数学Ⅲのすきまをうめる話　数列編

●　講演の目的

　高等学校で勉強した数学Ⅲという科目で，やや曖昧にされてきた部分を行間をうめて理解していこうという目的の講演です．

（個人的な理由：大学の講義みたいなことをやってみたかった）

● 準備　～実数とは何か～

高校での説明

数直線上の各点に対応する数のこと

有理数と無理数(循環しない小数)の総称

間違いではないが，曖昧な定義である．

厳密な定義

実数とは次の3つの公理を満たす集合 $\mathbb{R}$ の元として定義する．

(1)　代数の公理(四則演算)

(2)　順序の公理(大小関係)

(3)　連続性の公理　←後で扱う

(1)(2)を用いると実数の稠密性を示すことができる．

● 準備　〜実数の稠密性〜

命題

任意の異なる実数の元 a, b ($a<b$) に対して

$$a<x<b$$

となる実数 x が少なくとも 1 つ存在する.

$1\in\mathbb{R}$ であり，$1+1=2\in\mathbb{R}$ なので $2^{-1}=1/2\in\mathbb{R}$ もいえて，$a+b, 2a, 2b\in\mathbb{R}$ なので

$$2a<a+b<2b \quad (\because a<b)$$

辺々に $1/2>0$ をかけて

$$a<(a+b)/2<b$$

となり x として $(a+b)/2$ を取ればよいことがわかる.

● 準備　～三角不等式～

a, b を実数とすると，不等式 $|a+b| \leqq |a|+|b|$ が成り立つことは，高校でも扱っている.

これを変形すると

$$|a+b|-|a| \leqq |b|$$

となるが， $a+b=c$ とすると，

$$|c|-|a| \leqq |c-a|$$

を得る.

また $|a+b| \leqq |a|+|b|$ 拡張して

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leqq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

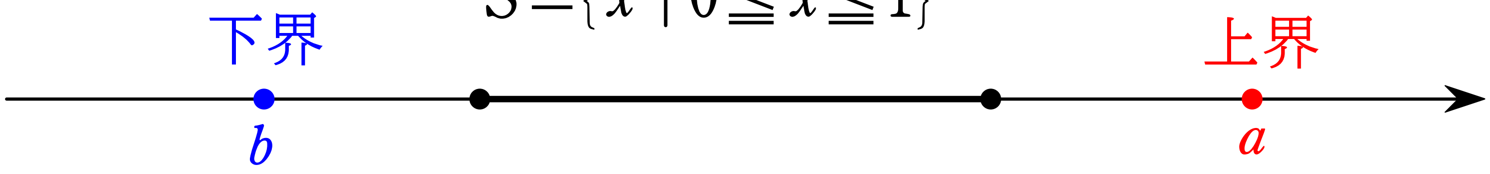
を得る.

● 準備　～上界・下界～

集合 S のどの元よりも小さくない実数を S の上界という．
例えば，$\sqrt{2}$ や 1 は S の上界である．

集合 S のどの元よりも大きくない実数を S の下界という．
例えば，-1 や 0 は S の下界である．

$$S=\{x \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$$



集合 S が上界をもつとき，S は上に有界であるという．

集合 S が下界をもつとき，S は下に有界であるという．

集合 S が上にも下にも有界であるとき，単に S は有界であるという．

● 準備　～上限・下限～

最大値・最小値だけでは表せない集合の端の値を表す概念を導入する.

例えば集合 $S=\{x \mid 0 \leqq x < 4\}$ において，最小値は 0，最大値はない.
でも 4 にも何かしら名前をつけたい.

4 は上界の中でも最小なので，上限という名前をつける.
0 は下界の中でも最大なので，下限という名前をつける.

●　準備　～上限・下限の言い換え～

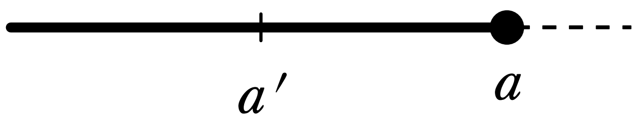
上に有界な集合 S について，実数 a がその上限であるということは，次の 2 つの条件がともに満たされることである．

[A]	S に属するすべての数 x について，$x \leqq a$	(a は S の上界)
[B]	$a' < a$ ならば，$a' < x$ となる S に属する数 x が存在する．	(a は最小の上界)

[A] は明らか．

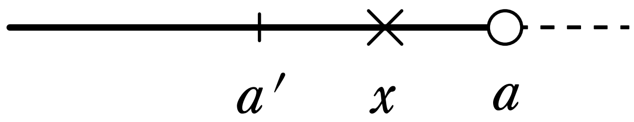
[B] について

$a \in S$ のとき



$x = a$ とすればよい．

$a \notin S$ のとき



もし，$a' < x < a$ なるすべての x が S に属さないなら，a' が a より小さい上界となり不適．

質疑時間

● 実数の連続性と数列の収束・発散　～実数の連続性～

実数の満たすべき公理として，次の連続性公理を採用する．

ワイエルシュトラスの連続公理

実数の部分集合 S が上に有界であるとき，S の上限が存在する．

実数とは次の 3 つの公理を満たす集合 $\mathbb{R}$ の元として定義する．

（1）　代数の公理 (四則演算)

（2）　順序の公理 (大小関係)

（3）　連続性の公理

この公理を用いて次の定理を証明することができる．(資料参照)

定理

実数の部分集合 S が下に有界であるとき，S の下限が存在する．

● 実数の連続性と数列の収束・発散　～アルキメデスの原理～

アルキメデスの原理

任意の正の実数 a と，任意の実数 b に対して，ある自然数 n が存在して $an > b$ が成り立つ．

証明

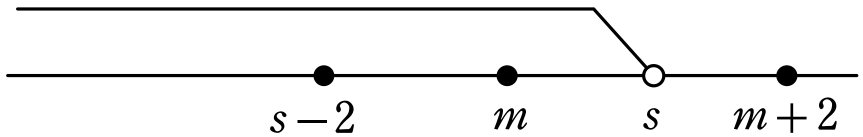
$b \leqq 0$ のときは明らか．以下 $b > 0$ とする．背理法で証明する．

すべての自然数 n に対して $an \leqq b$ つまり $n \leqq b/a$ が成り立つと仮定する．

このとき自然数の集合 $\mathbb{N}$ は上に有界であることになる．

公理から，$\mathbb{N}$ には上限 s が存在する．このとき，$s-2$ は $\mathbb{N}$ の上界ではないので，

$s-2 < m$ となる自然数 m が存在する．(上限の言い換え)



このとき，$s < m+2$ であり，s より大きい自然数 $m+2$ が存在し，すべての自然数 n について $n \leqq s$ であることに矛盾する．したがってアルキメデスの原理が成り立つ．

アルキメデスの原理の系

任意の正の実数 a と任意の実数 b に対して，ある自然数 n が存在して

$$a > \frac{b}{n}$$

が成り立つ．

$an > b$ の両辺を $n > 0$ で割ると $a > \dfrac{b}{n}$ を得る．

● 実数の連続性と数列の収束・発散　～ε の原理～

定理　ε の原理

2 つの実数 a, b について，任意の正の実数 ε に対しても $|a-b|<\varepsilon$ が成り立つとき，$a=b$ である．

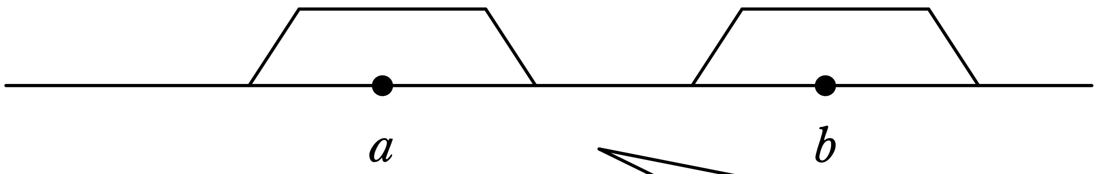
証明

背理法で示す．任意の正の実数 ε に対して $|a-b|<\varepsilon$ が成り立ち，かつ $a \neq b$ とする．

このとき $|a-b|>0$ であり，アルキメデスの原理の系から，ある自然数 n が存在して，

$$|a-b|>1/n$$

が成立する．しかし，$1/n>0$ であるから $|a-b|<\varepsilon$ に矛盾する．よって $a=b$ である．



異なる 2 つの点を互いに交わらない 2 つの開区間で分離できる（ハウスドルフ性）

言い換えると，異なる 2 点を含む開区間の小ささには限度がある

●　実数の連続性と数列の収束・発散　～高校の数列の収束・発散の定義～

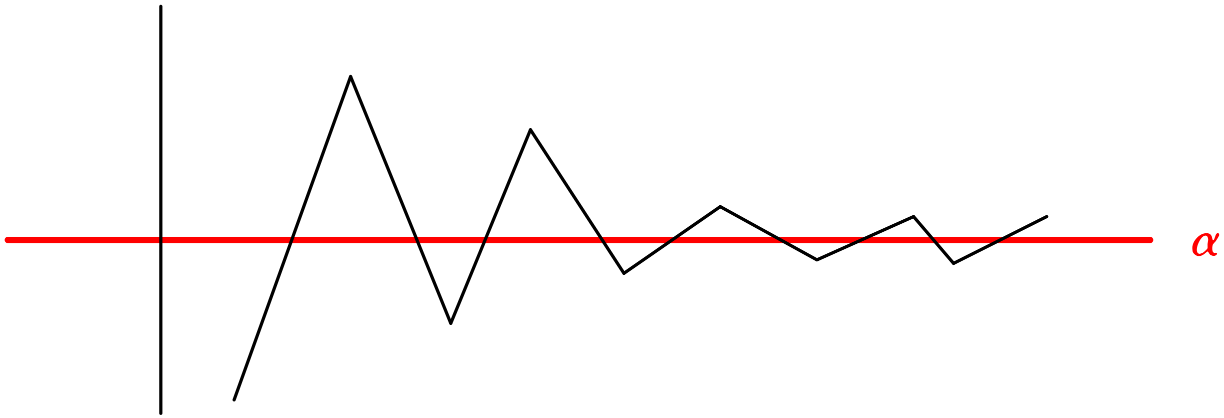
高校の数列の収束と発散について確認する．

数列の収束

数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくするとき，a_n が一定の値 α に限りなく近づくならば，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow \alpha$$

と書き，この値 α を数列 $\{a_n\}$ の極限値という．収束しない場合，数列は発散するという．



問題点：a_n が α に限りなく近づくということをどのように判定すればよいかあやふやであること．

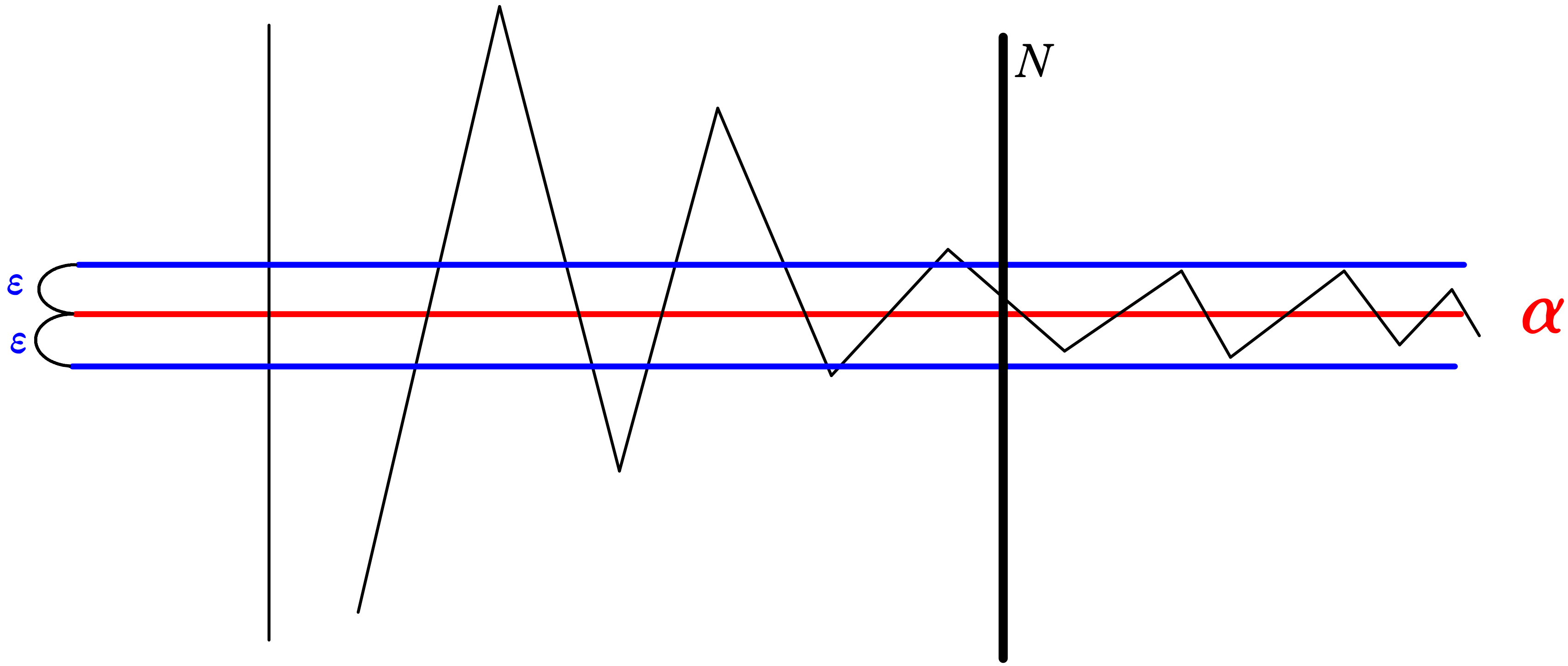
限りなく近づく　→　ある番号以降はどの項も誤差 ε よりも小さくできる

●　実数の連続性と数列の収束・発散　～厳密な数列の収束～

定義　数列の収束

任意の正の実数 ε に対して，ある自然数 N が存在して，$n \geqq N$ であるすべての自然数 n について $\lvert a_n - \alpha \rvert < \varepsilon$ となるとき，数列 $\{a_n\}$ は α に収束するという．

限りなく近づく　→　ある番号以降はどの項も誤差 ε よりも小さくできる



● 実数の連続性と数列の収束・発散　～ $1/n$ と 0 との誤差を小さくする～

ある番号以降はどの項も誤差 ε よりも小さくできるとはどういうことか？

例　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ の場合について考える.

$1/n$ と 0 との誤差を 1/100 より小さくしたかったら，$n\geqq 101$ とすれば,

$1/n\leqq 1/101<1/100$ なので

$$|a_n-0|<\frac{1}{100}$$

$1/n$ と 0 との誤差を 1/1000 より小さくしたかったら，$n\geqq 1001$ とすれば,

$1/n\leqq 1/1001<1/1000$ なので

$$|a_n-0|<\frac{1}{1000}$$

どんなに小さな ε でも n さえ十分大きくすれば，誤差を ε より小さくできることを「収束する」という.

●　実数の連続性と数列の収束・発散　～「イコール」と「収束する」の違い～

「イコール」とは完全無罪のこと

$a=\alpha$ のとき，a と α の誤差はもとから 0 だから，疑い (誤差) がそもそもない． 故に完全無罪を勝ちとる．

「収束する」とは推定無罪のこと

$\lvert a_n-\alpha \rvert<\varepsilon$ のとき，疑い (誤差) はあるかもしれないが，検察官が突きつける疑い (誤差 ε) を必ず下回るので具体的に有罪の「証拠」を挙げることができない．結果，推定無罪になる．

ただし，後だしじゃんけんとはいえ，この誤差を毎回下回る N を無限に提出する必要がある．

→　どうやってそれを行うのかを次のページでやっていく．

● 実数の連続性と数列の収束・発散　～ $1/n \to 0\ (\, n \to \infty\,)$ を示す～

例題

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \text{ を示せ.}$$

証明

任意の正の実数 ε について，ε と 1 にアルキメデスの原理の系を適用すると，ある自然数 N が存在して

$$\varepsilon>\frac{1}{N}$$

が成立する．任意の $n\geqq N$ に対して

$$\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{N}$$

だから

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

$a_n=\dfrac{1}{n}$，$\alpha=0$として

$|a_n-\alpha|<\varepsilon$ を示した.

が成り立つ.

● 実数の連続性と数列の収束・発散　～ $\varepsilon-N$ 論法はあくまで証明法～

$\varepsilon-N$ 論法とは収束することを示す証明方法であり，極限値である α は経験的に見つけてくる必要がある．

例　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n^2+1}$ について，

$$\frac{3n^2+2}{2n^2+1}=\frac{3+2/n^2}{2+1/n^2}\to\frac{3}{2}\ (n\longrightarrow\infty)$$

と予測して，$N=\max\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}},1\right\}$ として $n\geqq N$ ならば

$$\left|\frac{3n^2+2}{2n^2+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{4n^2+2}<\frac{1}{4n^2}<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

アルキメデスの原理の系

●　実数の連続性と数列の収束・発散　～$\varepsilon - N$ 論法の必要性～

$\varepsilon - N$ 論法を使わなくても，直感的に極限が分かればよいのではないかと思う方がいるかもしれない．では次の問いについて考えてみよう．

問い

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ のとき

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ は存在するか．存在するならその値を求めよ．

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{2n^2+1}$ と違って，

直感的に説明しずらい

これについては，直感が働かない人がいる可能性が高い．

実はこれは 0 に収束するが，それを直感的に伝えることができるだろうか．

次のページでこれの証明の概要を与える．

● 実数の連続性と数列の収束・発散　～ $\varepsilon - N$ 論法が輝くとき～

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるとき，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0$ を示せ．

証明の概要

$$\left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - 0 \right| = \frac{|a_1 + \cdots + a_n|}{n} \leqq \frac{|a_1 + \cdots + a_N|}{n} + \frac{|a_{N+1} \cdots + a_n|}{n} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

のように $\left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - 0 \right| < 2\varepsilon$ を示す．

$N_2 = \frac{|a_1 + \cdots + a_N|}{\varepsilon} + 1$ とすると $n \geqq N_2$ のとき $\frac{|a_1 + \cdots + a_N|}{n} < \frac{|a_1 + \cdots + a_N|}{N_2} < \frac{\varepsilon|\quad|}{|\quad|} = \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ より N_1 が存在して $n \geqq N_1$ なら $|a_n| < \varepsilon$ で $\frac{|a_{N+1} + \cdots + a_n|}{n} < \frac{(n-N)\varepsilon}{n} < \frac{n\varepsilon}{n} = \varepsilon$

● 実数の連続性と数列の収束・発散　～数列の発散について～

今までは，数列が収束することを説明してきたが，$\varepsilon - N$ 論法を用いると，
数列が収束しないことを証明することもできる．特に，数列が正の無限大や
負の無限大に発散することも証明できる．くわしくは，資料参照のこと．

質疑時間

●　収束する数列の性質　～極限値の一意性～

定理

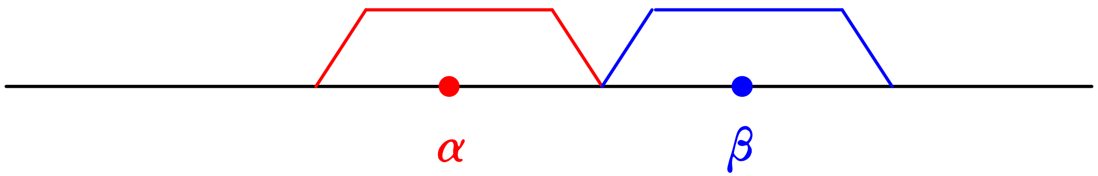
数列 $\{a_n\}$ が収束するとき，その極限値は一意的に定まる.

証明概略

$\{a_n\}$ が α にも β にも収束すると仮定すると，任意の $\varepsilon>0$ に対して十分大きな自然数が存在して

$n \geqq N_1$ ならば $|a_n-\alpha|<(\beta-\alpha)/2$，$n \geqq N_2$ ならば $|a_n-\beta|<(\beta-\alpha)/2$ が必要.

$N=\max\{N_1, N_2\}$ とすると，$n \geqq N$ ならば，a_n はすべて下の赤と青の部分に同時に存在することになり矛盾.



これはハウスドルフ性由来の結果.

● 収束する数列の性質　～収束列の有界性～

定理

収束する数列 $\{a_n\}$ は有界である.

証明概略

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする. $\{a_n\}$ が収束するから $n \geqq N$ ならば $|a_n - \alpha| < 1$ が必要.

つまり $|a_n| < |\alpha| + 1$ を得る. ここで, N 個の実数

$$|a_1|,\quad |a_2|,\quad \cdots,\quad |a_{N-1}|,\quad |\alpha| + 1$$

N 番目以降, これ以下

のうち最大のものを M とすると, $|a_n| < M$ がいえる.

よって収束列は有界であることがいえた.

● 収束する数列の性質　～はさみうちの原理～

定理

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$ ですべての n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ ならば数列 $\{c_n\}$ は収束し，

$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$ が成り立つ．

証明

ε を任意の正実数とする．

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ より十分大きい N_1 が存在して，$n \geqq N_1$ なら $-\varepsilon < a_n-\alpha\ (<\varepsilon)$

$\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$ より十分大きい N_2 が存在して，$n \geqq N_2$ なら $(-\varepsilon<)\ b_n-\alpha<\varepsilon$

よって $N=\max\{N_1, N_2\}$ としたとき $n \geqq N$ なら $-\varepsilon < a_n-\alpha < c_n-\alpha < b_n-\alpha < \varepsilon$

つまり $|c_n-\alpha|<\varepsilon$ が成り立つことから所望の結果を得る．

● 収束する数列の性質　～はさみうちの原理の条件～

はさみうちの原理は定理の条件を

「有限個を除く n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ 」

とゆるめても同様に示せる．

十分大きい n を考えれば，有限個を無視して，不等号を用いることができるから

しかし無限個を除いた無限個の場合は成り立たない．

反例

$a_n=1$，$b_n=1$ で $c_n=(-1)^n$ を考えると，$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=1$ であり，

n のうち，無限個の奇数を除いた無限個の偶数の項を考えると，

$a_n \leqq c_n \leqq b_n$ を確かに満たすが，c_n は実際には振動するので，条件を満たさない．

●　収束する数列の性質　～部分列とその極限～

定義

　数列 $\{a_n\}$ に対して，その番号 n 全体の中から，無限個の番号を部分的にとり出して，小さいものから並べたもの

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

を考えることができる．

　このようにして得られた数列を $\{a_{n_k}\}$ と書き，$\{a_n\}$ の部分列という．

　部分列について次の定理が成り立つ．

定理　部分列の極限

　$\{a_n\}$ を実数 α に収束する数列とする．このとき，$\{a_n\}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}$ も α に収束する．

証明　資料参照のこと．

● 収束する数列の性質　～大小関係と極限～

定理

$\{a_n\}$ を α に収束する数列とする．

（1）　実数 a について，$a_n \geqq a$ が無限個の番号 n について成り立つならば $\alpha \geqq a$.

（2）　実数 b について，$a_n \leqq b$ が無限個の番号 n について成り立つならば $\alpha \leqq b$.

例えば，$a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ のとき $a_n \leqq 1$ であるが，a_n の極限値 α は $\alpha = 1$ なので，

確かに $\alpha \leqq 1$ が成り立つ．証明は資料参照のこと．

● 収束する数列の性質　～明らかとされていた事柄～

定理

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束して $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ とするとき

（1） $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$　　（2） $\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta}$

（3） $\lim_{n\to\infty} a_n b_n=\alpha\beta$　　（4） $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)=\alpha/\beta$

ただし
（2）復号同順
（4）のとき $\beta\neq 0$

証明

（2） $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ より任意の $\varepsilon>0$ に対して十分大きな N_1, N_2 が存在して $N=\max\{N_1, N_2\}$ としたとき $n\geqq N$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon$, $|b_n-\beta|<\varepsilon$ なので,

$$|a_n\pm b_n-(\alpha\pm\beta)|=|(a_n-\alpha)\pm(b_n-\beta)|\leqq|a_n-\alpha|+|b_n-\beta|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

が成り立ち $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$ がいえる.

● 収束する数列の性質　～明らかとされていた事柄～

定理　数列の極限の性質

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束して $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ とするとき

（1） $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$

（2） $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta$

（3） $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$

（4） $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)=\alpha/\beta$

ただし
（2）復号同順
（4）のとき $\beta\neq0$

証明

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ であり収束列の有界性からある正実数 M' が存在して $|a_n|\leqq M'$ となる.

$M=\max\{M',|\beta|\}$ とすると，任意の $\varepsilon>0$ に対して，十分大きな N に対して $n\geqq N$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon/(2M)$, $|b_n-\beta|<\varepsilon/(2M)$ となるから

$$|a_nb_n-\alpha\beta|=|a_nb_n-a_n\beta+a_n\beta-\alpha\beta|\leqq|a_nb_n-a_n\beta|+|a_n\beta-\alpha\beta|$$

$$\leqq|a_n|\,|b_n-\beta|+|\beta|\,|a_n-\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

つまり $|a_nb_n-\alpha\beta|<\varepsilon$ となるから，（3）が従い，$b_n=k$ とすると，（1）が従う.

● 収束する数列の性質 ～明らかとされていた事柄～

定理 数列の極限の性質

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束して $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ とするとき

$\boxed{(1)\quad \lim_{n\to\infty} ka_n=k\alpha}$ $\boxed{(2)\quad \lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta}$

$\boxed{(3)\quad \lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta}$ $\boxed{(4)\quad \lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)=\alpha/\beta}$

ただし
(2) 復号同順
(4) のとき $\beta\fallingdotseq 0$

証明

$\lim_{n\to\infty}(1/b_n)=1/\beta$ が示せたら，(3) の b_n を $1/b_n$ に置き換えれば所望の結果を得られる．

$\beta\fallingdotseq 0$ より N_1 を十分大きくとれば $n\geqq N_1$ のとき $b_n\fallingdotseq 0$ である．

$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ より十分大きな N_2 以上の n について $|b_n-\beta|<|\beta|/2$ つまり $1/|b_n|<2/|\beta|$

また十分大きな N_3 以上の n について $|b_n-\beta|<\varepsilon|\beta|^2/2$ なので

$N=\max\{N_1, N_2, N_3\}$ とすると $n\geqq N$ のとき

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\beta}\right|=\frac{|b_n-\beta|}{|b_n||\beta|}=\frac{1}{|b_n|}\cdot\frac{1}{|\beta|}\cdot|b_n-\beta|<\frac{2}{|\beta|}\cdot\frac{1}{|\beta|}\cdot\frac{|\beta|^2}{2}\cdot\varepsilon=\varepsilon$$

より題意が示された．

質疑時間

●　BW の定理とコーシー列　～有界単調列の収束～

定理

有界な単調増加数列は，収束する．

証明

数列 $\{a_n\}$ が上に有界だから上限 α が存在して，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある番号 N が存在して $\alpha-\varepsilon<a_N\leqq\alpha$ (上限の言い換え) が成り立つ．

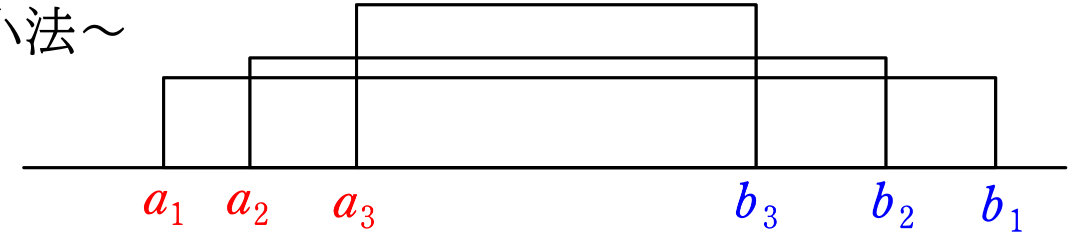
$\{a_n\}$ は単調増加列であるから，$n\geqq N$ であるすべての自然数 n について，$a_N\leqq a_n\leqq\alpha$ が従い，$\alpha-\varepsilon<a_n$ つまり $-\varepsilon<a_n-\alpha$ が成り立つ．

また，α は上限であるから $a_n\leqq\alpha<\alpha+\varepsilon$ 特に $a_n-\alpha<\varepsilon$ が成り立つ．

よって $n\geqq N$ なら $-\varepsilon<a_n-\alpha<\varepsilon$ つまり $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ なので $\{a_n\}$ は α に収束する．

有界な単調減少数列の場合も同様に示せる．

● BW の定理とコーシー列　～区間縮小法～



定理

閉区間 $I_n[a_n, b_n]$ は $I_1[a_1, b_1] \supset I_2[a_2, b_2] \supset \cdots \supset I_n[a_n, b_n] \supset \cdots$ を満たすものとする．

このとき，閉区間 I_n の幅 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ となるならば，各区間に共通するただ 1 つの点が存在する．

証明

仮定により，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq b_n \leqq b_{n-1} \leqq \cdots \leqq b_2 \leqq b_1$ であることから，

数列 $\{a_n\}$ は有界な単調増加数列，数列 $\{b_n\}$ は有界な単調減少数列であることがわかり，どちらも収束する．それぞれの収束値を α，β とする．任意の自然数 m, n に対して $a_m \leqq b_n$ であり，

極限と大小関係の定理より，

$m \longrightarrow \infty$ とすると，$\alpha \leqq b_n$ であり，これついて $n \longrightarrow \infty$ とすると $\alpha \leqq \beta$ を得る．

このとき，$a_n \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b_n$ であるから，$0 < \beta - \alpha < b_n - \alpha < b_n - a_n$ となり，

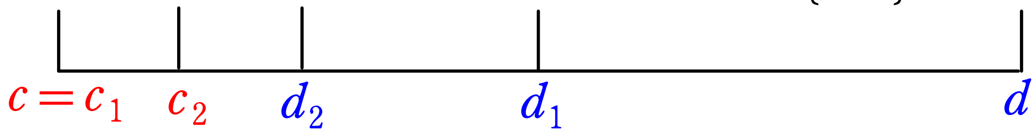
$\boxed{a_n \leqq \alpha \leqq b_n}$

$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ より $\alpha = \beta$ が従い，α が各区間に共通するただ 1 つの点であることがわかる．

● BW の定理とコーシー列　～ボルツァーノワイエルシュトラスの定理～

定理

数列 $\{a_n\}$ がすべての n について $a_n \in [c, d]$ を満たすとする．このとき，$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ で，$[c, d]$ の中の値に収束するものが存在する．



数列 $\{a_n\}$ は無限数列で，$a_n \in [c, d]$ なので，区間 $[c, d]$ のなかに無限の $\{a_n\}$ の点が存在する．
2 つの閉区間 $[c, (c+d)/2]$，$[(c+d)/2, d]$ のうち，無限の点が存在する方を区間 I_1 とし，
$[c_1, d_1]$ と表す．同様に $[c_1, (c_1+d_1)/2]$，$[(c_1+d_1)/2, d_1]$ のうち，無限の点が存在する区間を I_2 と
する．この操作を区間 $I_k[c_k, d_k]$ を作るまで続ける．このとき，各区間には無限の点があるので，
$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ となるように，$a_{n_k} \in I_k$ となる a_{n_k} の最小の添字の元をとる．

さらにこのとき，$c_k \leqq a_{n_k} \leqq d_k$ が成り立ち，$0 < d_k - c_k = (d-c)/2^k \to 0$ ($k \to \infty$) となる．
区間縮小法により，$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} d_k = \alpha$ ($\forall k \in \mathbb{N}$,　$\alpha \in I_k$) となる α が存在する．
はさみうちの原理によって $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ となり，所望の結果を得る．

●　BW の定理とコーシー列　～収束列 $\Longrightarrow$ コーシー列～

定義　コーシー列

任意の正の実数 ε に対して，ある自然数 N が存在し，$k, l \geqq N$ なるすべての自然数 k, l に対して，$|a_k - a_l| < \varepsilon$ となるとき，数列 $\{a_n\}$ はコーシー列であるという.

定理

収束列はコーシー列である

$\{a_n\}$ が収束するとき，十分大きい自然数 N が存在し，$k, l \geqq N$ ならば,

$$|a_k - a_l| = |(a_k - \alpha) - (a_l - \alpha)| \leqq |a_k - \alpha| + |a_l - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon$$

となり，コーシー列の定義を満たす.

次のページでコーシー列が収束列であることを示す.

● BW の定理とコーシー列　～収束列 $\Longleftarrow$ コーシー列～

定理

コーシー列は収束列である

　コーシー列の定義により，任意の $\varepsilon>0$ に対して，自然数 N' が存在し， $k, l \geqq N'$ なるすべての自然数 k, l について，$|a_k - a_l| < \varepsilon$ となる．$\varepsilon = 1$ のとき三角不等式により $|a_k| \leqq |a_l| + 1$ となる．N' 個の非負実数 $|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N'-1}|$, $|a_l| + 1$ のうち最大のものをとりそれを M とすると， $|a_n| \leqq M$ となり，数列 $\{a_n\}$ は有界であることがわかる．B.W の定理により， a_n は $[-M, M]$ の中の値 α に収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ を持つことがわかる．このことから，ある番号 K が存在し，$n_k \geqq n_K$ なるすべての自然数 n_k に対して $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$ となる． $N = \max\{N', n_K\}$ とすると， $n_k, l \geqq N$ なるすべての自然数 n_k, l について

$$|a_l - \alpha| = |a_l - a_{n_k} + a_{n_k} - \alpha| \leqq |a_l - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となり，数列 $\{a_n\}$ は収束することがわかる．

●　BW の定理とコーシー列　～完備性と距離空間～

コーシー列と収束列は同値なのだったら，コーシー列で収束を定義すればよいのでは？

『収束する数列である $\Longrightarrow$ コーシー列である』はどんな (距離) 空間でも常に真.

しかし，

『収束する数列である $\Longleftarrow$ コーシー列である』は $\mathbb{R}$ の性質がよいから成り立つ.

(コーシー列が収束するような (距離) 空間を完備な空間という)

例えば $A=(0,1)$ という実数の部分集合 A だけを考えるとき，

$a_n=\dfrac{1}{n+1}$ という数列は，コーシー列ではあるが，A に 0 が含まれないから「収束しない」

(収束するというのは，考えている集合のある元に限りなく近づくことが仮定されている．)

質疑時間

● これからの勉強の展望

解析分野

距離，完備性

微分方程式

線形代数分野

内積，ノルム

ヒルベルト空間

関数解析

フーリエ変換

ラプラス変換

● 宣伝

数学検定１級の対策の情報提供できます.
興味がある方は，DM で連絡ください！
(将来的に講座を開きたいと思っています.)

ご清聴ありがとうございました.

● 時間が余ったら紹介する事柄１

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

$\Longrightarrow$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ より任意の $\varepsilon > 0$ に対して，N が存在して，$n \geqq N$ ならば,

$|a_n - 0| < \varepsilon$ が成り立つが，この不等式は $||a_n| - 0| < \varepsilon$ と同値だから，$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

$\Longleftarrow$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ より任意の $\varepsilon > 0$ に対して，N が存在して，$n \geqq N$ ならば,

$||a_n| - 0| < \varepsilon$ が成り立つが，この不等式は $|a_n - 0| < \varepsilon$ と同値だから，$a_n = 0$

● 時間が余った場合に紹介する事柄

r^n の極限

$r>1$ のとき

$r=1+h$ ($h>0$) と表せて,

$r^n=(1+h)^n=1+nh+\cdots>1+nh$ ($\forall M\in\mathbb{R}$, $\exists n\in\mathbb{N}$, $1+nh>M$)

なので $\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$ より $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$ である.

$-1<r<1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}|r|^n=0$ が示せたら, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$ を得る. $|r|^n=\dfrac{1}{(1+h)^n}$ ($h>0$) だから

$$\left||r|^n-0\right|=|r|^n=\frac{1}{(1+h)^n}<\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{nh}<\frac{1}{Nh}<\varepsilon$$ (アルキメデスの原理)

よって $\lim_{n\to\infty}|r|^n=0$ から $\lim_{n\to\infty}r^n=0$

● 時間が余ったら紹介する事柄

r^n の極限

$r=1$ のとき

$r^n=1$ なので任意の $\varepsilon>0$ に対して1が存在して，$n\geqq 1$ なるすべての n に対して，

$|r^n-1|=0<\varepsilon$ を満たすので $\lim_{n\to\infty} r^n=1$

$r=-1$ のとき

r^n がある実数 α に収束するとして，背理法で証明する．

収束することから $\varepsilon=1$ のとき，ある番号 N が存在して $n\geqq N$ のとき

すべての n について

$$|r^n-\alpha|<1$$

となる必要がある．

n が偶数のとき $r^n=1$ だから $|1-\alpha|<1$，特に $1-\alpha<1$ が成り立つ．

n が奇数のとき $a_n=-1$ だから $|-1-\alpha|<1$，特に $1+\alpha<1$ が成り立つ．

このとき $\alpha>0$，$\alpha<0$ となるから矛盾．よって数列 $\{a_n\}$ は実数値 α に収束しない．

● 時間が余ったら紹介する事柄

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (\ a>0\ )$$

$1<a$ のとき

$1<\sqrt[n]{a}$ なので $\sqrt[n]{a}=1+b_n\ (\ b_n>0\ )$ と表せる． $a=(1+b_n)^n>1+nb_n$

よって $nb_n<a-1$ なので $b_n<(a-1)/n$つまり

$$0<b_n<(a-1)/n$$

を得るが，$(a-1)/n\to 0\ (\ n\to\infty\ )$ なので，$\lim_{n\to\infty} b_n=0$ よって $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}(1+b_n)=1$

$0<a<1$ のとき

$a=1/h\ (\ h>1\ )$ と表せて，$\sqrt[n]{a}=1/\sqrt[n]{h}\to 1/1\ (\ n\to\infty\ )$

$a=1$ のとき

任意の $\varepsilon>0$ に対して $n\geqq 1$ ならば $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=0<\varepsilon$ より $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$