathrm{hom}^{\text{写像}}_{(O,\to,\circ)}(a,f)\colon \mathrm{hom}_{\to}(a, \mathrm{dom}_{(O,\to)}(f)) \to_{\text{写像}} \mathrm{hom}_{\to}(a, \mathrm{cod}_{(O,\to)}(f)).$$

始域, 終域の定義より

$$\mathrm{hom}^{\text{写像}}_{(O,\to,\circ)}(a,f)\colon \mathrm{hom}_{\to}(a,x) \to_{\text{写像}} \mathrm{hom}_{\to}(a,y).$$

hom 関手

合成の保存. $x,\ y,\ z\colon O,\ f\colon x\to y,\ g\colon y\to z$ とする. $h\in\mathrm{hom}_{\to}(a,x)$ とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{hom}^{写像}_{(O,\to,\circ)}(a,g\circ f)(h)&=(g\circ f)\circ h\\&=g\circ(f\circ h)\\&=\mathrm{hom}^{写像}_{(O,\to,\circ)}(a,g)(f\circ h)\\&=\mathrm{hom}^{写像}_{(O,\to,\circ)}(a,g)(\mathrm{hom}^{写像}_{(O,\to,\circ)}(a,f)(h))\\&=\mathrm{hom}^{写像}_{(O,\to,\circ)}(a,g)\circ_{写像}\mathrm{hom}^{写像}_{(O,\to,\circ)}(a,f)(h).\end{aligned}$$

よって $\mathrm{hom}^{写像}_{(O,\to,\circ)}(a,g\circ f)=\mathrm{hom}^{写像}_{(O,\to,\circ)}(a,g)\circ_{写像}\mathrm{hom}^{写像}_{(O,\to,\circ)}(a,f)$.

hom 関手

恒等射の保存. $x\colon O$ とする. $f \in \mathrm{hom}_{\to}(a, x)$ とすると

$$\mathrm{hom}^{写像}_{(O,\to,\circ)}(a, \mathrm{id}^{(O,\to,\circ)}_x)(f) = \mathrm{id}^{(O,\to,\circ)}_x \circ f = f = \mathrm{id}^{写像}_{\mathrm{hom}_{\to}(a,x)}(f).$$

よって $\mathrm{hom}^{写像}_{(O,\to,\circ)}(a, \mathrm{id}^{(O,\to,\circ)}_x) = \mathrm{id}^{写像}_{\mathrm{hom}_{\to}(a,x)} = \mathrm{id}^{(\mathbf{V},\to_{写像},\circ_{写像})}_{\mathrm{hom}_{\to}(a,x)}$.

有向グラフ化. ゆえに

$$(\mathrm{hom}(a,-), \mathrm{hom}^{写像}_{(O,\to,\circ)}(a, f))\colon (O, \to, \circ) \to_{関手} (\mathbf{V}, \to_{写像}, \circ_{写像}).$$

関手の終域を有向グラフ化して

$$(\mathrm{hom}(a,-), \mathrm{hom}'^{写像}_{(O,\to,\circ)}(a, f))\colon (O, \to, \circ) \to_{関手} (\mathbf{V}, \to'_{写像}, \circ'_{写像}).$$

$\square$

局所小ではない圏

疑問 局所小ではない圏はあるのか?
答え はい．まず, 一般化したモノイドから圏を作る方法があります．ここではモノイドクラスとよぶことにします.

定義

論理式 $a\colon M$ と項 $a * b$ について, 次をみたすとき, $(M, *)$ を**モノイドクラス**とよぶ.

閉性 $\forall a,\ b\colon M\ \ a * b\colon M$

結合律 $\forall a,\ b,\ c\colon M\ \ (a * b) * c = a * (b * c)$

単位元の存在 $\exists e\colon M\ \forall a\colon M\ \ (a * e = a = e * a)$

局所小ではない圏

適当な 1 点を対象, モノイドクラスの $f\colon M$ を射, 合成をモノイドクラスの演算 $*$ と考えると圏になります.

定理

モノイドクラス $(M,*)$ と集合 p について

$$f\colon a \to_M b :\Leftrightarrow f\colon M \land a = b = p$$

と定義すると $(\in \{p\}, \to_M, *)$ は圏. さらに次が成り立つ.

$$\forall f (f\colon p \to_M p \Leftrightarrow f\colon M).$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{p} \arrow[loop right] \arrow[loop right, distance=3em] & \cdots \end{tikzcd}$$

局所小ではない圏

真クラスになるモノイドクラスを考えると, 局所小でない圏が構成できます.

例

- 集合全体と和集合 $(\mathbf{V}, \cup)$ はモノイドクラス. 集合全体は真クラスより $(\in \{\emptyset\}, \to_{\mathbf{V}}, \cup)$ は局所小でない圏.
- 順序数とたし算, 順序数とかけ算, 基数とたし算, 基数とかけ算などもモノイドクラス. 順序数全体, 基数全体も真クラスより, 上記の定理から局所小でない圏が構成できる.

弱い圏の例

疑問 局所小かつ弱い圏で, hom 関手が定義できない例はありますか?
答え はい. まず, 反例として使いやすい弱い圏を構成します.

例

対象 $a \in \{1, 2\} \Leftrightarrow a = 1 \vee a = 2$

射 $f\colon a \to_{\mathcal{B}} b \Leftrightarrow f = 0 \wedge a = 1 \wedge b = 1 \vee f = 0 \wedge a = 2 \wedge b = 2$

合成 $0 \circ_{\mathcal{B}} 0 = 0.$

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left, "0"] & 2 \arrow[loop right, "0"]
\end{tikzcd}
$$

$(\in \{1, 2\}, \to_{\mathcal{B}}, \circ_{\mathcal{B}})$ は局所小かつ弱い圏だが, 圏でない.

$(\in \{1, 2\}, \to_{\mathcal{B}}, \circ_{\mathcal{B}})$ では, hom 関手が構成できません.

弱い圏の例

例

項 H について

$$\neg(\mathrm{hom}_{\to_{\mathcal{B}}}(1,-), H)\colon (\in\{1,2\}, \to_{\mathcal{B}}, \circ_{\mathcal{B}}) \to_{関手} (\mathbf{V}, \to_{写像}, \circ_{写像}).$$

証明. $(\mathrm{hom}_{\to_{\mathcal{B}}}(1,-), H)\colon (\in\{1,2\}, \to_{\mathcal{B}}, \circ_{\mathcal{B}}) \to_{関手} (\mathbf{V}, \to_{写像}, \circ_{写像})$ とする.

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}^{写像}_{\{0\}} &= \mathrm{id}^{(\mathbf{V}, \to_{写像}, \circ_{写像})}_{\mathrm{hom}_{\to_{\mathcal{B}}}(1,1)} \\
&= H(\mathrm{id}^{(\in\{1,2\}, \to_{\mathcal{B}}, \circ_{\mathcal{B}})}_{1}) \\
&= H(0) \\
&= H(\mathrm{id}^{(\in\{1,2\}, \to_{\mathcal{B}}, \circ_{\mathcal{B}})}_{2}) \\
&= \mathrm{id}^{(\mathbf{V}, \to_{写像}, \circ_{写像})}_{\mathrm{hom}_{\to_{\mathcal{B}}}(1,2)} \\
&= \mathrm{id}^{写像}_{\emptyset}.
\end{aligned}$$

写像の定義域は一意より $\{0\} = \emptyset$ となり $\{0\} \neq \emptyset$ と矛盾. □

弱い圏の例

例

項 H について

$$\neg(\mathrm{hom}_{\to_{\mathcal{B}}}(1,-),H)\colon(\in\{1,2\},\to_{\mathcal{B}},\circ_{\mathcal{B}})\to_{関手}(\mathbf{V},\to'_{写像},\circ'_{写像}).$$

証明. $(\mathrm{hom}_{\to_{\mathcal{B}}}(1,-),H)\colon(\in\{1,2\},\to_{\mathcal{B}},\circ_{\mathcal{B}})\to_{関手}(\mathbf{V},\to'_{写像},\circ'_{写像})$ とする.

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{id}^{写像}_{\{0\}},\{0\},\{0\}\rangle &= \mathrm{id}^{(\mathbf{V},\to'_{写像},\circ'_{写像})}_{\mathrm{hom}_{\to_{\mathcal{B}}}(1,1)}\\ &= H(\mathrm{id}^{(\in\{1,2\},\to_{\mathcal{B}},\circ_{\mathcal{B}})}_1)\\ &= H(0)\\ &= H(\mathrm{id}^{(\in\{1,2\},\to_{\mathcal{B}},\circ_{\mathcal{B}})}_2)\\ &= \mathrm{id}^{(\mathbf{V},\to'_{写像},\circ'_{写像})}_{\mathrm{hom}_{\to_{\mathcal{B}}}(1,2)}\\ &=\langle \mathrm{id}^{写像}_{\emptyset},\emptyset,\emptyset\rangle.\end{aligned}$$

よって $\{0\}=\emptyset$ となり $\{0\}\neq\emptyset$ と矛盾. $\square$

弱い圏の例

圏では恒等射と対象は 1 対 1 対応しますが, 弱い圏では異なります.

定理

圏 $(O, \to, \circ)$ について

$$\forall a,\ b\colon O\ (\mathrm{id}_a^{(O,\to,\circ)} = \mathrm{id}_b^{(O,\to,\circ)} \Rightarrow a = b).$$

例

$$1,\ 2 \in \{1, 2\},\ \mathrm{id}_1^{(\in\{1,2\},\to_{\mathcal{B}},\circ_{\mathcal{B}})} = 0 = \mathrm{id}_2^{(\in\{1,2\},\to_{\mathcal{B}},\circ_{\mathcal{B}})},\ 1 \neq 2.$$

自然変換

2 つの関手について，うつした行き先を保存する射の族を自然変換とよびます．

定義

圏 $(O_0, \to_0, \circ_0), (O_1, \to_1, \circ_1)$ と関手 $(F_0, F_1),\ (G_0, G_1)\colon (O_0, \to_0, \circ_0) \to_{関手} (O_1, \to_1, \circ_1)$ と項 η_a について，**自然変換 (natural transformation)** $\eta\colon (F_0, F_1) \Rightarrow (G_0, G_1)\colon (O_0, \to_0, \to_1, \circ_1)$ を次のように定義する．

- $\forall a\colon O_0\ \eta_a\colon F_0(a) \to_1 G_0(a)$,
- $\forall a,\ b\colon O_0\ \forall f : a \to_0 b\ \eta_b \circ_1 F_1(f) = G_1(f) \circ_1 \eta_a$.

※ 普通は $\eta\colon F \Rightarrow G$ と書きます．

関手圏の注意点

対象を関手, 射を自然変換, 合成は自然変換を合成とすると, 関手圏とよばれる圏が作れます. ただ, hom 関手と同様に, 大きさや有向グラフに注意しなければいけません.

ウソ

圏 $(O_0, \to_0, \circ_0), (O_1, \to_1, \circ_1)$ について, 次のようにして圏が定義できる.

- **対象** $(F_0, F_1) \colon (O_0, \to_0, \circ_0) \to_{関手} (O_1, \to_1, \circ_1)$,
- **射** $\eta \colon (F_0, F_1) \Rightarrow (G_0, G_1) \colon (O_0, \to_0, \to_1, \circ_1)$,
- **合成** $\forall a \colon O_0\ (\eta \circ_{(O_0, \circ_1)} \theta)_a := \eta_a \circ_1 \theta_a$.

関手圏の注意点

- $\forall, \exists$ は集合だけに使えます. 圏の定義では $\forall a \colon O \cdots$ や $\forall f : a \to b \cdots$ と書いている部分がありますから, 前述の定義では**関手と自然変換が論理式, 項**で動いてしまうので, 文法エラーです.
- **自然変換の始域と終域の一意性が示せません**. 有向グラフ化が必要です.

関手圏の調整のアイディア

1. $(F_0, F_1)\colon (O_0, \to_0, \circ_0) \to_{関手} (O_1, \to_1, \circ_1)$ を集合にしたい.
2. 1 変数に情報をまとめるので $a = \langle F_0, F_1\rangle$ の形になる.
3. 順序対 $\langle F_0, F_1\rangle$ の要素は集合で，$F_0(a)$，$F_1(f)$ は項だから，F_0，F_1 は写像で定義するのがよさそう.
4. 写像 F_0，F_1 の定義域は集合なので O_0，$\mathrm{Mor}(O_0, \to_0)$ は小さい，つまり，集合のはず.
5. 射の情報だけに絞るなら $\to_0 \subseteq \mathrm{Mor}(O_0, \to_0) \times (O_0 \times O_0)$，
   合成の情報だけに絞るなら
   $\circ_0 \subseteq (\mathrm{Mor}(O_0, \to_0) \times \mathrm{Mor}(O_0, \to_0)) \times \mathrm{Mor}(O_0, \to_0)$.
   つまり $\to_0$ は集合，$\circ_0$ は写像になりそうだから，$O, \to, \circ$ が集合になる圏を定義したい → **小圏**.
6. O_1 は $\exists A\ F_0\colon O_0 \to_{写像} A$ と $\forall a \in O_0\ F_0(a)\colon O_1$ とすれば，大きくても大丈夫. $\to_1, \circ_1$ も大きくても大丈夫.
7. 自然変換もほぼ同様.

小圏

定義

集合 $O, \to$ について

$$\mathrm{mor}(O, \to) := \{f \mid \exists a,\ b \in O\ \langle f, a, b\rangle \in \to\}$$

定義

集合の組 $(O, \to, \circ)$ が次をみたすとき**小圏 (small category)** とよぶ.

- $\forall p \in \to\ \ \exists f \exists a,\ b \in O\ \ p = \langle f, a, b\rangle$,
- $\circ\colon \{c \mid \exists a,\ b,\ c \in O\ \exists f \exists g(\langle f, a, b\rangle, \langle g, b, c\rangle \in \to \wedge c = \langle g, f\rangle)\} \to_{\text{写像}} \mathrm{mor}(O, \to)$
- $(\in O, \langle , , \rangle \in \to, \circ(\langle , \rangle))$ は圏.

$\langle f, a, b\rangle \in \to \Leftrightarrow f\colon a \to b,\ \circ(\langle g, f\rangle) = g \circ f$ と略記すれば, 小圏も圏のように使えます.

関手圏

関手圏を定義する．まず，弱い圏になるように対象，射，合成を定義する．

定義

小圏 $(O_0, \to_0, \circ_0)$ と圏 $(O_1, \to_1, \circ_1)$ について，対象，射，合成を定義する．

- **対象** $f\colon (O_0, \to_0, \circ_0) \to_{\text{関手圏}} (O_1, \to_1, \circ_1) :\Leftrightarrow$ $\exists F_0 \exists F_1 (f = \langle F_0, F_1\rangle \wedge (\exists A\ F_0\colon O_0 \to_{\text{写像}} A) \wedge$ $(\exists B\ F_1\colon \mathrm{mor}(O_0, \to) \to_{\text{写像}} B) \wedge$ $(F_0(), F_1())\colon (\in O_0, \langle,,\rangle \in \to_0, \circ_0(\langle,\rangle)) \to_{\text{関手}} (O_1, \to_1, \circ_1))$,
- **射** $\eta\colon f \Rightarrow_{\text{関手圏}} g\colon (O_0, \to_0, \to_1, \circ_1) :\Leftrightarrow$ $\exists F_0 \exists F_1 \exists G_0 \exists G_1 (f = \langle F_0, F_1\rangle \wedge g = \langle G_0, G_1\rangle \wedge (\exists C\ \eta\colon O_0 \to_{\text{写像}} C) \wedge$ $\eta()\colon (F_0(), F_1()) \Rightarrow (G_0(), G_1())\colon (\in O_0, \langle,,\rangle \in \to_0, \to_1, \circ_1)$,
- **合成** 射 η, θ に対して次をみたす写像 $\eta \circ_{(O_0, \circ_1)} \theta$, $(\exists C\ \eta \circ_{(O_0, \circ_1)} \theta\colon O_0 \to_{\text{写像}} C) \wedge \forall a\colon O_0\ (\eta \circ_{(O_0, \circ_1)} \theta)(a) := \eta(a) \circ_1 \theta(a)$.

関手圏

定理

小圏 $(O_0, \to_0, \circ_0)$ と圏 $(O_1, \to_1, \circ_1)$ について

1. $((O_0, \to_0, \circ_0) \to_{\text{関手圏}} (O_1, \to_1, \circ_1), \Rightarrow_{\text{関手圏}} : (O_0, \to_0, \to_1, \circ_1), \circ_{(O_0, \circ_1)})$ は弱い圏.
2. (1) の弱い圏を有向グラフ化した $((O_0, \to_0, \circ_0) \to_{\text{関手圏}} (O_1, \to_1, \circ_1), \Rightarrow'_{\text{関手圏}} : (O_0, \to_0, \to_1, \circ_1), \circ'_{(O_0, \circ_1)})$ は圏.

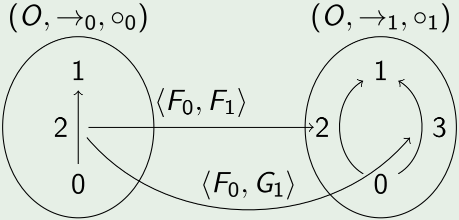
(2) の圏を**関手圏 (functor category)** とよぶ.
※普通は $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ などと書きます.

関手圏の注意

- **疑問** 写像の終域に∃がついているけど大丈夫? 有向グラフ化する前の関手圏の合成 $\circ_{(O_0,\circ_1)}$ は well-defined? 恒等射の存在は示せる?
答え はい. 定義域の O_0 が集合なので, 置換公理図式を使えば示せます. また O_0 が有限なら置換公理図式なしでも示せます.
- **疑問** 有向グラフ化する必要はある?
答え はい.

関手圏の注意

例



$\circ_0$	0	2	1
0	0		
2	2		
1		2	1

$\circ_1$	0	2	3	1
0	0			
2	2			
3	3			
1		2	3	1

2 つの異なる関手 $\langle F_0, F_1\rangle$, $\langle F_0, G_1\rangle$ は恒等射が同じになる.

関手圏の注意

まじめに書いたバージョン

- $O := \{0, 1\}$,
- $\to_0 := \{\langle 0, 0, 0\rangle, \langle 2, 0, 1\rangle, \langle 1, 1, 1\rangle\}$,
- $\circ_0 := \{\langle\langle 0, 0\rangle, 0\rangle, \langle\langle 1, 1\rangle, 1\rangle, \langle\langle 2, 0\rangle, 2\rangle, \langle\langle 1, 2\rangle, 2\rangle\}$,
- $\to_1 := \{\langle 0, 0, 0\rangle, \langle 2, 0, 1\rangle, \langle 3, 0, 1\rangle, \langle 1, 1, 1\rangle\}$,
- $\circ_1 :=$ $\{\langle\langle 0, 0\rangle, 0\rangle, \langle\langle 1, 1\rangle, 1\rangle, \langle\langle 2, 0\rangle, 2\rangle, \langle\langle 1, 2\rangle, 2\rangle, \langle 3, 0\rangle, 3\rangle, \langle\langle 1, 3\rangle, 3\rangle\}$,
- $F_0 := \mathrm{id}_O^{\text{写像}} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$,
- $F_1 := \mathrm{id}_{\mathrm{mor}(O, \to_0)}^{\text{写像}} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$,
- $G_1 := \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$,
- $\eta := \mathrm{id}_O^{\text{写像}} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$,

とおく.

関手圏の注意

まじめに書いたバージョンの続き

$(O, \to_0, \circ_0), (O, \to_1, \circ_1)$ は小圏で

$$\langle F_0, F_1\rangle \colon (O, \to_0, \circ_0) \to_{\text{関手圏}} (\in O, \langle , , \rangle \in \to_1, \circ_1(\langle , \rangle)),$$

$$\langle F_0, G_1\rangle \colon (O, \to_0, \circ_0) \to_{\text{関手圏}} (\in O, \langle , , \rangle \in \to_1, \circ_1(\langle , \rangle)),$$

$$\eta \colon \langle F_0, F_1\rangle \Rightarrow_{\text{関手圏}} \langle F_0, F_1\rangle \colon (O, \to_0, \langle , , \rangle \in \to_1, \circ_1(\langle , \rangle)),$$

$$\eta \colon \langle F_0, G_1\rangle \Rightarrow_{\text{関手圏}} \langle F_0, G_1\rangle \colon (O, \to_0, \langle , , \rangle \in \to_1, \circ_1(\langle , \rangle)),$$

だが $F_1 \neq G_1$ より $\langle F_0, F_1\rangle \neq \langle F_0, G_1\rangle$.

弱い圏の例の続き

圏で成り立つが, 弱い圏で成り立たない定理が他にもあります.

- 忠実充満かつ本質的全射である関手が, 圏同値にならないことがある.
- (未確認) 関手圏におけるカリー化が定義できないかも.
- (未確認) 直積とイコライザーをもつが完備にならないかも.

圏の注意

疑問 関手圏で小圏は気にしたくないし, 大きい圏に $\forall, \exists$ がつけられないのはイヤなので, 真クラスが使える集合論の NBG や MK で圏論をしたい.
答え NBG や MK では, $\forall, \exists$ は使いやすいと思います. ただ個人的には ZFC と大きな差はないように感じます. たとえば NGB で集合と集合全体は次のように定義されます.

$$x\colon \mathrm{set} :\Leftrightarrow \exists A\ x \in A,$$

$$\mathbf{V} := \{x\colon \mathrm{set} \mid x = x\}.$$

圏の定義は ZFC での小圏の定義をそのまま使います. 集合の定義から**対象と射は集合**になります. このとき関手圏 $\mathbf{V}^{\mathbf{V}}$ が作れるなら恒等関手 $\mathrm{Id}_{\mathbf{V}}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ は集合ですが, $\mathbf{V}$ が真クラスであることと矛盾します.
他にも $\mathbf{V}$ が真クラスなので順序対 $\langle \mathbf{V}, \to_{写像}, \circ_{写像} \rangle$ も作れません. よって圏の圏 **CAT** も作れません.

圏の注意

疑問 グロタンディーク宇宙 U を使えばいいのでは?
答え いいと思います. ただ, 使うなら相当な理由が必要だと思います.

- 随伴, 極限, 米田の補題などの初心者向けの内容では使わない.
- U は集合の基本的な操作で閉じている「集合」なので, U の外のことはわからない.
- 他のグロタンディーク宇宙 U' では U と性質が変わる.
- 強さ順に並べると次のようになる.
  U-小圏 $\Rightarrow$ 小圏 $\Rightarrow$ 局所小圏 $\Rightarrow$ 圏 $\Rightarrow$ 弱い圏.
  なので, 圏や弱い圏を先にする方がいいかなと思います.

論理と集合は大事

参考文献

[1] K. Kunen (藤田博司 訳), キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016.
[2] S. MacLane (三好博之/高木 理 訳), 圏論の基礎, 丸善出版, 2013.