

小中高生のころ習う前に気がついていたこと～
4次元における正多面体、微分積分学の基本定
理、ガウス＝ボンネの定理

沢沢弘昌（星くず算数・数学教室）

2026年3月20日

自己紹介と今回のお話のきっかけ

湧沢弘昌（ふちざわ・ひろまさ）

栃木県宇都宮市生まれ（50歳）

東大理学部数学科卒業、東大数理修士課程修了、博士課程単位取得退学（位相幾何学）

名古屋中学校・高等学校の数学科教諭をへて、4年前に独立
現在、星くず算数・数学教室の講師

昨年11月、長谷川浩司先生（東北大）とXでお話をされていて、私が幼稚園に上がる前、幼稚園、小中高生のころ考えていたこと（気がついていたこと）が、けっこうおもしろいのではないかという話になり、それらを長谷川先生のすすめで当教室のブログに書きました。現在、大小27本の記事になっています。そのうちから、本日はいくつかの話題についてお話しします。

目次

1. 短い導入（小学校、中学校のとき）
2. 4次元における立方体、正四面体（中学のとき）
3. 4次元における2直線の位置関係（中学のとき）
4. 微分積分学の基本定理（高校2年のとき）
5. ガウス=ボンネの定理（の一部）（高校2、3年のとき）

1. 短い導入（小学校、中学校のとき）

小学校の5年か6年のとき、担任の先生が、4つのものの並べ方を、黒板に樹形図でかかれました。

それを見ていて、それが、 $4 \times 3 \times 2 \times 1$ 通りであることに気づきました。

（現代の小学生も、この「4つのものの並べ方を樹形図にかく」のは6年生で習います。これが $4!$ 通りであることを習うのは高校での「数学A」においてです。）

このことに気づいた人が最初にやること：

5つのものの並べ方が、 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 通りだということになって、多くて驚いた。

そして、実際に5つの文字を並べてみて、本当に120通りあって再び驚いた。

このことに習う前に気づいていた人に自分以外で会ったことはないと思います。

円の方程式

中学のとき、家に旧式のパソコンがあり、プログラミングの初歩を覚えた私は、いろいろなことをプログラミングしていた。あるとき、画面に円をかいてみたくなった。三平方の定理を習っていたが、円の方程式を習っていなかった私は、自分で円の方程式を考えた。

円の方程式を習う前に見つけていた人にも今まで会ったことはないと思います。

(言われて発見した人は当教室に一人おられます。三平方の定理を知っていて「円の方程式を考えてごらん」と言われて思いつく人はそれなりにおられると思います。)

y を x の式で表したので、以下のように書いた。

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

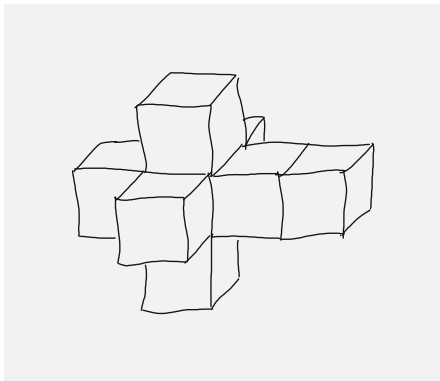
(半径を r と書いたのは当時の notation ではありません。当時の記号や用語はもう思い出せません。本日のお話を通して、notation は当時のものではありません。)

2. 4次元における立方体、正四面体（中学のとき）

4次元について、いつ認識したかどうしても思い出せません。ドラえもんの四次元ポケットは知っていました。漠然と、たて、よこ、高さ以外に、もうひとつ方向があるということだというのは知っていたと思います。おそらくは、子供向けの科学読み物等で知っていたのでしょう。（当時、インターネットや携帯電話等はありませんでした。）

家に「数・形」という図鑑があって、それに、4次元の立方体の展開図はかいてありました（以下の図）。

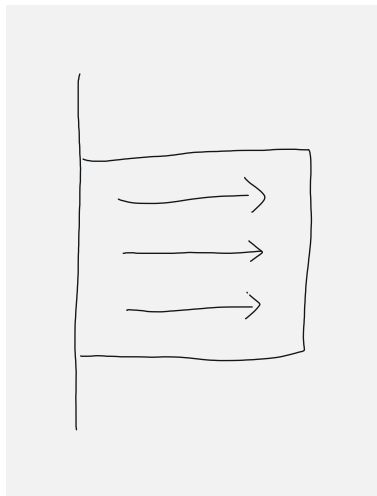
その図形そのものの絵はかいてありませんでした。「4次元だからかけない」と書いてありました。（いま考えるとかいてなくてよかったです。考えることができたからです。）



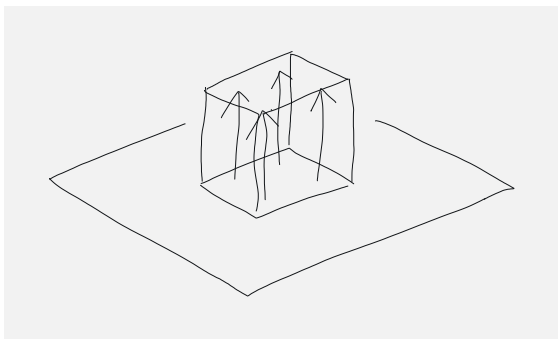
中学のとき、2次元における正方形、3次元における立方体に相当する4次元の図形について、しばらく考えていて、あるとき次のようにして、それがどういう図形か、分かったときがあります。

（当時、吹奏楽部に入ってフルートを吹いていましたが、家から徒歩1時間くらいにある、フルートの先生のお宅がある林の風景を思い出しますので、そのへんを歩いていて、考えていて、思いついたのだと思います。）

線分を、その線分を含む直線と違う方向（垂直な方向）に動かしてできる図形が正方形

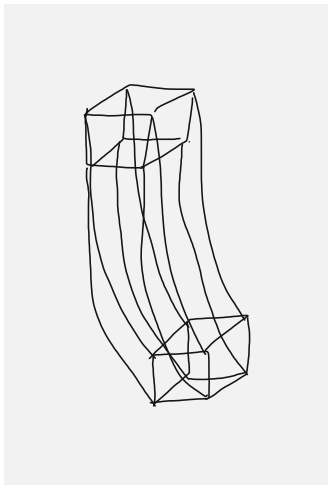


正方形を、その正方形を含む平面と違う方向（垂直な方向）に動かしてできる図形が立方体

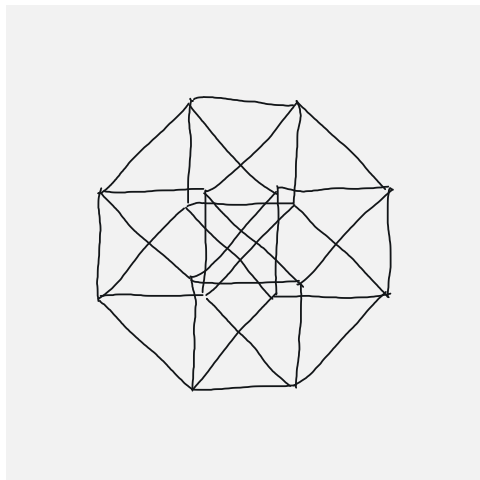


そうしたら、立方体を、その立方体を含む3次元の空間と違う方向（垂直な方向）に動かしてできる図形が、4次元の立方体ではないか！

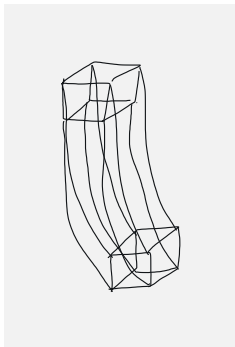
このとき「わかった！わかった！」と言いながら、夢中でかいた
絵は次のようなものでした。



そのあと、少し頭を整理させ、以下のようにかくようになりました。

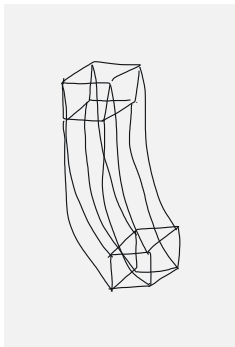


4次元における立方体の頂点の数は、以下のように数えられます。
「上の立方体」に頂点は8つ、「下の立方体」にも頂点は8つで、
全部で16個。



辺の数は以下のように数えられます。

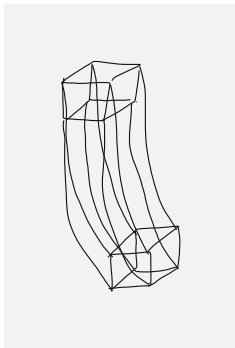
「上の立方体」に辺は12本、「下の立方体」にも辺は12本、立方体の8つの頂点が動いてできる辺が8本、すべてあわせて、 $12 + 12 + 8 = 32$ 本。



この図形にはいくつかの正方形があることが分かります。

正方形の数は以下のように数えられます。

「上の立方体」に正方形は6枚、「下の立方体」にも正方形は6枚、立方体の12本の辺が動いてできる正方形が12枚、あわせて、 $6 + 6 + 12 = 24$ 枚。



この図形はいくつかの立方体に囲まれていることも分かります。
立方体の数は以下のように数えられます。

「上の立方体」が1つ、「下の立方体」も1つ、立方体の6つの正方形が動いてできる立方体が6つ、ぜんぶで $1 + 1 + 6 = 8$ 個。



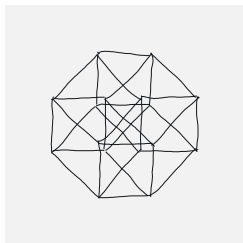
図鑑に載っていた展開図は、立方体8個からできていました。これもきちんと説明できます。

当時、非常におもしろかったのは、「4次元」というと、そのころ読んだ子供向けの科学読み物に書いてあるような感じだと、漠然とあるのかないのかわからないようなファンタジックなものに思えるけれども、よく考えると、存在するのであって、この4次元における立方体に相当する図形にしても、頂点の数にせよ、辺の数にせよ、はっきり定まっている、ということです。

(図鑑には「絵はかけない」と書いてあったのに、かけるわけですし。)

4次元の図形は、3次元の立方体に囲まれていたり、「切り口」が3次元的であったりすることになって、いかにも直感を裏切っていておかしいような気がするのに、よく考えると、整然とした世界が広がっていて、おかしくない、ということも、非常におもしろかったです。これ以降、4次元のことをしばらく考えるようになりました。

当時、これらのことはなかなか先生や友人に話して通じる内容ではなかったわけですが、高校1年のとき、数学の先生が「君のかいた通りだもんなあ」と言いながら、本で見つけたという以下の図を見せてくれました。

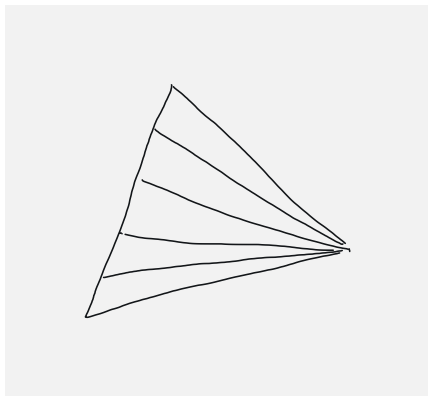


私は、自分のように考えれば、この図に行きつくのは当然なので、驚きませんでした。先生は、私のいう図形を、本で調べ、私のかいている図と同じものがかいてあったので、驚かれたのだと思います。

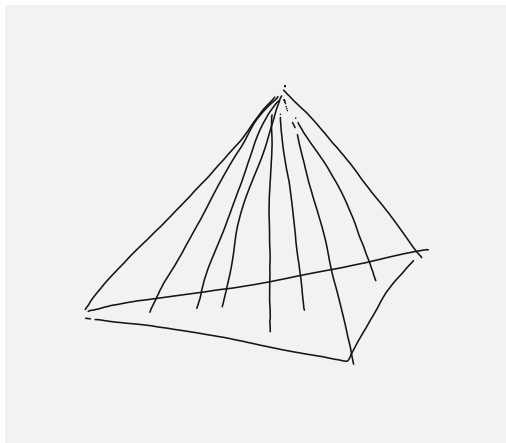
4次元における正四面体に相当する図形の存在

別のタイミングで、以下のことに気づきました。
以下の話は、「3.」で述べる、2直線の位置関係についての考えよりもあとの話です。

ある線分を含む直線上にない1点と、その線分上のすべての点を結んでできる図形が正三角形

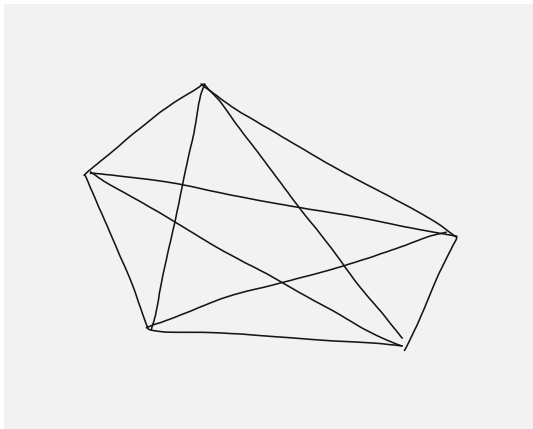


ある正三角形を含む平面上にない1点と、その正三角形上のすべての点を結んでできる図形が正四面体



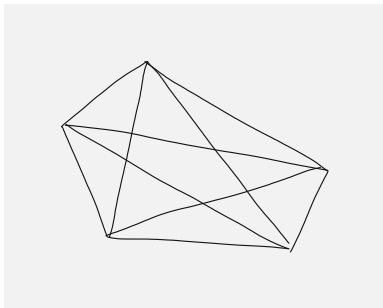
そうしたら、ある正四面体を含む3次元の空間上にない1点と、その正四面体上のすべての点を結んでできる4次元の図形があるではないか。

そう考えますと、これも4次元の正多面体の一種なのでした。



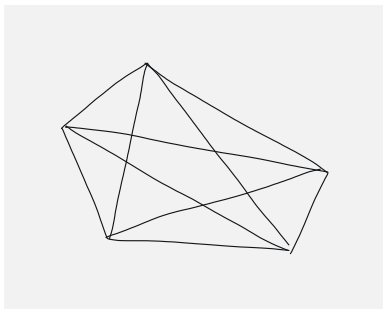
この図形の頂点の数を数えます。

「底面」に相当する正四面体に、頂点は4つあり、あと1つ新しい頂点があるので、 $4 + 1 = 5$ 個。



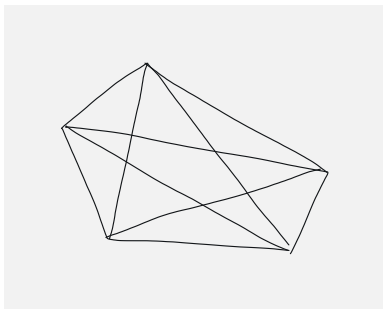
辺の数を数えます。

「底面」に相当する正四面体に、辺はすでに6つあり、頂点は4つある。4つの頂点と新しい頂点を結んでできる辺が4つあるので、すべてあわせて、 $6 + 4 = 10$ 本。



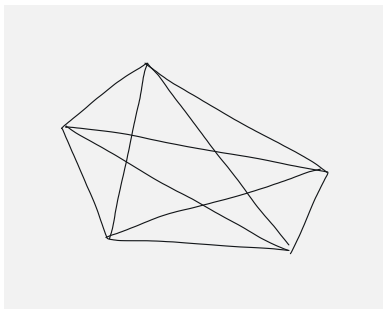
正三角形の数を数えます。

「底面」に相当する正四面体に、正三角形はすでに4つあり、辺は6つある。6つの辺と新しい頂点を結んでできる正三角形が6つあるので、あわせて、 $4 + 6 = 10$ 枚。



正四面体の数を数えます。

「底面」に相当する正四面体が1個あり、正四面体に面は4つあるので、その4つと新しい頂点を結んでできる正四面体があと4つあり、 $1 + 4 = 5$ 個。



これを見つけたときは、先ほどの立方体に相当する4次元の図形を見つけたときほどの興奮はありませんでした。だいたひ4次元について見通しが立っていたからだと思ひます。

この2種類の「4次元の正多面体」(立方体と正四面体)は、5次元に行っても、6次元に行っても、あることが分かりました。

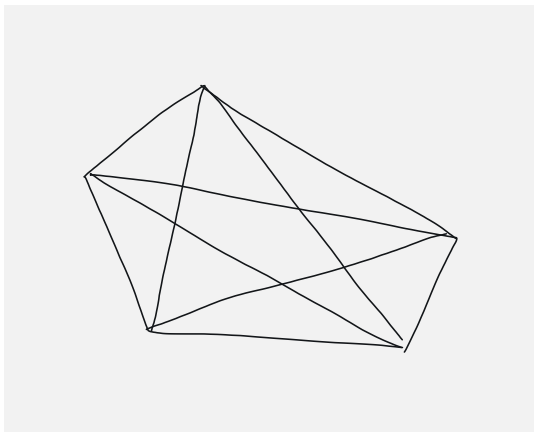
後者のような図形は、大学に行つて、単体 (simplex) と呼ぶということを知りました。(ただし単体は、各辺の長さが同じであるという条件はないわけですが。)

高校2年のとき、これらのことをレポートにまとめて高校に提出する機会がありました。そのとき、これらの図形の名前を考え出さねばなりませんでした。正多面体は、いくつかの面で囲まれた「体」なので、4次元では「正多体塊」と呼びました。いくつかの体で囲まれた（4次元の）かたまりだからです。以下、この呼び方を、本講演では使わせていただきます。

立方体に相当する図形は、立方体8つで囲まれているので「正八体塊」、正四面体に相当する図形は、正四面体5つで囲まれているので「正五体塊」と呼ぶことになります。

（そのレポートは残念ながら残っていません。少なくとも出て来ません。）

修士課程1年のときに、学部3年生のホモロジーの授業のTAをしていました（松本幸夫先生）。ある日の授業で松本先生は、4次元の図形も2次元の黒板にかけますよと言いながら、4単体の絵を以下のようにかかれました。



3. 4次元における2直線の位置関係（中学のとき）

これも中学時代の話です。先ほどの、4次元における立方体に相当する図形の発見より後、正四面体に相当する図形の発見よりも前のことです。以下のようなことを考えました。

平面上において、2直線の位置関係は、(1)ぴったり重なる、(2)1点で交わる、(3)平行、の3種類がある。3次元の空間においては、これに(4)ねじれの位置、が加わる。

4次元の空間において、2直線の位置関係は、これに何が加わるであろうか。

漠然と、4次元では「ハイパーねじれの位置」のようなものがあるのであろうと考えていました。

どれくらい考えたでしょうか。あるとき気づきました。

もう増えない！

これも、先ほど述べた、4次元における立方体に相当する図形の発見のときと同じくらい、大きな衝撃がありました。

自分では、2次元から3次元に行ったとき、2直線の位置関係は「ねじれの位置」が増えたように、3次元から4次元に行ったときも、2直線の位置関係は増えると思っていたので、その予想を裏切られたからです。

当時、考えた理屈は以下です。

直線は異なる2点で決まっている。平面は、同一直線上にない3点で決まっている。同じように考えると、3次元の空間は、同一平面上にない4点で決まっている。

2直線は（最大で）4点で決まっている。4点を通る3次元空間は、少なくとも1つ存在する。つまり、2直線は必ずある3次元空間に含まれている。

ということは、2直線の位置関係は、3次元空間であり得たもの以外に、もうないのだ。

この理屈は、おそらく当時、身近な人に言ってみたとと思いますが、通じる人はいなかったのだろうと思います。(私の中学は、普通の公立中学校です。)

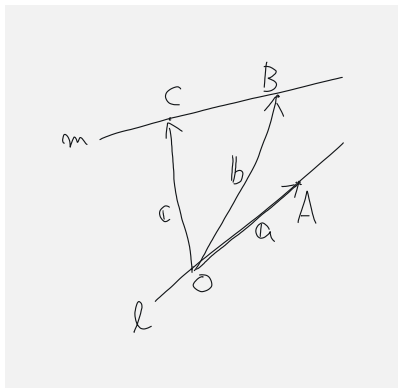
のちに大学で線形代数を習い、これらのことは体系的に説明がなされました。しかし、大学や大学院の仲間とこれらのことを話したことはないと思います。

30歳で中高の教員となり、46歳で独立しました。この話は、インターネット等でしてみても、なかなか伝わりません。

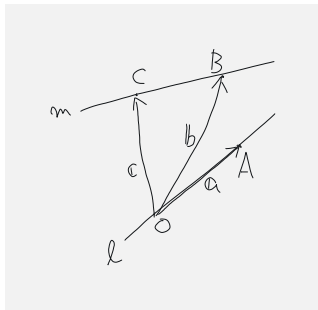
ただ、線形代数の初歩の知識があれば、伝わるはずですので、このたび、線形代数の初歩の知識を仮定して、説明を試みました。

その説明を、以下に書きます。

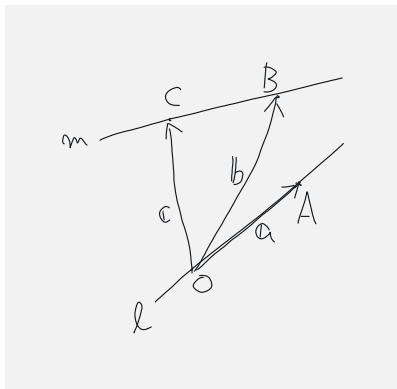
4次元の空間に、2直線 l 、 m があるとする。 l 上に2点 O 、 A をとり、 m 上に2点 B 、 C をとる。4点 O 、 A 、 B 、 C はすべて異なる点とする。点 O を始点とする位置ベクトルを考える。 A 、 B 、 C の位置ベクトルをそれぞれ、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} とする。



l 上の点はすべて、 \mathbf{a} の実数倍で書ける。そして、 m 上の点はすべて、 \mathbf{b} と \mathbf{c} の線形結合で書ける。すなわち、2直線 l 、 m 上の点はすべて、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} の線形結合で書ける。ここで、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} が生成する部分空間を V とすると、 l と m は V に含まれている。そして、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} が線形独立のとき V の次元は3であり、そうでないとき V の次元は2以下である。つまり、2直線 l 、 m は常に3次元以下の空間に含まれているため、2直線の位置関係は、3次元までであり得たものしかあり得ない。



a 、 b 、 c が線形独立であることと、 l と m がねじれの位置にあることは同値です。2次元でねじれの位置は起きないからです。



長谷川先生の、Xでのコメントを少し載せます：

お書き頂いたエピソードから、先生が数学における創造性を早くからお持ちだったのは間違いないかと思います。

n 次元錐の体積やねじれの位置など、問を立てることすらなかなか初学者では辿りつかないものだと思います。問を立てる能力こそ研究には必要なこと、そのためには数学的自然についての感覚が必要なことなど、先生も御承知かと思いますが、教えられる以前に概ね理解されていたのではないのでしょうか。

(X、2025年11月7日)

やはり中学で4次元について考え、正しく推論できるというのは凄いと思います。本来こういう話から線形代数もやるべきかもしれませぬし、いわゆるシューベルトカルキュラスなどにも入り口になると思いました。(X、2025年12月13日)

余談

18歳のときに使った教科書である斎藤正彦『線型代数入門』に残っている当時の書き込み

「なるほど…いろいろ見えてくるね おもしろい 「写像」「変換」バンザイ！」

§3. 基底および次元

99

型対応を与える.

なるほど…いろいろ見えてくる

おもしろい 「写像」「変換」バンザイ!

同じページの下のほう「(k 個のベクトル) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ のあいだに自明でない線型関係が存在するとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ は線型従属であると言い、自明でない線型関係が存在しないとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ は線型独立であると言う」というところに下線を引いて、大きく「←なるほど」と書いている

~~..., \mathbf{a}_k のあいだに自明でない線型関係が存在するとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ は線型従属であると言い、自明でない線型関係が存在しないとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ は線型独立であると言う。~~

←なるほど

おける単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ は線型独立である。また、二個ない

このほか、次のページで、「 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ が線型独立であり、 \mathbf{a} が $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ の線型結合として表わされないならば、 $k+1$ 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}$ も線型独立である」ということを著者の斎藤先生が数行で証明してしまっているのを見て舌を巻き、小さい字で「うまいもんだ」と書き込んでいる

仮定に反する。したがって $c = 0$. すると (1) は、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ の線型関係となるから、仮定により、 $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.
 \mathbf{a} は線型独立である。証明終。

先ほど述べましたように、この気づきよりも、simplex（三角形、四面体）の発見のほうが後ですが、このように「一般の位置にあるいくつかの点」のような発想に気づいていたわけですので、simplexの発見のとき、それほど大きな衝撃は受けなかったわけです。

4. 微分積分学の基本定理（高校2年のとき）

- ・ 高校生のとき、積分を自分で発見した話
- ・ あとから積分は習い、大きく記憶に上書きがなされているので、当時のことを正確に思い出すことは非常に困難
- ・ しかし、当時考えた論理の順番を考えると、当時の考えは再構成できるので、それをお話しします

- ・ 2次元における面積、3次元における体積に相当する4次元のもの、つまり、4次元の空間を満たす量、については、おそらく4次元について考えていた中学のころから考えていた
- ・ 具体的に以下に述べる計算ができたのは、高校2年で理系のクラスに入って、物理を習ったことによる

・私の高校では、理科は高校1年で全員が生物を履修した。私は高校2年で物理と化学を選択した。数学で微分および積分を習う前に、物理で以下のように微分に相当する考えを習った

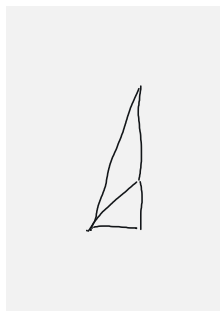
・物理で、ニュートンの運動方程式を習った。位置と速度、加速度の関係を習った。(おそらく物理と数学の教科書は、どちらを先に習っても大丈夫であるように書かれてあったのだと思われる。)

時刻がちょっとだけ経過すると、位置がちょっとだけ動く。位置が時刻の2次式だとすると、速度が時刻の1次式となるような計算を習った。この発想は非常におもしろいと思った。この発想をうんと展開すると、面積や体積が計算できるのではないかと思った。

この発想を (4.1) とする。

当時、以下のような図をノートに書いていた。2つの関数のそれぞれの微分係数の和が、2つの関数の和の微分係数となることに気づいてそれをチェックしている図。

つまり、私は微分という操作が線形であることを確かめていたことになる。なるほどなるほどと思いながらこの図を書いていたことを思い出す。



一方で、先ほど「2.」で述べたように、以下のような発想はすで
にあった。

線分を、その線分を含む直線と違う方向に（垂直に）動かしてで
きる図形が正方形

正方形を、その正方形を含む平面と違う方向に（垂直に）動かし
てできる図形が立方体

つまり、「○○柱」という発想がすでにあった。この発想を(4.2)
とする。

以下の発想も「2.」で述べたように、当時あった。

線分があり、その線分を含む直線上にない点と、その線分上のすべての点を結んで得られる図形が正三角形

正三角形があり、その正三角形を含む平面上にない点と、その正三角形上のすべての点を結んで得られる図形が正四面体

つまり、「○○錐」という発想もすでにあった。この発想を(4.3)とする。

発想 (4.1) のアイデアは、微分（という言葉は当時習っていなかったが）の逆の操作をすれば、面積や体積は計算できるというものです。

中学のとき、 ○○錐 の体積は、 ○○柱 の体積の $\frac{1}{3}$ であることは fact として証明ぬきで習っていましたが、これを示すことはできませんでした。

(4.2) と (4.3) の発想から自然に以下のように考えられます。線分錐（三角形）の面積は、線分柱（長方形）の面積の $\frac{1}{2}$ であり（これは小学校のときに根拠ありで習った）、点錐（線分）の長さは点柱（線分）の長さの $\frac{1}{1}$ です。ここで、これが4次元だと $\frac{1}{4}$ 、5次元だと $\frac{1}{5}$ であることも同じように示せるわけです。

物理で、多項式の関数の微分の計算を習って知っていたからできる計算だったことになります。

このあと、数学の授業で正式に微分を習い、その逆の計算として積分を習い、積分をすると面積や体積が計算できることを習い、私の記憶には大きく上書きがなされたわけです。

今考えますと、私は微分積分学の基本定理（(4.1)の発想）を自分で発見したことになるのかもしれませんが。

当時、思っていたことを2つ述べます。

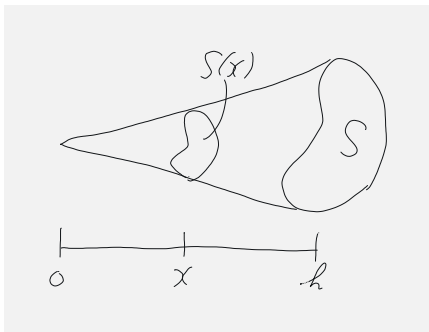
微分の発想から積分に相当するものを思いついたと言っても、私は、微分や積分が使われた、現代文明のさまざまな機器に囲まれて育った中で発見したのであるから、そもそも何もないところから微分を編み出したニュートンさんの偉大さとは比較にならないこと。

しかしながら、あとから振り返ってみても、(4.1)の発想は、われながらよく出たなあとと思うほど、非常に飛躍した発想であったと思うことです。これは、当時（高校2年のとき）振り返ってもすでにそう思いました。

ここまで述べたら、以下は述べなくてもいい話だとは思いますが、当時考えた、4次元の錐の体積は4次元の柱の体積の $\frac{1}{4}$ となる計算を、現在の notation で書きます。

任意の3次元の図形を A とし、 A の体積を S とします。高さが h であるような A の柱の4次元の体積を V_1 とし、高さが h であるような A の錐の4次元の体積を V_2 とします。 $V_1 = Sh$ です。

Aの錐の頂点を原点Oとし、Aを含む3次元の空間に垂直にx軸を取ります。x座標がxであるような3次元空間でAの錐を切った切り口に現れる3次元の図形を A_x とし、 A_x の体積を $S(x)$ とします ($0 \leq x \leq h$)。 $S(h) = S$ です。 A_x とAは相似であり、相似比は $x:h$ です。したがって体積比は $S(x) : S(h) = x^3 : h^3$ です。



V_2 は以下のように計算できます。

$$\begin{aligned}V_2 &= \int_0^h S(x) dx \\&= \int_0^h \frac{S(h)x^3}{h^3} dx \\&= \frac{S}{h^3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^h \\&= \frac{Sh^4}{4h^3} \\&= \frac{1}{4} Sh \\&= \frac{1}{4} V_1\end{aligned}$$

これで、4次元において、 $\bigcirc\bigcirc$ 錐の体積は $\bigcirc\bigcirc$ 柱の体積の $\frac{1}{4}$ であることが言えました。

このたび、高校2年のときの自分が考えたことを振り返って、以下のように思いました。

ニュートンやライプニッツによる微分の発見は、「瞬間の速さ」という概念の発見であったかのように（あとから）漠然と思っていましたが、実は、多項式というものを知った上で、 n 次式を微分すると $n-1$ 次式になることの発見が本質的であったのではないかと思うように（このたび）なりました。

私は小さいころ、動物図鑑を持っていました。ぼろぼろになるまで読みました。動物の走る速さとして、ゾウが時速40キロ、キリンが時速51キロ、と書いてあるページがありました。

周囲の大人から、「時速40キロ」とは、1時間に40キロメートル走る速さのことであること、そして、それは、1時間に本当に40キロメートル走るわけではなく、瞬間的にその速さが出るという意味であることは聞いて知っていました。

つまり、瞬間の速さという発想を知っていても、私が本日、お話ししたような気づきは（少なくとも私の中から）生まれなかったわけです。

単位時間あたりの移動距離をもって速さの定義とする発想は、人類のどこから出て来たのかまでは分かりません。この考察はここまでにします。

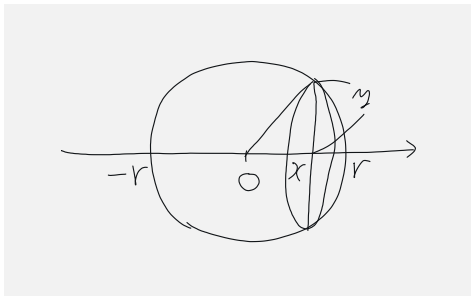
4次元の球の体積、表面積

高校時代、4次元の球の体積も計算したことがあります。これは、数学で正式に積分を習い、置換積分のような計算技術を習ったのちのことになります（私は置換積分のようなものは編み出していません）。

次の話（ガウス＝ボンネの定理の話）で、4次元の球の体積および表面積は計算できていることを使うので、以下に結果だけ述べます。

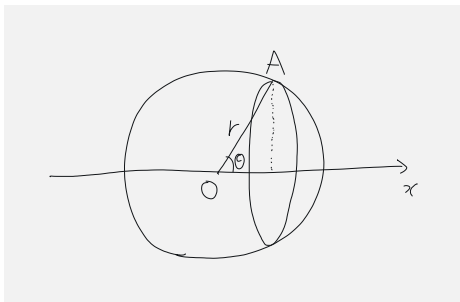
半径が r の 4 次元の球の 4 次元の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \frac{4}{3} \pi (\sqrt{r^2 - x^2})^3 dx \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 r^4 \end{aligned}$$



半径が r の 4 次元の球の表面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} 4\pi(r \sin \theta)^2 d(r\theta) \\ &= 2\pi^2 r^3 \end{aligned}$$



5. ガウス=ボンネの定理（の一部）（高校2、3年のとき）

高校2年か3年のころ、自分でガウス=ボンネの定理（の一部）に気がついていたらしい

よく思い出してみるとガウス=ボンネの定理の本質は発見することの決してなかった自分の限界に関するお話であるとも言える

なるべく当時を思い出しながらお話をしますが、これも先ほどと同様、あとから習ったことによって、記号や用語等が、大きく頭に上書きされてしまっていることをお断りしておきます。

また、私には大学の教員の経験がなく、ガウス=ボンネの定理を教師として振り返った経験がないこともあわせてお断りしておきます。

4次元における正多面体に相当する図形（正多体塊）は何種類あるのでしょうか

（正八体塊と正五体塊は見つけている。ほかにどのようながあるか）

この問いについては、ラジアンを習うことによって、以下のような進展があった。当時、おそらくいろいろな方面から考えていたと思うが、以下のアイデアは、頓挫することになる。しかし、それを考えることによって、けっこう美しい副産物があった

大元のアイデア（正多面体が5種類しかないということについて）

小学生であったとき、学校に置いてあった「天才バカボン」の学習マンガに書いてあったと記憶する以下の理屈がある

正三角形を1つの頂点に3つずつ集めると、正四面体ができる。4つずつ集めると、正八面体ができる。5つずつ集めると、正二十面体ができる。6つずつ集めると、まったくいらない面ができる。7つずつ集めると、これも正多面体はできない（※）。

正方形を1つの頂点に3つずつ集めると、立方体ができる。4つずつ集めると、まったくいらない面ができる。5つずつ集めても正多面体はできない。

正五角形を1つの頂点に3つずつ集めると、正十二面体ができる。4つずつ集めても正多面体はできない。

正六角形を1つの頂点に3つずつ集めたらまったくいらないになる。

正七角形を1つの頂点に3つずつ集めても正多面体はできない。

正八角形以上の正多角形でも同様。

以上の議論から、正多面体はここまでに出て来た5種類しかない。

この理屈は秀逸であるが、私は読んでしまったので思いついていない

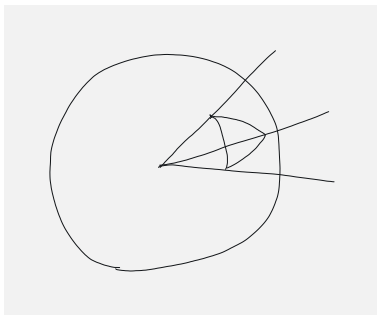
この理屈が、高校でラジアンを習うことで、以下のように進展した

ラジアンとは角度の単位であり、角（1つの頂点から出ている2つの辺の作る形）の頂点を中心とした半径1の円の、その角が切り取る弧の長さのこと

たとえば直角の頂点を中心とした半径が1の円の直角が切り取る弧の長さは $\frac{\pi}{2}$ なので、直角は $\frac{\pi}{2}$ ラジアンである

これを高次元化して、「バカボンの理屈」を適用したら、4次元における正多面体に相当する図形が何種類か、わかるのではないか、というふうに思った

図は、正四面体の頂点の近く（一般に、三角錐の頂点の近く）とする（正八面体の頂点の近くであれば、四角錐の頂点の近く）これを、3次元的な角（高次元化された角）と考える
この頂点を中心とする、半径1の球面を考える。この3次元的な角が、その球面を切り取る部分は、球面上のある図形になる（以下の図で、曲がった三角形のようなもの）。これが、角度の高次元化に相当するものであるはずだと考えた



この考えを実行に移そうとする段階で、おもに以下の3つの気づきがあったということを思い出す

(i) 高次元化された角の単位球面による切り口には、1次元低い図形が現れる

(ii) 曲がった線のなす角は定義できる

(iii) 高次元化された角度は数で表されない

少し余談

これらを考えていたときの情景を思い出します。その一つは、体育の水泳の授業です。先生は「泳げない者は歩け！」とおっしゃっていました。私は泳げないので、50分間、プールの中を歩いていました。泳げるようにはなりませんでしたが、こういうときに手持ちぶさたなので、漠然とこれらのことを考えていたのでしょう。もう一つは、これも体育の授業ですが、剣道の授業で、正座しながら順番を待っているときの光景です。

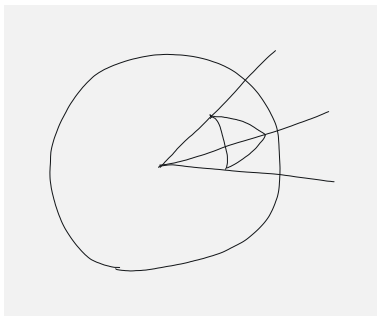
(i) は少し込み入った話ですので、(ii) と (iii) をご説明します。

(ii) 曲がった線のなす角は定義できる

先ほどの図で、「三角形もどき」の、3つの辺は、半径1の円（大円）である

なぜなら、その三角錐の側面は、その球の中心を通る平面だから

当時、「大円」という言葉は知らなかったかもしれませんが、先ほど述べました通り、あとから覚えた用語や記号が私の頭に上書きされています。以下、大円と言います。また、この、球面上で、3つの大円で囲まれた形を「三角形もどき」と呼ぶことにします。

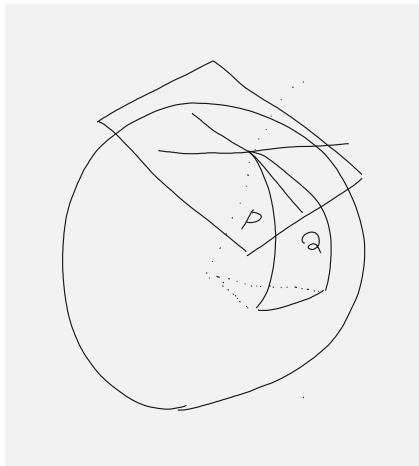


「三角形もどき」の辺は大円の一部分であるが、その2つの大円、すなわち2つの曲がった線に囲まれた（普通の意味での2次元の）角がある。

しばらく、ある頂点から出ている2つの曲がった線の作る形（角）の「開き具合」（角度）については、ぼんやりと、測れない（定義できない）気がしていた。分度器をあてても測れそうにない。

ところが、以下のことに気づいた。その頂点の周辺を拡大すれば、その2辺はほとんど直線である。あるいは、その頂点における2つの曲がった線のそれぞれ接線を考え、その2つの接線のなす角度を、その2つの曲がった線のなす角度と定義すればよい。このようにして、2つの曲がった線のなす角（角度）というものは存在すると気づいた。

そうすると、先述の「三角形もどき」の、2辺のなす角は、その三角錐の2枚の側面である平面（ P 、 Q とする）の面角であると感じる。その角の頂点における単位球面の接平面は、 P 、 Q のいずれとも垂直だから。



(iii) 高次元化された角度は数で表されない

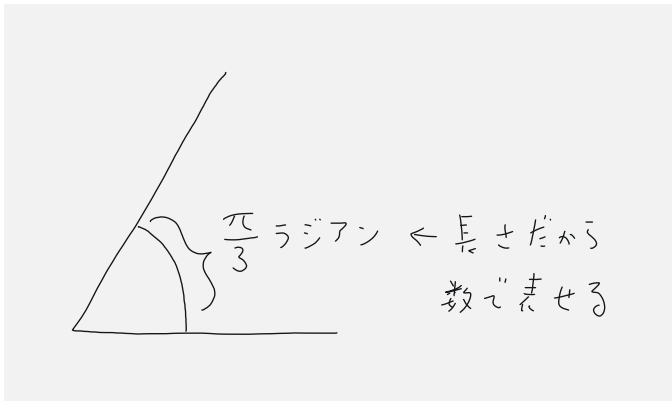
しばらく、角度の高次元化について考えていた。漠然と、普通の意味でのラジアンは、数で表され、それは角が切り取った弧の長さであったから、その1次元高いものを考えたときは、その角が切り取る球面上の図形の面積だろうと思っていた。

ところがそれはよく考えると違った。

このことを考えた動機は、小学生のときに読んだ「バカボンの理屈」である。それを高次元化して、正多体塊の種類を数えたいのである。その3次元の角が、1つの頂点にいくつ集まると、「オーバー」となるのか。それは、その3次元的な角を、単位球面が切り取る図形の、面積だけではなく、大きさや形も込めて考えなければならない。

つまり、3次元的な角の、ラジアンの高次元化は、その図形の、
大きさや形そのものなので、数で表せない！

逆に言うと、普通の意味での角度は、例外的に数で表されるとも言える。普通の意味での2次元的な角を、その角の頂点を中心とする単位円が切り取る図形は、半径が1の円の、弧である。弧は、1次元的な図形であり、長さで決まる。長さは数で表される。これが、普通の意味でのラジアン（角度）が、数で表されるという現象である。



ここまで、曲がった図形のさまざまなことを考えている当時の自分を思い出しながらお話をしておりますが、当時の私は、高校生的に素朴に、1次元といえばまっすぐな直線、2次元といえばまっただけの平面のみを考えていました。いま触れた、弧のようなものは、専門的には、曲がっていても1次元と言うわけですし、4次元の球の表面は、3次元球面というわけですね。正多体塊を考えることは、3次元球面のセル分割を考えていることになりますが、当時はそういう、曲がった線を1次元と言ったり、曲がった面を2次元と言ったりするという発想はなかったことになります。そもそも「次元」という言葉が高校までに学校で習った言葉ではありません。

この (iii) の気づきによって、この道は頓挫することとなりました。この道は予想以上に厳しいことに気づいたわけです。しかし、私は次のように考えました。せめて面積は知りたい。だいぶ険しい道だと気づきましたが、目標を下げてみることにしたわけです。

球面上の大円が、球面上で「まっすぐな線」であることには気づいていたと思います。さまざまな世界地図の話をして社会の時間で習ったことを覚えています。地球上で、たとえば赤道に沿って歩くのは「まっすぐ歩いた」ことになり、北回帰線に沿って歩くのは、まっすぐ歩いたことにならないわけです。

普通の意味で、まっすぐな線とは直線のこと、で、「最も近い道」のことです。

しばしば、円柱の側面や円錐の側面の上で、最も短い道のりを計算せよという数学の問題を当時やらされましたが、それは、それらを展開して平面としたときの「直線」の長さであったわけです。球面は平面に展開できず、それゆえにメルカトル図法を初めとする世界地図を平面にかく技法では、どうしても縮尺がどこかで狂います。このことの認識は当時ここまででした。

「三角形もどき」の面積

三角錐の頂点を中心とする半径1の球面がその三角錐を切り取る形は、「三角形もどき」である。先ほど述べたように、三角錐の3つの面角を、 α 、 β 、 γ とすると、3つの大円のなす角（これも先ほど述べたように、曲がった線のなす角の角度は定義される）は、 α 、 β 、 γ となる。（ここでこれはガウス=ボンネの定理をあとから知ったことによる notation ですが、当時の記憶に大きく上書きがされているために、当時の自分がどういう記号で書いていたかは今となっては不明です。）

この「三角形もどき」の面積が知りたい。

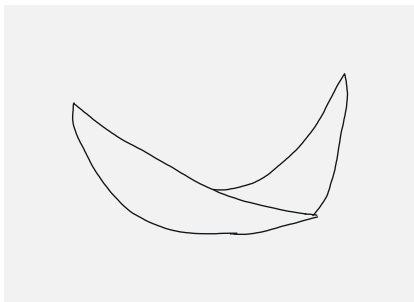
最初、この面積は、積分で求めようとしていた。「4.」で述べたように、当時、積分は見つけていた上に、習っており、半径が r である球の表面積は、 $4\pi r^2$ であることは積分によって確かめることができていた。同じように、この「三角形もどき」の面積も、積分で求めようとしていた。

ところが、よく考えてみると、以下のように、これは、足したり引いたりするだけで出てしまう。

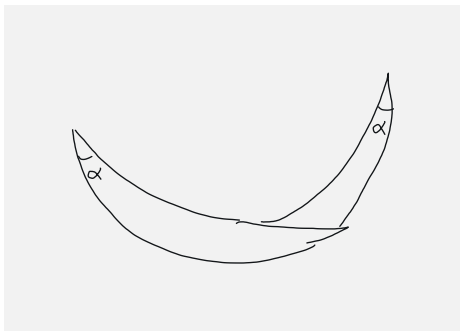
球面上で、大円2つで囲まれた以下のような形を考える。私が子供であったころ、マンガで、スイカを、中心を通る2つの平面で切って食べている絵をよく見た。



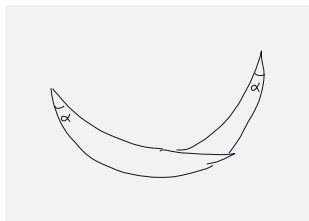
実際にはもう少し細かく切らないと食べづらいが、このようにスイカを切って食べるとすると、以下のような形は、スイカを食べ終わったときのような形となる。この「スイカを食べ終わったときのような形」は、面積がわかる。



「スイカを食べ終わったときのような形」の一方の角の大きさを α とする。するともう一方の角の大きさも α である。なぜなら、 α は、その2つの平面の面角であり、その2つの点は互いに対蹠点だからである（対蹠点とは、球面上の反対にある点のこと。地球で言えば、東京の対蹠点はアルゼンチンのどこか）。



そして、これは、球面全体の面積の、 $\frac{\alpha}{2\pi}$ 倍であることに気づく。
なぜなら、2つの点を地球における北極と南極とすると、この図形は2つの経線で囲まれた形であり、その面積は地球の面積の 2π ラジアンぶんの α ラジアン倍だからである。

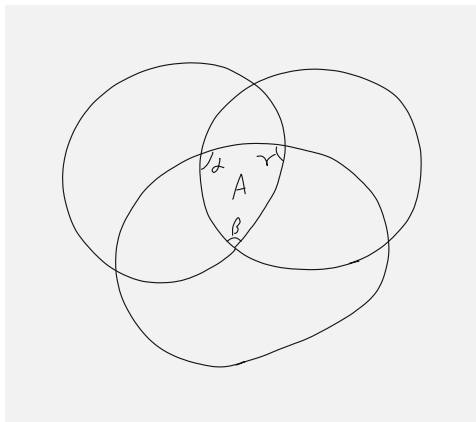


半径が1の球面の面積は 4π であるので、角の大きさが α であるような「スイカを食べ終わったときのような形」の面積は、

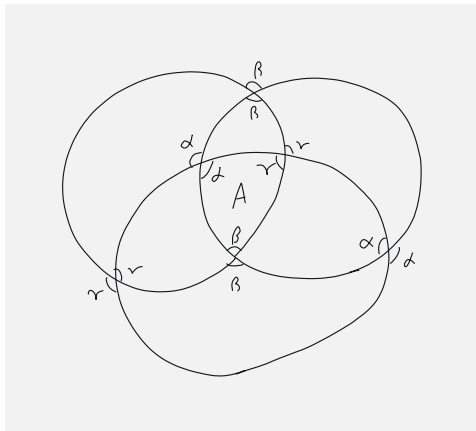
$$4\pi \times \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha$$

であると分かる。

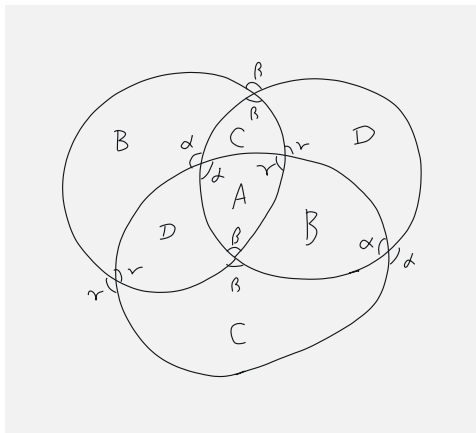
ここで、先ほどの、3つの角がそれぞれ α 、 β 、 γ であるような「三角形もどき」の面積を A とする。 A が知りたい数である。この「三角形もどき」の絵を以下のようにかく。



すると、先ほど見たように、2つの大円で囲まれた形の2つの角は等しいので、以下のようなになる。(対頂角が等しいことも使った。)

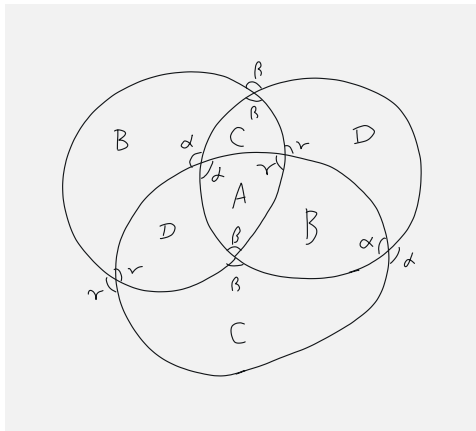


以下のように、球面全体が、8つの「三角形もどき」に分割されているが、よく観察すると、それらのうち、地球（球面）の反対側にある「三角形もどき」は、形も大きさも同じであり、つまり合同であって面積が等しいことに気づく。これに注意して、以下の図のように、ほかの「三角形もどき」の面積を、 B 、 C 、 D と名付ける。



角の大きさが α であるような「スイカを食べ終わったときのような形」の面積は 2α であるので、図より以下の等式が成り立つ。

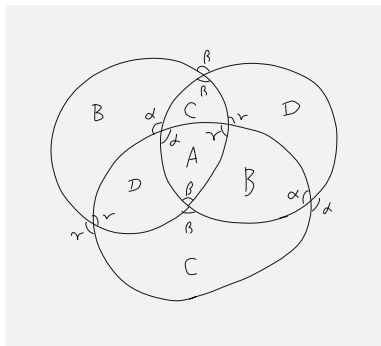
$$A + B = 2\alpha \quad (5.1)$$



同じようにして、以下の等式が成り立つ。

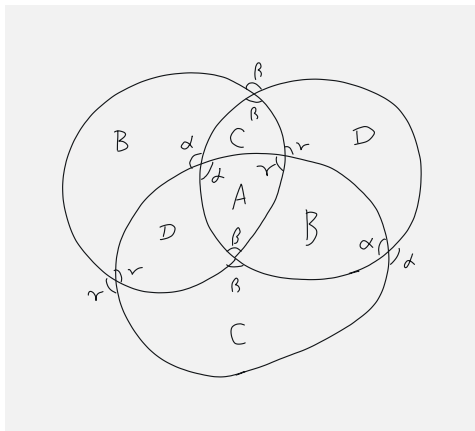
$$A + C = 2\beta \quad (5.2)$$

$$A + D = 2\gamma \quad (5.3)$$



そして、大円で囲まれた部分は球の半分なので、その面積は 2π であることから、以下の式が成り立つ。

$$A + B + C + D = 2\pi \quad (5.4)$$



(5.1) から (5.3) までの両辺を足して以下の式が得られる。

$$3A + B + C + D = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma \quad (5.5)$$

(5.5) から (5.4) を引く。

$$2A = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\pi \quad (5.6)$$

(5.6) の両辺を 2 で割る。

$$A = \alpha + \beta + \gamma - \pi \quad (5.7)$$

A が知りたかった数なので、(5.7) が結論である。

「三角形もどき」の面積は、足したり引いたりすることで出てしまいました。かなりシンプルな式となったので驚きました。これが正しい式か、以下のような検算が思いつきます。

球面の半径を非常に大きいものとする。するとこの「三角形もどき」は、ほとんど平面上の三角形と見なせる（大円はまっすぐな線なので、まったくいらない面の上だと直線だと見なせる）。その面積は、非常に小さいと見なせるので、いっそ面積はゼロとする。そこで (5.7) で $A = 0$ とする。以下のようになる。

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = 0 \quad (5.8)$$

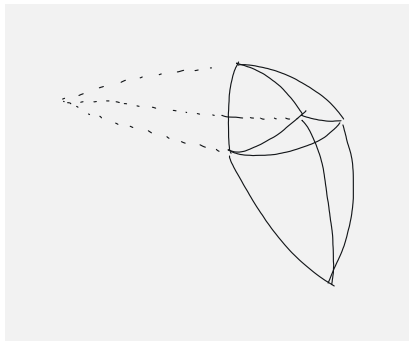
ここで π を移項して、以下の式を得る。

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (5.9)$$

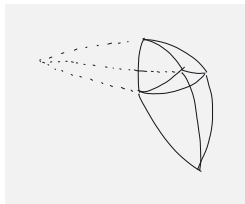
これは、平面上で、三角形の3つの角の和が 180° であることを意味している。これで私は「確かにおかしくない」と思った。

これは、習う前に、ガウス=ボンネの定理の一部に気が付いていたことになるのかもしれませんが。しかしこれは以下に述べます通り、少なくとも当時の私の認識の限界でもあり、その意味で私はガウス=ボンネの定理の本来の精神には気づいていないとも言えると思います。

さて、ここから考えたことがあります。これをもう1次元、高次元化することはできないであろうか。すなわち、以下の図のように考えるわけです。



半径1の4次元の球の表面（3次元球面）を考える。その上で、半径1の2次元球面（大球というのか）4枚にかこまれた「四面体もどき」を考えると、これの体積が、さっきの議論と同じように、足したり引いたりで出るのではないかと思った。図のように、大球3枚に囲まれた「3次元的な『スイカを食べ終わったときのような形』」を考え、これの体積を考えて、同様の議論をする。ところが、このやり方だと、足したり引いたりで「四面体もどき」の体積は出ない。ずっとのち、大学で専門的な数学を学び、こういう場合、奇数次元と偶数次元で、振る舞いが違うことを学んだが、そのことはこのとき、直観的に実感している。

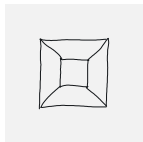
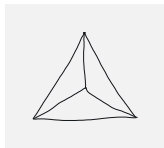


先ほど述べたように、私には大学の数学の教員の経験がなく、これらのことを体系的にあとから振り返ったことがほとんどなく、頭の中で整理された状況ではありません。

このたび、三十何年かぶりにこの計算を試してみました。確かに出ません。

後日談をいくつか

正多体塊が何種類あるのかという問いは、中学生のころからあったわけで、高校のころ、ずっと考えていました。あるとき、以下のような図を見ました。3次元の正多面体を、2次元の平面にかいてあります。これを1次元あげれば、原理的に正多体塊の絵はすべてかけるはず。



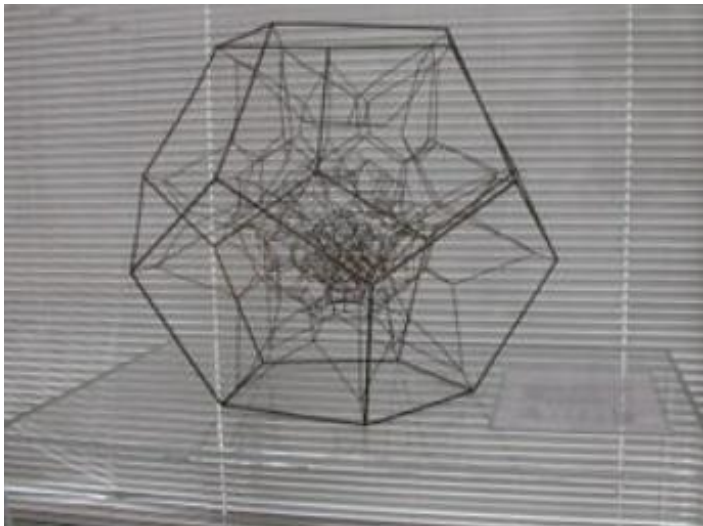
そう思って、高校1年の夏休み、近くの文房具屋さん（田舎なので近くと言っても30分くらい歩く）で模造紙を買って来て、自分の部屋の床に敷き、ひたすら線を引いて絵をかこうとしました。

しかし、絵はかき終わりませんでした。

ずっとのち、1998年1月、東大の数学科の学生をしていて、学部3年の終わりに、突如として、東大数理に、4次元の正多面体の模型が登場しました。

アマチュアの数学者の方が作られたものだったということでした。正十二面体がたくさんで作られた模型は、直径が1メートルくらいある、全体が正十二面体でできた模型であり、非常に細かいものでした。私は高校1年の夏休み、こういうものを模造紙にかこうとしていたことになり、こんなに細かいものは道理でかけなかったわけだと思いました。

現在も東大数理にあるようで、以下は東大数理のホームページに載っている写真です。



当時、6種類であることはなんとなくわかっていたようですが、具体的な形はかけなかったわけです。高校のときを思い出し、恥ずかしさでいっぱいになった様子がかうかがえます。

同じ年の5月、私は学部4年でした。東大数理では当時、院試を迎える学部4年の夏学期、「概説」という授業が行われていました。1回の授業で2人の先生が、45分ずつ、学部生向けにご自身の専門を語られるのでした。

ある代数の先生が、その年の1月に登場した模型の話とからめて、正多体塊が6種類であることは、代数的に示せることをおっしゃったのです。私には身もふたもない証明であるように思えました。それは、かつての自分が具体的に絵をかこうとしていたからだと思います。

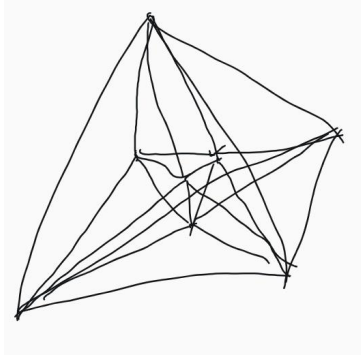
再び当時の日記です。98年5月14日です。

「 「概説」は1つは、幾何もけいの話。と中、ねた。100年以上前のゆいしょあるもけいだと知った。おもしろかったが、4次元多面体が6種類であるのを、代数的に証明しちゃうのは、何とも味気なくていただけない（私は）。」

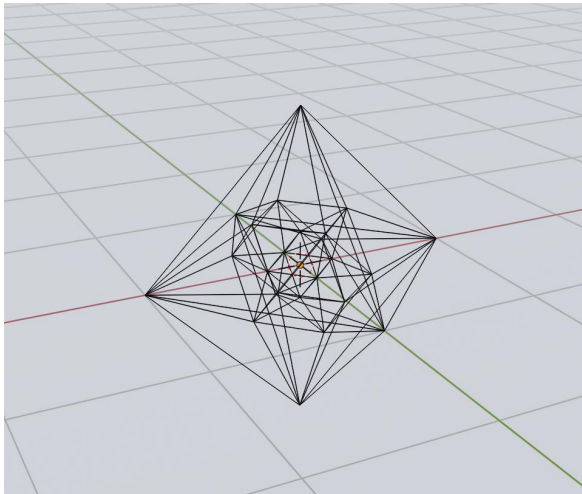
と中、ねた。100年以上前の、ゆいしょあるもけいだと知った。おもしろかったが、4次元多面体が6種類であるのを、代数的に証明しちゃうのは、何とも味気なくていただけない（私は）。

さて、この高校生だったときから三十数年がたち、私の教室のある高校生の生徒さんが今、一緒に4次元のことを考えておられます。その生徒さんは、4次元における正多面体の図を、いま述べたアイデアに基づき、アプリで6つかかれました。

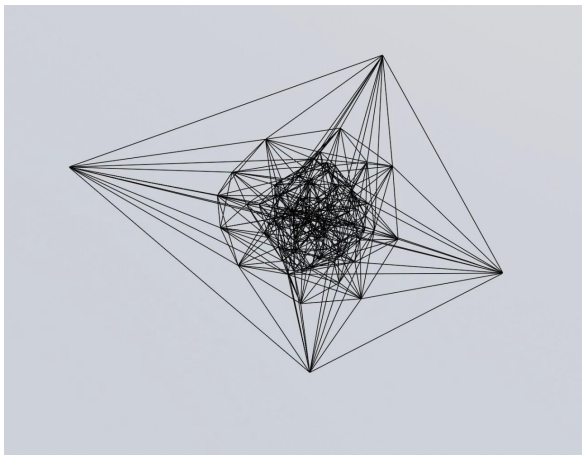
正十六体塊



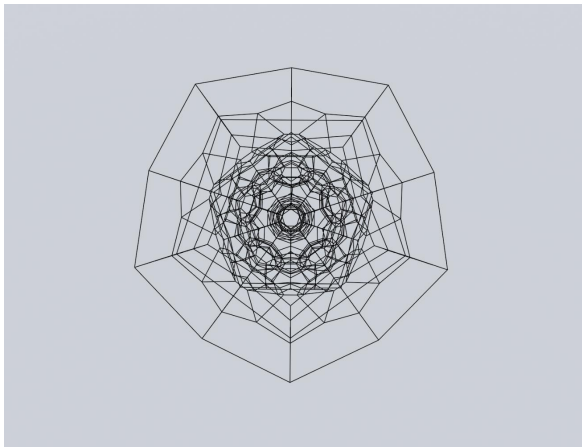
正二十四体塊



正六百体塊



正百二十体塊



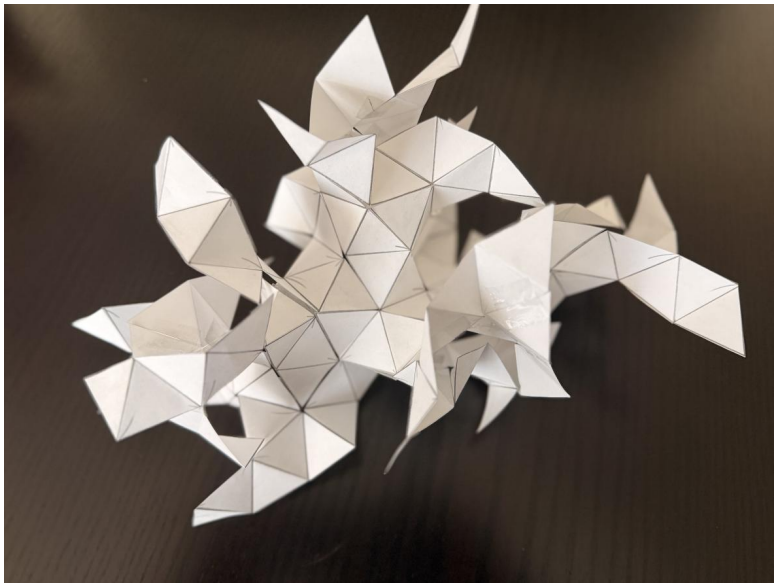
そして、正多体塊が全部で何種類かという問いを考えるにあたり、正多面体がなぜ5種類かを考え、自身で「バカボンの理屈」に到達されました。そして、この理屈を高次元化し、辺にいくつ正多面体を集めて、面角の合計が、 360° を超えないか、と考え始めました。これは私の考えよりずっと筋がいいと言えるかもしれません。私は、「頂点に正多面体はいくつ集まるか」と考えたわけですが、「辺に正多面体はいくつ集まるか」と考えた記憶はないからです。正四面体は、3つ、4つ、5つまでであり（それぞれ、正五体塊、正十六体塊、正六百体塊）、立方体は3つまでであり（正八体塊）、正八面体も3つまでであり（正二十四体塊）、正十二面体も3つまでです（正百二十体塊）。

学部4年（1998年）のときに輪読で読んだ、W.Thurstonの
Three-Dimensional Geometry and Topology（その前の年である
1997年刊行ですが、ずっと前からある Thurston の講義録の書籍
化で、当時は3次元ポアンカレ予想の解決の前です）に、3次元
多様体の例として、ポアンカレ十二面体空間（Poincare
dodecahedral space）が載っていて、これは、正十二面体の、向か
い合う正五角形を、時計まわりに $\frac{1}{10}$ だけ回転させて貼り合わせ
て得られる3次元多様体ですが、これは1つの辺に正十二面体が
3つずつ集まります。そして、ユークリッド幾何的な正十二面体
の面角は 116.565° だそうなので、ポアンカレ十二面体空間は楕円
幾何を持つ、というふうに書いてあります。当時は、この計算
（ユークリッド的な正十二面体の面角の計算）は初等数学であっ
て読み飛ばしたと思いますが、これはこのたび、初めてやってみ
たと思います。

高校生のころ考えた「5.」の内容は、球面幾何（楕円幾何）の最初のほうの話であるにとらえられると思います。あくまで素朴に高校生的に、1次元と言えばユークリッド的にまっすぐ、2次元といえばユークリッド的にまっただけ、と考えていた私の当時の限界が、こうして思い出して整理してみると、だんだん明らかになります。双曲幾何というような発想は高校生であったころ、まったくなかったわけで、双曲幾何を学んだとき「その発想はなかった」と非常に驚き、また納得しました。

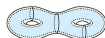
前掲の Thurston の本で著者の Thurston は、最初のほうで、一定の負の曲率の曲面の近似モデルを、紙で作った正三角形を各頂点に7つずつ貼り合わせて作れと書いています (Exercise 2.1.4(a))。これは、先ほどのバカボンの理屈に※印をつけましたが、正三角形を1つの頂点に7つずつ集めることで、負の曲率の曲面の近似モデルが得られるわけです。

この Thurston の Exercise は、もちろん本当に紙で作ってみよと言っているわけですが、この輪読のときは、私でないある学生がここを読む当番に当たり、なんと彼はこの工作をやって来なかったのです！私は見てもたかったので不満でした。ご指導くださっていた先生も不満そうでしたが、先生も実物を見てもたかったのでしょう。このときはこれで通過していますが、ここで、このたび、28年ごしにこの工作をやることにしました。



当時から3次元多様体の幾何は8種類であると言われていました。それは Thurston の予想なのでした（幾何化予想）。これは本当であるとペレルマンによって証明されて、ポアンカレ予想は証明されたのでした。日記によると2003年8月12日に、先日出たポアンカレ予想の証明は本当らしいという仲間のうわさを聞き、2004年1月23日の東大数理のセミナーで、その論文をお読みになった先生のお話をうかがいました。

本日の内容は、星くず算数・数学教室のブログにあります。本日、割愛したエピソード等も載っています。以下のブログの「自伝風の読み物」というタグの記事をご覧ください。



星くず算数・数学教室



本日はありがとうございました。