

代数閉体の 圏論的特徴づけ

るめなる @Re1yra

2026-03-21

0 導入

1 圏論からの予備知識

2 主定理の紹介

3 主定理の証明

4 背景 — 現代（安定）ホモトピー論への誘い

0 導入

1 圏論からの予備知識

2 主定理の紹介

3 主定理の証明

4 背景 — 現代（安定）ホモトピー論への誘い

この発表の目標

今回のメインテーマは、**代数閉体** である。

◆ Definition — 復習

体 k が**代数閉体**であるとは、任意の定数でない多項式 $f(x) \in k[x]$ に対して、ある $a \in k$ が存在して、 k において $f(a) = 0$ が成り立つことをいう。

◆ Example — 代数学の基本定理

複素数体 \mathbb{C} は代数閉体である。

代数閉体は、環論や表現論、代数幾何学などの領域で重要な役割を果たす。

この発表の目標

代数閉体について成り立つ定理として、**Hilbert の弱零点定理**がある。

■ **Theorem** —— Hilbert の弱零点定理 (Hilbert's weak Nullstellensatz)

k を代数閉体とする。このとき、任意の整数 $m, n \geq 1$ と任意の多項式

$f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ に対し、 $(f_1, \dots, f_m) \neq (1)$ なら、ある $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ が存在して、 k において

$$f_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = f_m(a_1, \dots, a_n) = 0$$

が成り立つ。

すなわち、(自明に解がない場合を除き) **多変数の連立方程式**の解の存在も言える。

この発表の目標

代数閉体は、(i) 多項式の (ii) 根の存在 という**代数的な条件**により定義されていた。

(i) も (ii) も、古典的な意味での代数を象徴するような要素だろう。

本発表では、**一見すると完全に代数的なものに見えるこの条件が、実は純粹に圏論的な条件として言い換えられる**ということを紹介する。

すなわち、代数閉体の定義を、その条件内に「多項式」や「根」といった代数的な要素を（さらには体であるという条件すらも！）全く用いずに書き表すことができるのである。

発表の流れ

1. 「純粋に圏論的な条件」が具体的にどんなものなのかを述べるために必要な圏論の知識について説明する。
 - ▶ 説明する概念：フィルター余極限、コンパクト対象
2. 「純粋に圏論的な条件」を定義し、主定理（代数閉体の特徴づけ）を述べる。
3. 主定理を証明する。
4. 今回の話の元ネタについて大まかに触れたあと、そこで扱われているトピックである“安定ホモトピー論における代数構造”について時間の許す限り説明する。

0 導入

1 圏論からの予備知識

2 主定理の紹介

3 主定理の証明

4 背景 — 現代（安定）ホモトピー論への誘い

圏に関する用語・記法

はじめに、今回の発表で用いる用語と記法について述べておく。

1. 圏 C が **small** \Leftrightarrow C の対象全体と C の射全体がそれぞれ集合をなす。
2. 圏 C が **余完備** \Leftrightarrow 任意の small な圏 J と関手 $F : J \rightarrow C$ に対し、 C において F の余極限が存在する。
3. 圏 C と対象 $X, Y \in C$ に対して、 $\text{Hom}_C(X, Y)$ を X から Y への C の射全体のなす集合とする。

詳しい人向け注意：圏は locally small であると仮定する。

4. 圏 C と対象 $X \in C$ に対して、 $C_{X/}$ を **余スライス圏** (coslice category) とする。
 X/C と書かれることもある。

圏に関する用語・記法

5. CRing を可換環全体のなす圏とする。
6. 可換環 A に対して、 CAlg_A を可換 A 代数全体のなす圏とする。

ここで、圏同値 $\text{CAlg}_A \simeq \text{CRing}_{A/}$ が存在することを思い出しておく。

\simeq 可換 A 代数 R を与えることと、可換環 R と環準同型 $\varphi : A \rightarrow R$ の組 (R, φ) を与えることは等価である。

フィルター余極限

フィルター余極限とは、フィルター圏で添字付けられた余極限のことである：

◆ Definition — filtered category

圏 \mathcal{J} が **フィルター圏** であるとは、 \mathcal{J} が次の 3 条件をみたすことをいう。

- (1) \mathcal{J} は空でない。
- (2) $i_1, i_2 \in \mathcal{J}$ なら、ある対象 $j \in \mathcal{J}$ と 2 つの射 $i_1 \rightarrow j$ と $i_2 \rightarrow j$ が存在する。
- (3) \mathcal{J} の 2 つの射 $f, g : i \rightarrow j$ に対し、ある射 $h : j \rightarrow k$ が存在して、

$$h \circ f = h \circ g$$

が成り立つ。

フィルター余極限

◆ Definition — filtered colimit

圏 C 、small な圏 J 、関手 $F : J \rightarrow C$ に対して、 J がフィルター圏であるとき、 F の余極限を**フィルター余極限**という。

Remark 「なぜ filtered な余極限を考えるのか」についてはいくつかの解答が考えられるが、ここでは次に定義する**コンパクト対象**の概念が“うまくいく”からだと考えることにして、詳述せず先に進む。

コンパクト対象

コンパクト対象とは、その圏における対象の“有限性”をうまく圏論的に表したものであると解釈できる。まずは定義を述べる。

コンパクト対象

◆ Definition — compact object

\mathcal{C} を余完備な圏とする。対象 $X \in \mathcal{C}$ が **コンパクト** であるとは、任意の small なフィルター圏 \mathcal{J} と任意の関手 $Y : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ に対して、colimit の普遍性から定まる次の canonical な写像が全単射であることをいう：

$$\operatorname{colim}_{i \in \mathcal{J}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y(i)) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \operatorname{colim}_{i \in \mathcal{J}} Y(i)).$$

Remark この条件は、「関手 $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \operatorname{Set}$ がフィルター余極限を保つこと」とも言い換えられる。

コンパクト対象

なぜコンパクト対象が対象の“有限性”を表していると思えるのかは、コンパクト対象の例を考えることで明らかになる。

◆ Example — コンパクト対象の例

- (1) 集合の圏 Set におけるコンパクト対象 = 有限集合
- (2) アーベル群の圏 Ab におけるコンパクト対象 = 有限生成アーベル群
- (3) 群の圏 Grp におけるコンパクト対象 = 有限表示群

今回重要になるのは、可換 A 代数の圏 CAlg_A におけるコンパクト対象である。

コンパクト対象

◆ Definition — 有限表示 A 代数

A を可換環とし、 R を可換 A 代数とする。 R が**有限表示**であるとは、ある整数 $n \geq 1, m \geq 0$ と多項式 $f_1, \dots, f_m \in A[x_1, \dots, x_n]$ と A 代数の同型

$$R \cong A[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)$$

が存在することをいう。

■ Proposition

可換 A 代数の圏 CAlg_A におけるコンパクト対象 = 有限表示可換 A 代数

0 導入

1 圏論からの予備知識

2 主定理の紹介

3 主定理の証明

4 背景 — 現代（安定）ホモトピー論への誘い

Nullstellensatzian object

「純粋に圏論的な条件」である、Nullstellensatzian object の概念を定義する。

◆ **Definition** — Nullstellensatzian object ; [BSY22, Definition 1.1]

\mathcal{C} を終対象をもつ余完備な圏とする。

(1) \mathcal{C} が **Nullstellensatzian** であるとは、 \mathcal{C} の終対象でない任意のコンパクト対象が始対象への射をもつことをいう。

(2) \mathcal{C} の対象 $A \in \mathcal{C}$ が **Nullstellensatzian** であるとは、 A が \mathcal{C} の終対象でなく、かつ余スライス圏 $\mathcal{C}_{A/}$ が (1) の意味で Nullstellensatzian であることをいう。

Nullstellensatzian object

次が、この発表の主定理である。

■ Theorem ——— 代数閉体の圏論的特徴づけ

A を可換環とする。このとき、次の 2 条件は同値である。

- (1) A は代数閉体である。
- (2) A は可換環の圏 CRing の対象として Nullstellensatzian である。

Remark 注目すべきは、“Nullstellensatzian” の定義には完全に圏論の言葉しか使っていなかったことである！

0 導入

1 圏論からの予備知識

2 主定理の紹介

3 主定理の証明

4 背景 — 現代（安定）ホモトピー論への誘い

証明

以下、主定理の証明を紹介する。

実は、冒頭でも述べた **Hilbert の弱零点定理** が証明の鍵となるのである！

■ Theorem — Hilbert's weak Nullstellensatz

k を代数閉体とする。このとき、任意の整数 $m, n \geq 1$ と任意の多項式

$f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ に対し、 $(f_1, \dots, f_m) \neq (1)$ なら、ある $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ が存在して、 k において

$$f_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = f_m(a_1, \dots, a_n) = 0$$

が成り立つ。

証明

「Hilbert の弱零点定理が成り立つ」ということを条件化しておく。

◆ Definition ——— 弱零点定理をみたす可換環

A を可換環とする。このとき、 A が **弱零点定理をみたす** とは、 A に対して Hilbert の弱零点定理の主張が成り立つことをいう。

すなわち、任意の整数 $m, n \geq 1$ と任意の多項式 $f_1, \dots, f_m \in A[x_1, \dots, x_n]$ に対し、 $(f_1, \dots, f_m) \neq (1)$ なら、ある $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ が存在して、 A において

$$f_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = f_m(a_1, \dots, a_n) = 0$$

が成り立つ。

証明

すると、Hilbert の弱零点定理から次が成り立つ。

■ Theorem — Hilbert の弱零点定理の別の形

可換環 A に対して、次の 2 条件は同値である。

- (1) A は代数閉体である。
- (2) A は零環でなく、弱零点定理をみたす。

proof) (1) \Rightarrow (2) が Hilbert の弱零点定理そのものである。

(2) \Rightarrow (1) は明らかである。

□

証明

これを用いれば、主定理は次のように言い換えられる。

■ Proposition —— 主定理の言い換え

可換環 A に対して、次の 2 条件は同値である。

- (1) A は零環でなく、弱零点定理をみたす。
- (2) A は可換環の圏 CRing の対象として Nullstellensatzian である。

Remark これは「弱零点定理の圏論的解釈」とも思える。

よって、あとはこの命題を示せばよい。

証明

命題の証明に入る前に、それに使う事実を復習しておく。

A を可換環とすると、写像

$$\Phi : \text{Hom}_{\text{CAlg}_A}(A[x_1, \dots, x_n], A) \rightarrow A^n ; \phi \mapsto (\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))$$

は全単射であった (“ A 代数の準同型” の条件を使えばそのまま示せる)。

すると、この全単射によって次の全単射が定まる。

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\text{CAlg}_A}(A[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m), A) \\ & \xrightarrow{\cong} \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid f_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = f_m(a_1, \dots, a_n) = 0\} \end{aligned}$$

証明

proof of Proposition) A を可換環とする。

A が可換環の圏 CRing の対象として Nullstellensatzian

= A が CRing の終対象でなく、余スライス圏 $\text{CRing}_{A/}$ が Nullstellensatzian

= A が零環でなく、終対象でない $\text{CRing}_{A/}$ の任意のコンパクト対象が

始対象への射をもつ

= A が零環でなく、**終対象**でない CAlg_A の任意の**コンパクト対象**が

始対象への射をもつ

証明

= A が零環でなく、 0 でない CAlg_A の任意の

$$A[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m) \quad (m, n \geq 1, f_1, \dots, f_m \in A[x_1, \dots, x_n])$$

という形の対象が A への射をもつ

※ $m = 0$ の場合は $A[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A$ があるから考えなくてよい

= A が零環でなく、任意の $m, n \geq 1$ と $f_1, \dots, f_m \in A[x_1, \dots, x_n]$ に対して、

$A[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m) \neq 0$ なら、**ある A 代数準同型**

$$A[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m) \rightarrow A$$

が存在する

証明

(ここで先程の観察を用いる)

= A が零環でなく、任意の $m, n \geq 1$ と $f_1, \dots, f_m \in A[x_1, \dots, x_n]$ に対して、

$(f_1, \dots, f_m) \neq (1)$ なら、ある $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ が存在して

$$f_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = f_m(a_1, \dots, a_n) = 0$$

をみたす

= A が零環でなく、弱零点定理をみたす

□

これにて主定理の証明が完了した。

0 導入

1 圏論からの予備知識

2 主定理の紹介

3 主定理の証明

4 背景 — 現代（安定）ホモトピー論への誘い

応用できる？

代数閉体を、可換環の圏 \mathbf{CRing} における Nullstellensatzian object として圏論的な条件で特徴づけられることが分かった。

Q. このことの嬉しさはある？

A. \mathbf{CRing} 以外の (“適切な”) 圏 \mathbf{C} における Nullstellensatzian object を、 **\mathbf{C} における代数閉体対象**とみなすことの正当化を与える。

応用できる？

実は今回の話の元ネタは、**安定ホモトピー論**という（一般的には）代数トポロジーの分野（とされている領域）の論文

R. Burklund, T. Schlank, and A. Yuan, “The Chromatic Nullstellensatz”, arxiv:2207.09929.

である。Nullstellensatzian の概念を初めて導入したのはこの論文である。

この論文での 1 つの結果として、安定ホモトピー論に由来する、“**環っぽい**” とある**数学的概念全体のなす圏における Nullstellensatzian object** が、それより前から知られていた“**代数閉体と思えるような特徴をもつ**”対象のクラスと一致することが示されている。

応用できる？

ここでは、専門的になりすぎるため、この結果自体については説明しない。

代わりに、Nullstellensatzian object の話題からは離れて、この論文で扱われているような話題の文脈となる、**安定ホモトピー論における代数構造**の話をする。

しかし、この時間では厳密な話は一切できないため、雰囲気の説明にとどめる。

※ ただし、私自身の興味関心によるバイアスがかかっている（というより、意図的にかけている）ため、あくまでも1つの観点からの説明ということに注意。

ホモトピー論とは何か？

最初に抽象的な話をする。

「ホモトピー論」がどのようなものなののかに関して、その1つの解釈として、

通常の数学におけるイコール (=) を、性質ではなく構造と考える分野

というものがある。

たとえば、集合 + 構造という形の代数を扱う通常の数学においては、2つの要素の間のイコールという関係を、要素の間の**一番基本的な等価性**として考える。

一方、ホモトピー論（的数学）では**そうでなく、より広い“データによる同一視”**

も含めて基本的な等価性として考える。より詳細には、2つの“要素” x, y に対し、

「あるデータ p によって x と y を同じとみなせる」なら“等価”だとして扱う。

“ホモトピー論的な”代数構造

この話を、“ホモトピー論的な”代数構造の概念を例にして具体的に説明する。

まずは通常の代数構造として、群の定義を思い出す：

◆ Definition

集合 G 、写像 $\star : G \times G \rightarrow G$ 、元 $e \in G$ 、写像 $(-)^{-1} : G \rightarrow G$ の4つ組

$(G, \star, e, (-)^{-1})$ が次の3条件をみたすとき、この4つ組を**群**という。

- (1) 任意の $x, y, z \in G$ に対し、 $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.
- (2) 任意の $x \in G$ に対し $x \star e = e \star x = x$.
- (3) 任意の $x \in G$ に対し $x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e$.

“ホモトピー論的な”代数構造

この意味での群にはならないが、“イコールを弱めた”公理をみたす構造の例として、ループ空間がある。

◆ Definition — loop space

基点付き位相空間 (X, x_0) に対して、

$$\Omega X := \{\text{連続写像 } \gamma : [0, 1] \rightarrow X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$$

と定めると、コンパクト開位相という位相を入れることで位相空間となる。

これを**ループ空間**という。

“ホモトピー論的な”代数構造

以下、ループ空間が“群のような代数構造”をもつことを見る。

Observation

(X, x_0) を基点付き位相空間とする。

- (1) $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega X$ に対し、パスの連結によって $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \in \Omega X$ が定まる。
- (2) ずっと x_0 にとどまり続ける定値写像を $e: [0, 1] \rightarrow X$ とすると $e \in \Omega X$.
- (3) $\gamma \in \Omega X$ に対し、 γ を逆向きにたどることで $\gamma^{-1} \in \Omega X$ が定まる。

※ すなわち、 $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1 - t)$ ($t \in [0, 1]$).

“ホモトピー論的な”代数構造

🔍 Observation

すると、このとき一般には

$$(1) (\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 \neq \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$$

$$(2) \gamma \cdot e \neq e \cdot \gamma \neq \gamma$$

$$(3) \gamma \cdot \gamma^{-1} \neq \gamma^{-1} \cdot \gamma \neq e$$

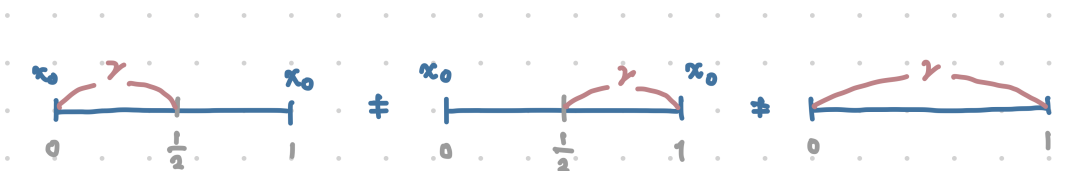
である。

特に、組 $(\Omega X, \cdot, e, (-)^{-1})$ は

群にならない。



(1) の場合



(2) の場合

“ホモトピー論的な”代数構造

Observation

しかし、実はイコールをホモトピック関係 \simeq に置き換えた条件が成り立つ！

(1) $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 \simeq \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$ を与えるホモトピー α が作れる。

(2) $\gamma \cdot e \simeq \gamma$ と $e \cdot \gamma \simeq \gamma$ を与えるホモトピー u_r, u_l が作れる。

(3) $\gamma \cdot \gamma^{-1} \simeq e$ と $\gamma^{-1} \cdot \gamma \simeq e$ を与えるホモトピー i_r, i_l が作れる。

(補足：基本群が群になることの証明は、この3つを示すことで行われる)

これがまさに“データによる同一視”の代表例である。 ここでは、“データ”がホモトピーに対応する。

“ホモトピー論的な”代数構造

Observation

ここで、ループの演算を複数行った状況を考えてみる。たとえば、

$$\gamma \stackrel{u_r}{\simeq} \gamma \cdot e \stackrel{i_l}{\simeq} \gamma \cdot (\gamma^{-1} \cdot \gamma) \stackrel{\alpha}{\simeq} (\gamma \cdot \gamma^{-1}) \cdot \gamma \stackrel{i_r}{\simeq} e \cdot \gamma \stackrel{u_l}{\simeq} \gamma$$

という“式変形”ができる。

これをすべて“合成”して得られるホモトピーを $p : [0, 1]^2 \rightarrow X$ とする。

一方、よりシンプルな式変形として、恒等ホモトピーによるホモトピック関係

$$\text{id}_\gamma : \gamma \simeq \gamma$$

がある。

“ホモトピー論的な”代数構造

Observation

群の公理の場合でそうであったように、一般には $p \neq \text{id}_\gamma$ である。

しかし、 p と id_γ を結ぶホモトピーも作れる！

一般に、このようにループの演算 $\cdot, e, (-)^{-1}$ を複数組み合わせると、

$\alpha, u_r, u_l, i_r, i_l$ (と id) を組み合わせて複数通りのホモトピーが作れるが、実はそれらのホモトピーはすべて互いにホモトピーで結べる！

Remark これは $\alpha, u_r, u_l, i_r, i_l$ の存在**のみから**したがうわけではない！

“ホモトピー論的な”代数構造

状況をまとめると以下のようなになる。

- ΩX の元はループ γ で、ループに関する演算 $\cdot, e, (-)^{-1}$ が構成できる。(0 階層目)
- 結合法則、単位律、逆元の存在に対応する、ループの間のホモトピー $\alpha, u_r, u_l, i_r, i_l$ が構成できる。(1 階層目)
- これらのホモトピーを組み合わせて 2 通りのホモトピー $p, q : \gamma \simeq \gamma'$ が作れたら、そのホモトピーの間のホモトピー $\Phi : p \simeq q$ が構成できる。(2 階層目)

さらに、このホモトピーの間のホモトピーたちを組み合わせてできる複数通りのホモトピーたち (2 階層目) も互いにホモトピー (3 階層目) で結べる。

実は、**これがすべての階層について言える！**

“ホモトピー論的な”代数構造

以上の観察で述べてきたことを標語的にまとめると、次のようになる。

★ Summary

- 通常の群は、「演算のデータがあり、演算のみたす公理がイコールを用いて述べられる条件（≠ データ）として課されている」ような構造だった。
- ループ空間は、「演算のデータがあり、かつ公理に対応する同一視データがあり、その同一視データたちの“整合性”を保証する同一視データがあり、それらの“整合性”を保証する同一視データがあり、さらにそれらの…（以下略）」という、**無限通り**かつ**無限階層分**のデータからなる構造を持っている。

“ホモトピー論的な”代数構造

このような、

「演算 + 公理を表す同一視データ + 無限通り・無限階層分の“整合性”データ」

からなる構造は、**homotopy coherent structure** などと呼ばれる¹。

そして、homotopy coherent な群構造のことを、 **\mathbb{E}_1 -group**² という。

■ Proposition

基点付き位相空間 (X, x_0) に対し、ループ空間 ΩX は \mathbb{E}_1 -group の構造をもつ。

¹厳密な定義があるわけではなく、そのような構造を指す俗称として用いられている。

²grouplike \mathbb{E}_1 -monoid と呼ぶこともある。また、これには厳密な定義がある。

“ホモトピー論的な”代数構造

Remark —— どのように定式化されるのか？

homotopy coherent structure についてここでは気持ちの説明にとどめたが、次は自然な疑問だろう：


無限階層分のデータをどのように扱えばよいのか？

このようなデータを適切に束ねてうまく扱える道具が ∞ -圏である。 ∞ -圏は homotopy coherent 版の圏であると言え、様々な homotopy coherent structure の厳密な定式化を与えるのに ∞ -圏の言葉が用いられる。現代のホモトピー論においては homotopy coherent structure が非常に重要な役割を果たしているため、 ∞ -圏がいたるところで使われている。

homotopy coherent な可換性

次に、homotopy coherent な可換性の概念について説明する。

再びループ空間を例にとる。

 **Observation** — ループ空間は一般には“非可換”

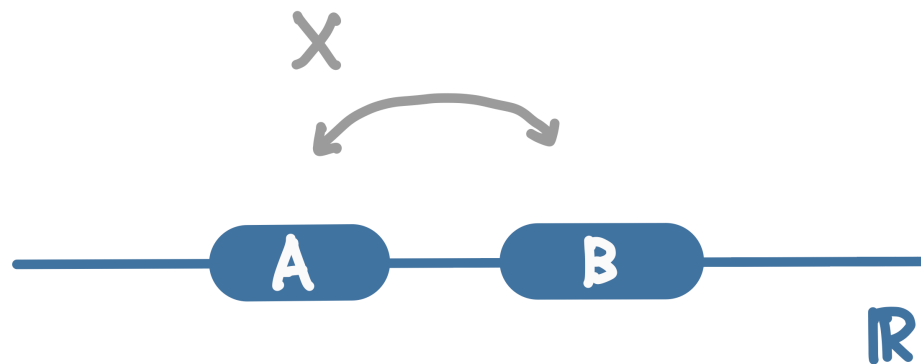
ループ $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega X$ に対して、 $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \simeq \gamma_2 \cdot \gamma_1$ が成り立つとは限らない。

(これは言い換えると、位相空間の基本群が非可換群になりうるということ。)

homotopy coherent な可換性

🔍 Observation — ループ空間は一般には“非可換”

ループ空間の演算の“可換度合い”は、次のように図示できる：



つまり、「 \mathbb{R} 内の 2 点の位置を連続的に動かして重ねずに入れ替える」のと同じくらいの可換度合いだと言える（不可能だから非可換）。

homotopy coherent な可換性

ここで、演算が“可換な”例として 2 重ループ空間を紹介する。

ループ空間 ΩX に対して、その単位元 $e \in \Omega X$ を基点とすることで、そのループ空間 $\Omega(\Omega X)$ を考えることができる。これを **2 重ループ空間** といい、 $\Omega^2 X$ で表す。

Observation

$\alpha \in \Omega^2 X$ は連続写像 $\alpha : [0, 1]^2 \rightarrow X$ であって $\alpha(\partial[0, 1]^2) = \{x_0\}$ なるものと 1 対 1 に対応する。

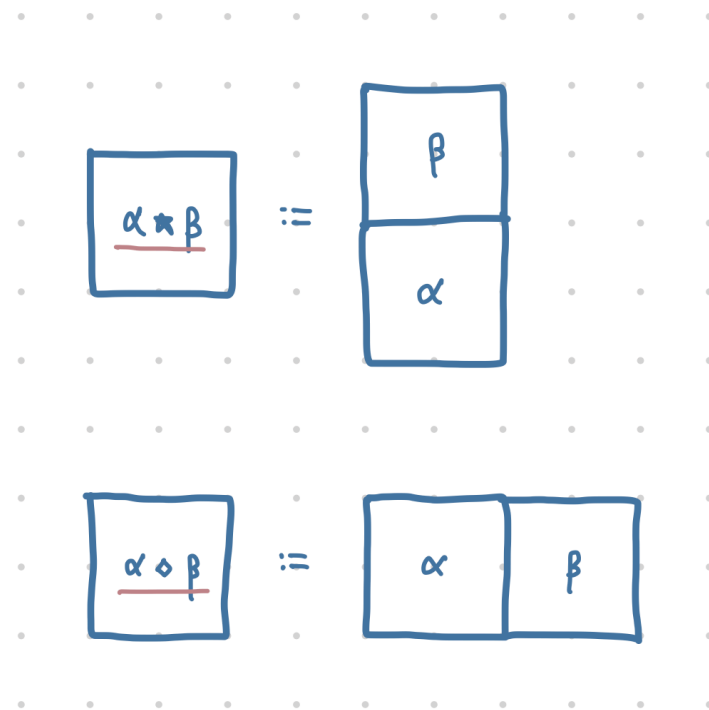
よって α は正方形として図示できる（境界は 1 点につぶれるとする）。

homotopy coherent な可換性

🔍 Observation

これより、ループ空間から来る $\Omega^2 X$ 上の演算とは別のもうひとつの演算が考えられる。

2つの演算を \star と \diamond で表す。



2つの演算

homotopy coherent な可換性

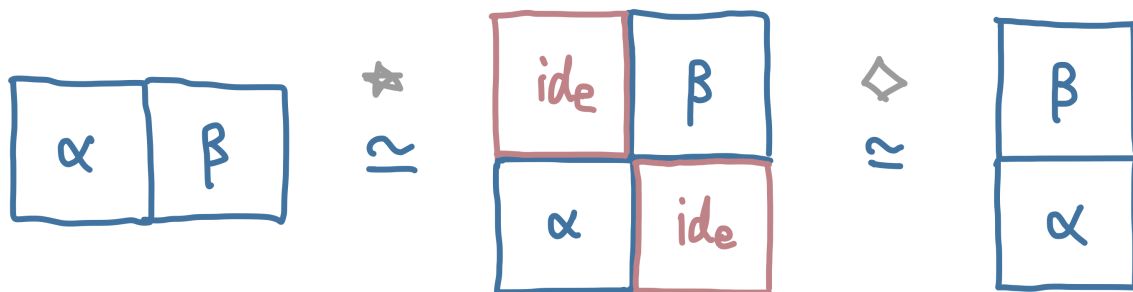
🔍 Observation

$e \in \Omega X$ を取り続ける定値写像を $\text{id}_e : [0, 1] \rightarrow \Omega X$ とすると $\text{id}_e \in \Omega^2 X$ であり、

\star と \diamond は id_e に関するホモトピック版の単位律をみたす。

実は、ここから $\alpha \star \beta \simeq \alpha \diamond \beta$ と $\alpha \star \beta \simeq \beta \star \alpha$ が言える！

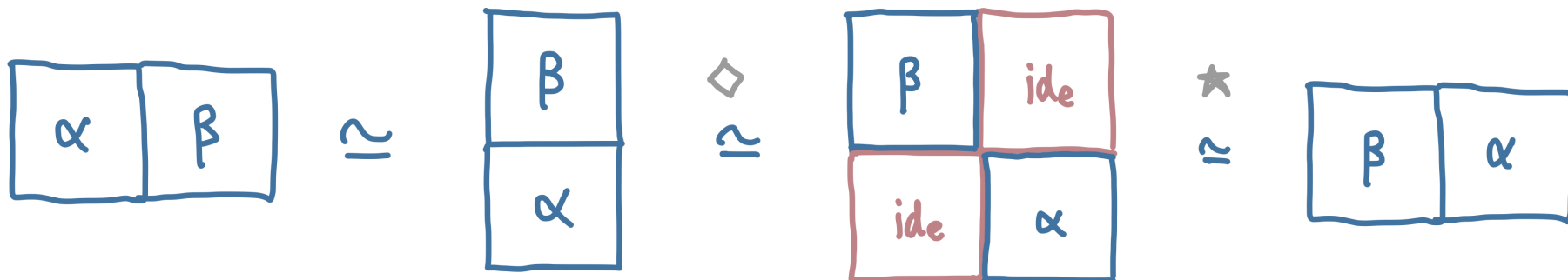
前者：



homotopy coherent な可換性

🔍 Observation

後者：



このような議論は **Eckmann-Hilton argument** と呼ばれている。

以上の合成で定まる $\alpha \star \beta$ から $\beta \star \alpha$ へのホモトピーを B で表す。

homotopy coherent な可換性

さて、ループ空間においては、結合律・単位律・逆元の存在に対応するホモトピーたちは、それらの任意の組み合わせに対する高次の“整合性”データを備えていた。

2重ループ空間では、可換律に対応するホモトピー $B: \alpha \star \beta \simeq \beta \star \alpha$ が作れた。

では、 B との組み合わせも含めたとき、任意の組み合わせと任意の階層において、“整合性”データが定まるのだろうか？

→ 実は答えは **No** である。

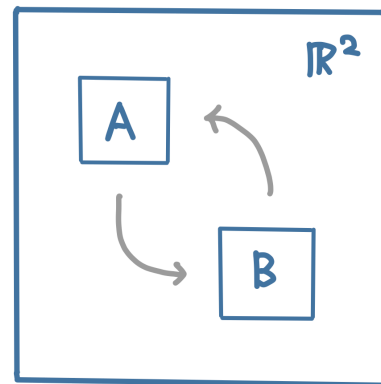
◆ Example

$B^2: \alpha \star \alpha \simeq \alpha \star \alpha$ が $\text{id}_{\alpha \star \alpha}$ とホモトピックにならない $\alpha \in \Omega^2 S^2$ がある。

homotopy coherent な可換性

先の観察から、2重ループ空間の“可換度合い”は、右のように図示できる。

つまり、「 \mathbb{R}^2 内の2点の位置を連続的に動かして重ねずに入れ替える」と同程度の可換度合いだと言える。



このような可換度合いの可換性データを備えた \mathbb{E}_1 -group を \mathbb{E}_2 -**group** という。

Remark \mathbb{E}_2 -group は、 \mathbb{E}_1 -group 上の構造であって、性質ではない。

homotopy coherent な可換性

では、さらにループ空間をとっていったらどうなるだろうか？

1. 帰納的に $\Omega^n X := \Omega(\Omega^{n-1} X)$ と定義する。
2. $\alpha \in \Omega^n X$ は境界がすべて 1 点と同一視される n 次元立方体と思える。
3. すると連結する方向が n 通りあるためその分演算が定まるが、Eckmann–Hilton argument によってすべてホモトピックとなる。
4. そして、 n 重ループ空間の“可換度合い”は「 \mathbb{R}^n 内の 2 点の位置を連続的に動かして重ねずに入れ替える」のと同じくらいだと言える。

このような可換度合いの可換性データを備えた \mathbb{E}_1 -group を \mathbb{E}_n -**group** という。

※ \mathbb{E}_n -group の構造は \mathbb{E}_{n-1} -group の構造を定める。

homotopy coherent な可換性

n が増えると \mathbb{R}^n 内で 2 点を動かす際の“自由度”が高くなるため、それに応じて演算の“可換度合い”が高くなる（そして“整合性”データが増える）と予想できる。

実際に、たとえば次が成り立つ。

■ Proposition

$n \geq 3$ とし、 $\alpha, \beta \in \Omega^n X$ とする。 $\Omega^n X$ の 2 重ループ空間としての構造から定まるホモトピー $B : \alpha \star \beta \simeq \beta \star \alpha$ を考えると、 $B^2 \simeq \text{id}_{\alpha \star \beta}$ が成り立つ。

先程見たように、これは 2 重ループ空間の場合は一般には成り立たない！

homotopy coherent な可換性

では、ループ空間を無限回とったらどうなるだろうか？

◆ Definition — infinite loop space

基点付き位相空間 Y が**無限ループ空間**であるとは、基点付き空間のある可算無限列 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ と弱ホモトピー同値

$$Y \xrightarrow{\sim} X_0,$$

$$X_n \xrightarrow{\sim} \Omega X_{n+1} \quad (n \geq 0)$$

が存在することをいう。

homotopy coherent な可換性

無限ループ空間の“可換度合い”は「 \mathbb{R}^∞ 内の 2 点の位置を連続的に動かして重ねずに入れ替える」のと同じくらいだと言える。

すると、無限の自由度があるのだから、“フルに可換”であると予想できる。

実際、ここまで来て初めて、結合律・単位律・逆元の存在に対応するホモトピーに $B : \alpha \star \beta \simeq \beta \star \alpha$ を入れたときの任意の組み合わせが、任意の階層における“整合性”データを**すべて**持つ！

このように“フルに可換な”可換性データを備えた \mathbb{E}_1 -group を \mathbb{E}_∞ -**group** という。

homotopy coherent な可換性

★ Summary

- $1 \leq n \leq \infty$ に対し、 n 重ループ空間は「 \mathbb{R}^n 内の 2 点を連続的に動かして重ねずに入れ替える」のと同程度の“可換性”をもつ。これを \mathbb{E}_n **可換性** という。
- $1 \leq n < \infty$ のとき、 \mathbb{E}_n 可換性は高次の“整合性”データをフルにはもたないが、 n が大きくなるほど、持っている“整合性”データの量が増える。
- 無限ループ空間は可換性に関する高次の“整合性”データをフルに持つ。

特に、**homotopy coherent structure** に対しては、**非可換 (\mathbb{E}_1) と可換 (\mathbb{E}_∞) の間に可算無限の階層が生まれるのである！**

homotopy coherent な可換性

多重ループ空間を例に、homotopy coherent structure について説明してきた。
最後に次の定理を紹介して、安定ホモトピー論の話に移る。

■ Theorem — May recognition principle (May, 1972)

Y を基点付き位相空間、 $n \geq 1$ とする。このとき、次の 2 条件は同値である。

- (1) Y が \mathbb{E}_n -group の構造を持つ。
- (2) ある基点付き $(n - 1)$ 連結位相空間 X と弱ホモトピー同値 $Y \simeq \Omega^n X$ が存在する。

※ $n \geq 0$ に対し位相空間 X が n **連結** \Leftrightarrow 任意の $k \leq n$ と $x \in X$ に対し $\pi_k(X, x) \cong 0$.

安定ホモトピー論

安定ホモトピー論における中心的な数学的対象は **spectrum**¹ である。

spectrum に関する説明をする時間がないため、ここではそういう概念があることは認めて、それを使ってどんなことができるのかを説明することにする。

spectrum 全体のなす圏²を Sp とかく。これは対称モノイダル圏になる。

各整数 $n \in \mathbb{Z}$ と spectrum X に対して、 X の n **次ホモトピー群** $\pi_n X$ という Abel 群が定まり、これは関手 $\pi_n : \mathrm{Sp} \rightarrow \mathrm{Ab}$ を与える。

また、忠実充満関手 $H : \mathrm{Ab} \hookrightarrow \mathrm{Sp}$ が存在し、各 $A \in \mathrm{Ab}$ に対し $\pi_n HA \cong \begin{cases} A & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$ 。

¹環のスペクトラム Spec や関数解析における spectrum のことではない。

²詳しい人向け注意：以降、単に圏といったら ∞ -圏のことを指す。

安定ホモトピー論

◆ Definition

各 $1 \leq n \leq \infty$ に対して、 Sp における \mathbb{E}_n -monoid object を \mathbb{E}_n -**ring** という。

\mathbb{E}_n -ring 全体のなす圏を $\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_n}$ とかく。

Remark \mathbb{E}_2 -ring R に対して $\pi_* R$ は graded-commutative ring となる。

Remark A が可換環なら HA は \mathbb{E}_∞ -ring になる。

安定ホモトピー論

◆ Example

$\text{Alg}_{\mathbb{E}_\infty}$ の始対象を \mathbb{S} とかき、**sphere spectrum** という。

\mathbb{S} は負ホモトピー群を持たず、各 $n \geq 0$ に対して $\pi_n \mathbb{S}$ は**球面の n 次安定ホモトピー群**と同型になる。

\mathbb{E}_∞ -ring R に対して、それ上の加群の圏 Mod_R が定義でき、対称モノイダルになる。

◆ Example

$\text{Mod}_{\mathbb{S}} \simeq \text{Sp}$ となる。また、可換環 A に対して $\text{Mod}_{\text{HA}} \simeq D(A)$ (A の導来 ∞ -圏)。

安定ホモトピー論

また、関手 $S[-] : \text{Top} \rightarrow \text{Mod}_S$ が存在する（弱ホモトピー同値は同型に移る）。

■ Proposition ——— 位相空間のホモロジー群との関係

X を位相空間とし、 A を可換環とする。

S が始対象だから \mathbb{E}_∞ -ring の射 $S \rightarrow HA$ が存在し、これによる係数拡大関手

$$- \otimes_S HA : \text{Mod}_S \rightarrow \text{Mod}_{HA}$$

が存在するが、このとき $\text{Mod}_{HA} \simeq D(A)$ における同型

$$HA[X] := S[X] \otimes_S HA \simeq C_*(X; A)$$

が存在し、特に Abel 群の同型 $\pi_n(HA[X]) \cong H_n(X; A)$ が存在する。

安定ホモトピー論

■ Proposition ——— 位相空間のコホモロジー群との関係

X を位相空間、 A を可換環とする。

このとき、Hom 加群 $\text{Hom}_{\text{HA}}(\text{HA}[X], \text{HA}) \in \text{Mod}_{\text{HA}}$ が定まり、同型

$$\text{HA}[X]^{\vee} := \text{Hom}_{\text{HA}}(\text{HA}[X], \text{HA}) \simeq C^*(X; A)$$

が存在し、特に Abel 群の同型 $\pi_{-n}(\text{HA}[X]^{\vee}) \cong H^n(X; A)$ が存在する。

Remark 一般に、spectrum E に対して $\pi_*(\mathbb{S}[-] \otimes_{\mathbb{S}} E) : \text{Top} \rightarrow \text{GrAb}$ は一般ホモロジー論を定め、 $\pi_{-*}\text{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathbb{S}[-], E) : \text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{GrAb}$ は一般コホモロジー論を定める。

安定ホモトピー論

Remark \mathbb{E}_∞ -ring の例として KU, KO, MO, MSO が存在し、それぞれが定まる一般コホモロジー論は複素 K 理論、実 K 理論、unoriented cobordism、oriented cobordism となる。

◆ Example

トーラス $T^2 := S^1 \times S^1$ を考えると、 $H_n(T^2; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0) \\ \mathbb{Z}^{\oplus 2} & (n=1) \\ \mathbb{Z} & (n=2) \\ 0 & (n \geq 3) \end{cases}$ となる。実は、これに対応

することが \mathbb{S} 加群レベルで言える： $\mathbb{S}[T^2] \simeq \mathbb{S} \oplus (\Sigma\mathbb{S})^{\oplus 2} \oplus \Sigma^2\mathbb{S}$ が存在する。

両辺に $H\mathbb{Z}$ をテンソルすれば $H_n(T^2; \mathbb{Z})$ の計算結果が得られる。

安定ホモトピー論

Remark 他にも、 \mathbb{E}_∞ -ring に対する局所化や完備化などの操作ができる。しかしイデアルの概念が（素朴には）考えられず、剰余に環構造が入るかは delicate な問題。

前半の話の元となった論文では、各 $n \geq 0$ と素数 p に対して定まる $\text{Alg}_{\mathbb{E}_\infty}$ の充満部分圏である $T(n)$ -local \mathbb{E}_∞ -ring のなす圏における Nullstellensatzian object を、それ以前から知られていた対象として特徴づけている（代数閉体に付随して定まる Lubin–Tate spectrum と呼ばれるもの）。

まとめ

★ Summary

- “ホモトピー論的”代数は、多重ループ空間に代表されるような、公理に対応する同一視データとそれらの高次の“整合性”データからなる構造をもつ。
- 安定ホモトピー論の中心的概念である spectrum の言葉を用いると、代数トポロジーの結果を“空間レベルで”“代数的に”解釈できることがある。
- spectrum の世界における homotopy coherent な可換環概念が \mathbb{E}_∞ -ring であり、それに対する“可換環論”の理論が色々考えられている。
- 代数閉体を通常可換環の圏 CRing において圏論的条件で特徴づけられる。これにより、 \mathbb{E}_∞ -ring (の充満部分圏) における“代数閉体”の概念が考えられる。

ご清聴ありがとうございました！