λ 環について

だいたい全部まなぶ

March 20, 2026

Outline

対称多項式の定義

Definition

$n \geq 1$ を自然数とする．整数係数多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ が対称多項式であるとは任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について $f(x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ であるときを言う．

対称多項式の定義

Definition

$n \geq 1$ を自然数とする．整数係数多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ が対称多項式であるとは任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について $f(x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ であるときを言う．

Remark

つまり $\mathbb{Z}[x_1, \ldots x_n]$ への $\mathfrak{S}_n$ の自然な作用に関する不変部分 $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の元のことである．

基本対称式

Example

$n \geq 1,\ 1 \leq i \leq n$ を自然数とする．このとき n 変数多項式 e_i を

$$e_i = \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq i} x_{k_j}$$

で定めるとこれは対称多項式になる．これを基本対称式と呼ぶ．
たとえば $n = 3$ のとき

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ e_2 &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 \\ e_3 &= x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

である．

冪和対称式

Example

$n \geq 1$, $i \geq 1$ を自然数とする．このとき n 変数多項式 p_i を

$$p_i = \sum_{1 \leq k \leq n} x_k^i$$

で定めるとこれは対称多項式になる．これを冪和対称式と呼ぶ．
たとえば $n = 3$ のとき

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ p_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ p_3 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

である．

対称式の基本定理

Theorem

任意の整数係数対称多項式は基本対称式の多項式で一意的に書き表せられる．したがって $\mathbb{Z}[x_1, \ldots x_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Z}[e_1, \ldots, e_n]$ である．

対称式の基本定理

Theorem

任意の整数係数対称多項式は基本対称式の多項式で一意的に書き表せられる．したがって $\mathbb{Z}[x_1, \dots x_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_n]$ である．

Example

冪和対称式を基本対称式で書き表してみると

$$\begin{aligned} p_1 &= e_1 \\ p_2 &= e_1^2 - 2e_2 \\ p_3 &= e_1^3 - 3e_1 e_2 + 3e_3 \end{aligned}$$

となる．

対称式の基本定理

Theorem

任意の整数係数対称多項式は基本対称式の多項式で一意的に書き表せられる．したがって $\mathbb{Z}[x_1, \ldots x_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Z}[e_1, \ldots, e_n]$ である．

Example

冪和対称式を基本対称式で書き表してみると

$$\begin{aligned} p_1 &= e_1 \\ p_2 &= e_1^2 - 2e_2 \\ p_3 &= e_1^3 - 3e_1 e_2 + 3e_3 \end{aligned}$$

となる．

疑問: 冪和対称式を基本対称式で書き下す具体的な式はあるか？

母関数

Definition

n 変数多項式を係数に持つ t に関する形式的冪級数 $E(x;t), P(x;t)$ を

$$
\begin{aligned}
E(x;t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k \\
P(x;t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} t^k
\end{aligned}
$$

と定める．ここで $k=0$ について $e_0 = 1$, $k > n$ について $e_k = 0$ とする．

基本対称式の母関数

Proposition

$$E(x;t) = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i t).$$

冪和対称式の母関数

Proposition

$\exp(-P(x;t)) = E(x;-t).$

Proof.

計算してみると

$$P(x;t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} t^k$$

Proof.

計算してみると

$$
\begin{aligned}
P(x;t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} t^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_1 t)^k + \cdots + (x_n t)^k}{k}
\end{aligned}
$$

Proof.

計算してみると

$$
\begin{aligned}
P(x;t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} t^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_1 t)^k + \cdots + (x_n t)^k}{k} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \log(1 - x_i t)
\end{aligned}
$$

Proof.

計算してみると

$$
\begin{aligned}
P(x;t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} t^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_1 t)^k + \cdots + (x_n t)^k}{k} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \log(1 - x_i t) \\
&= -\log\left(\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t)\right)
\end{aligned}
$$

Proof.

計算してみると

$$
\begin{aligned}
P(x;t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} t^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_1 t)^k + \cdots + (x_n t)^k}{k} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \log(1 - x_i t) \\
&= -\log\left(\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i t)\right) \\
&= -\log(E(x;-t)).
\end{aligned}
$$

整理して主張を得る. □

Newton's formula

Theorem

$$p_n - p_{n-1}e_1 + \cdots + (-1)^{n-1}p_1 e_{n-1} + (-1)^n n e_n = 0$$

Newton's formula

Theorem

$$p_n - p_{n-1}e_1 + \cdots + (-1)^{n-1}p_1 e_{n-1} + (-1)^n n e_n = 0$$

Remark

これを帰納的に用いれば基本対称式を使って冪和対称式を書く式が得られる．逆に有理数係数であれば冪和対称式を使って基本対称式が書けることもわかる．

たとえば $n = 3$ のときを考える.

たとえば $n = 3$ のときを考える.
まず $e_1 = x_1 + x_2 + x_3 = p_1$ である.

たとえば $n = 3$ のときを考える．
まず $e_1 = x_1 + x_2 + x_3 = p_1$ である．
次に e_2 を考えると

$$
\begin{aligned}
e_2 &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \\
&= \frac{1}{2}\left((x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2)
\end{aligned}
$$

たとえば $n=3$ のときを考える.
まず $e_1 = x_1 + x_2 + x_3 = p_1$ である.
次に e_2 を考えると

$$\begin{aligned} e_2 &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \\ &= \frac{1}{2}\left((x_1+x_2+x_3)^2 - (x_1^2+x_2^2+x_3^2)\right) \\ &= \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2) \end{aligned}$$

同様に計算すると

$$e_3 = \frac{1}{6}p_1^3 - \frac{1}{2}p_1p_2 + \frac{1}{3}p_3$$

となる. このように有理数係数になってしまう.

Proof.

さっきの命題から

$$\exp(-P(x;t)) = E(x;-t).$$

両辺を t で微分して

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}P(x;t)\right)E(x;-t) = \frac{\partial}{\partial t}E(x;-t)$$

係数比較をして主張を得る. $\square$

無限変数の対称式

射 $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] \to \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ を $i \leq n$ に対しては $x_i \mapsto x_i$, $i = n+1$ については $x_{n+1} \mapsto 0$ で定めるとこれは対称式を対称式に移す. さらに, 基本対称式を基本対称式に移す. そこで $\lim \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ の部分環として $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots]$ を考えることができる.

Outline

謎の多項式その 1

Definition

$n, m \geq 0$ を非負整数とする．このとき多項式

$$g(t) = \prod_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq nm} (1 + x_{i_1} \ldots x_{i_m} t)$$

の t^n の係数は $x_1, \ldots, x_{nm}$ に関する対称式になる．したがって対称式の基本定理よりある nm 変数の多項式 $P_{n,m}(u_1, \ldots, u_{nm})$ が一意に存在してこの係数を $P_{n,m}(e_1, \ldots, e_{nm})$ と書くことができる．

謎の多項式その 2

Definition

$$h(t) = \prod_{i,j=1}^{n} (1 + x_i y_j t)$$

の n 次の係数は x_i, y_j それぞれに関して対称式になる．したがってある多項式 $P_n(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n)$ が存在してこの係数を $P_n(e_1(x), \ldots, e_n(x); e_1(y), \ldots, e_n(y))$ と書くことができる．

comonad

Definition

C を圏, $T : C \to C$ を関手, $\epsilon : T \to id$, $\eta : T \to T^2$ を自然変換とする.
組 (T, ϵ, η) が comonad であるとは, 以下の可換性を満たすときを言う.

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta"'] & T^2 \arrow[d, "T\eta"] \\
T^2 \arrow[r, "\eta T"'] & T^3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "id"'] \arrow[d, "\eta"] \arrow[dr, "id"] & \\
T & T^2 \arrow[l, "\epsilon T"] \arrow[r, "T\epsilon"'] & T
\end{tikzcd}
$$

coalgebra

Definition

C を圏，T をその上の comonad とする．T-coalgebra とは対象 $c \in C$ と射 $f : c \to Tc$ の組であって以下の可換性を満たすものを言う．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "id"] & \\
Tc \arrow[r, "\epsilon_c"'] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "f"] & Tc \arrow[r, shift left, "\eta_c"] \arrow[r, shift right, "Tf"'] & T^2 c
\end{tikzcd}
$$

comonad から作られる随伴

(T, ϵ, η) を C 上の comonad とするとき, 任意の対象 $c \in C$ について $(Tc, \eta : Tc \to T^2 c)$ は T-coalgebra になる.

comonad から作られる随伴

(T, ϵ, η) を C 上の comonad とするとき, 任意の対象 $c \in C$ について $(Tc, \eta : Tc \to T^2c)$ は T-coalgebra になる.
この対応により関手 $T : C \to T\text{-}coalg$ を得る. これは忘却関手 $T\text{-}coalg \to C$ の右随伴を与える.

謎の comonad

Definition

可換環 A に対し, 集合 $\Lambda(A) = 1 + tA[[t]]$ を考える. この上の元 $0_\Lambda, 1_\Lambda$ と二項演算 $+_\Lambda$, $\times_\Lambda$ をそれぞれ次で定める.

$$\begin{aligned} 0_\Lambda &= 1 \\ 1_\Lambda &= 1 + t \\ f +_\Lambda g &= fg \\ (1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n) \times_\Lambda (1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n) t^n \end{aligned}$$

謎の comonad

Definition

可換環 A に対し，集合 $\Lambda(A) = 1 + tA[[t]]$ を考える．この上の元 $0_\Lambda, 1_\Lambda$ と二項演算 $+_\Lambda$, $\times_\Lambda$ をそれぞれ次で定める．

$$
\begin{aligned}
0_\Lambda &= 1 \\
1_\Lambda &= 1 + t \\
f +_\Lambda g &= fg \\
(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n) \times_\Lambda (1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n) t^n
\end{aligned}
$$

Proposition

上で定めた演算によって $\Lambda(A)$ は可換環になる．

証明のアイデア

加法についてアーベル群になることは明らか．ここでは乗法の結合法則を示してみる．

証明のアイデア

加法についてアーベル群になることは明らか．ここでは乗法の結合法則を示してみる．
A を可換環, $f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$, $g = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n$, $h = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$ とおく．すると環準同型

$$R = \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots] \to A$$

が自然に定まる．

証明のアイデア

加法についてアーベル群になることは明らか．ここでは乗法の結合法則を示してみる．
A を可換環，$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$，$g = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n$，$h = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$ とおく．すると環準同型

$$R = \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots] \to A$$

が自然に定まる．
Λ の関手性より，最初から $A = R$ として証明してよい．

証明のアイデア

今, 射 $R \to S = \lim \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots]$ が a_i, b_i, c_i をそれぞれ x_n, y_n, z_n の i 次の基本対称多項式に送るように定める.

証明のアイデア

今, 射 $R \to S = \lim \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots]$ が a_i, b_i, c_i をそれぞれ x_n, y_n, z_n の i 次の基本対称多項式に送るように定める.
すると, 対称式の基本定理よりこれは単射である. よって, Λ の定義を見れば, 誘導される $\Lambda(R) \to \Lambda(S)$ も単射であることがわかる. よって最初から f, g, h の係数はそれぞれ x_n, y_n, z_n の基本対称式で書けているとしてよい.

証明のアイデア

今, 射 $R \to S = \lim \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots]$ が a_i, b_i, c_i をそれぞれ x_n, y_n, z_n の i 次の基本対称多項式に送るように定める.
すると, 対称式の基本定理よりこれは単射である. よって, Λ の定義を見れば, 誘導される $\Lambda(R) \to \Lambda(S)$ も単射であることがわかる. よって最初から f, g, h の係数はそれぞれ x_n, y_n, z_n の基本対称式で書けているとしてよい. この場合

$$
\begin{aligned}
(f \times_\Lambda g) \times_\Lambda h &= (1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(e_1(x), \ldots, e_n(x), e_1(y), \ldots, e_n(y))t^n) \times_\Lambda h \\
&= (\prod_{i,j \geq 1} (1 + x_i y_j t)) \times_\Lambda (1 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z) t^n) \\
&= \prod_{i,j,k \geq 1} (1 + x_i y_j z_k t) \\
&= f \times_\Lambda (g \times_\Lambda h).
\end{aligned}
$$

謎の comonad

Definition

A を可換環とする．このとき写像 $\epsilon : \Lambda(A) \to A$ を次で定める．

$$\epsilon(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n) = a_1$$

謎の comonad

Definition

A を可換環とする．このとき写像 $\epsilon : \Lambda(A) \to A$ を次で定める．

$$\epsilon(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n) = a_1$$

Proposition

これは環準同型である．

謎の comonad

Definition

A を可換環とする．このとき写像 $\eta : \Lambda(A) \to \Lambda^2(A)$ を次で定める．

$$\eta(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n$$

$$b_n = 1 + \sum_{m=1} P_{n,m}(a_1, \ldots, a_{nm}) s^m$$

謎の comonad

Definition

A を可換環とする．このとき写像 $\eta : \Lambda(A) \to \Lambda^2(A)$ を次で定める．

$$\eta(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n$$

$$b_n = 1 + \sum_{m=1} P_{n,m}(a_1, \ldots, a_{nm}) s^m$$

Proposition

これは環準同型である．

謎の comonad

Proposition

$(\Lambda, \epsilon, \eta)$ は可換環の圏上の comonad である.

謎の comonad

Proposition

$(\Lambda, \epsilon, \eta)$ は可換環の圏上の comonad である.

Definition

Λ-coalgebra のことを λ-ring と呼ぶ.

もっと具体的な定義

Definition

λ-ring とは可換環 R と写像 $\lambda^n : R \to R (n \geq 0)$ の組であって以下を満たすもののこと.

1. $\lambda^0(x) = 1$.
2. $\lambda^1(x) = x$.
3. $n \geq 2$ に対し $\lambda^n(1) = 0$.
4. $\lambda^n(x+y) = \sum_{i+j=n} \lambda^i(x)\lambda^j(y)$.
5. $\lambda^n(xy) = P_n(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^n(x); \lambda^1(y), \ldots, \lambda^n(y))$.
6. $\lambda^n(\lambda^m(x)) = P_{n,m}(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^{nm}(x))$.

上の意味での λ-ring R があると, 射 $\lambda_t : R \to \Lambda(R)$ が

$$\lambda_t(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^i(x) t^i$$

で定まる.

一般論からわかること

λ-ring の具体的な定義から, λ-ring の圏が極限, 余極限を持つことと, 忘却関手 $\lambda\text{-}Ring \to Ring$ が極限を保つことがわかる.

一般論からわかること

λ-ring の具体的な定義から, λ-ring の圏が極限, 余極限を持つことと, 忘却関手 $\lambda\text{-}Ring \to Ring$ が極限を保つことがわかる.
よって随伴関手定理より, 忘却関手が左随伴 $F : Ring \to \lambda\text{-}Ring$ を持つことがわかる.

一般論からわかること

λ-ring の具体的な定義から, λ-ring の圏が極限, 余極限を持つことと, 忘却関手 $\lambda\text{-}Ring \to Ring$ が極限を保つことがわかる.
よって随伴関手定理より, 忘却関手が左随伴 $F : Ring \to \lambda\text{-}Ring$ を持つことがわかる.
一方 comonad による定義から, 忘却関手の右随伴が $\Lambda : Ring \to \lambda\text{-}Ring$ で与えられることがわかる. 特に忘却関手は余極限を保つ.

例

$\mathbb{Z}$ は可換環の圏の始対象なので, 射 $\mathbb{Z} \to \Lambda(\mathbb{Z})$ が一意に存在する．これが $\mathbb{Z}$ 上の唯一の λ-ring structure を与える．

例

$\mathbb{Z}$ は可換環の圏の始対象なので, 射 $\mathbb{Z} \to \Lambda(\mathbb{Z})$ が一意に存在する．これが $\mathbb{Z}$ 上の唯一の λ-ring structure を与える.
この射は $\mathbb{Z}$ の乗法単位元 1 を $\Lambda(\mathbb{Z})$ の乗法単位元 $1 + t$ に移す.

例

$\mathbb{Z}$ は可換環の圏の始対象なので, 射 $\mathbb{Z} \to \Lambda(\mathbb{Z})$ が一意に存在する．これが $\mathbb{Z}$ 上の唯一の λ-ring structure を与える．
この射は $\mathbb{Z}$ の乗法単位元 1 を $\Lambda(\mathbb{Z})$ の乗法単位元 $1+t$ に移す．したがって $\lambda_t(n) = (1+t)^n$ である．特に $n \geq 1$ について $\lambda^k(n) = {}_nC_k$ である．

例

R を λ-ring とする．このとき $R[x]$ 上の λ-ring structure が $\lambda_t(x) = 1 + xt$ によって定まる．

例

R を λ-ring とする．このとき $R[x]$ 上の λ-ring structure が $\lambda_t(x) = 1 + xt$ によって定まる．これを繰り返すことにより n 変数多項式環 $R[x_1, \ldots, x_n]$ 上にも $\lambda_t(x_i) = 1 + x_i t$ を満たす λ-ring structure が入る．

Remark

このように，$\lambda_t(x) = 1 + xt$ を満たす元 x のことを 1 次元の元と呼ぶ．1 次元の元 $x_1, \ldots, x_n$ に対しては $\lambda_t(x_1 + \cdots + x_n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_k(x)t^k$ となる．

対称多項式のなす λ-ring

$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ は $\lambda_t(x_i) = 1 + x_i t$ を満たす λ-ring structure を持つ.

対称多項式のなす λ-ring

$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ は $\lambda_t(x_i) = 1 + x_i t$ を満たす λ-ring structure を持つ.
ところでその極限を取って得られる λ-ring $\lim \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ は対称多項式のなす環 $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots]$ を含む.

対称多項式のなす λ-ring

$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ は $\lambda_t(x_i) = 1 + x_i t$ を満たす λ-ring structure を持つ.
ところでその極限を取って得られる λ-ring $\lim \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ は対称多項式のなす環 $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots]$ を含む. この部分環は λ^n に閉じるので,
$\mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots]$ にも λ-ring structure が誘導される.

対称多項式のなす λ-ring

$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ は $\lambda_t(x_i) = 1 + x_i t$ を満たす λ-ring structure を持つ．
ところでその極限を取って得られる λ-ring $\lim \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ は対称多項式のなす環 $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots]$ を含む．この部分環は λ^n に閉じるので，
$\mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots]$ にも λ-ring structure が誘導される．実はこれが $F(\mathbb{Z}[x])$ となっている．

Outline

Adams operation

R を λ-ring, $x \in R$ とする.

Adams operation

R を λ-ring, $x \in R$ とする.
このとき λ-ring の射 $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots] \to R$ であって $e_1 \mapsto x$ なるものが一意に存在する.

Adams operation

R を λ-ring, $x \in R$ とする.
このとき λ-ring の射 $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots] \to R$ であって $e_1 \mapsto x$ なるものが一意に存在する.
このとき冪和対称式 p_k の行き先を $\psi^k(x)$ と書く.

Adams operation の別の定義

$E(x;t)$ と $P(x;t)$ の関係式

$$\exp(P(x;t)) = E(x;-t)$$

を変形すると

Adams operation の別の定義

$E(x;t)$ と $P(x;t)$ の関係式

$$\exp(P(x;t)) = E(x;-t)$$

を変形すると

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k t^k = t\frac{\partial}{\partial t}P(x;t) = t\frac{\partial}{\partial t}\log(E(x;-t))$$

を得る.

Adams operation の別の定義

$E(x;t)$ と $P(x;t)$ の関係式

$$\exp(P(x;t)) = E(x;-t)$$

を変形すると

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k t^k = t\frac{\partial}{\partial t}P(x;t) = t\frac{\partial}{\partial t}\log(E(x;-t))$$

を得る．これを踏まえて Adams operation の母関数 $\psi_t(x)$ を

$$\psi_{-t}(x) = -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(x))$$

と書き表すことができる．

Adams operation の性質

Proposition

R を λ-ring とする．このとき以下が成り立つ．

1. ψ^i は加法的.
2. 1 次元の元 x について $\psi^i(x) = x^i$.

加法性の証明

まず

$$\psi_{-t}(0) = -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(0)) = 0$$

より任意の i について $\psi^i(0) = 0$.

加法性の証明

まず

$$\psi_{-t}(0) = -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(0)) = 0$$

より任意の i について $\psi^i(0) = 0$.
また任意の元 $a, b \in R$ について

$$\psi_{-t}(a+b) \quad = \quad -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(a+b))$$

加法性の証明

まず

$$\psi_{-t}(0) = -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(0)) = 0$$

より任意の i について $\psi^i(0) = 0$.
また任意の元 $a, b \in R$ について

$$\begin{aligned}\psi_{-t}(a+b) &= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(a+b)) \\ &= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(a)\lambda_t(b))\end{aligned}$$

加法性の証明

まず

$$\psi_{-t}(0) = -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(0)) = 0$$

より任意の i について $\psi^i(0) = 0$.
また任意の元 $a, b \in R$ について

$$\begin{aligned}
\psi_{-t}(a+b) &= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(a+b)) \\
&= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(a)\lambda_t(b)) \\
&= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(a)) - t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(b))
\end{aligned}$$

加法性の証明

まず
$$\psi_{-t}(0) = -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(0)) = 0$$
より任意の i について $\psi^i(0) = 0$.
また任意の元 $a, b \in R$ について

$$\begin{aligned}
\psi_{-t}(a+b) &= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(a+b)) \\
&= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(a)\lambda_t(b)) \\
&= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(a)) - t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(b)) \\
&= \psi_{-t}(a) + \psi_{-t}(b)
\end{aligned}$$

より加法性を得る.

1 次元の元の振る舞い

$x \in R$ が 1 次元, つまり $\lambda_t(x) = 1 + xt$ を満たすとすると

1次元の元の振る舞い

$x \in R$ が1次元, つまり $\lambda_t(x) = 1 + xt$ を満たすとすると

$$\psi_{-t}(x) \quad = \quad -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(x))$$

1 次元の元の振る舞い

$x \in R$ が 1 次元, つまり $\lambda_t(x) = 1 + xt$ を満たすとすると

$$
\begin{aligned}
\psi_{-t}(x) &= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(x)) \\
&= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(1 + xt)
\end{aligned}
$$

1次元の元の振る舞い

$x \in R$ が1次元, つまり $\lambda_t(x) = 1 + xt$ を満たすとすると

$$
\begin{aligned}
\psi_{-t}(x) &= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(x)) \\
&= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(1+xt) \\
&= -\frac{xt}{1+xt}
\end{aligned}
$$

1次元の元の振る舞い

$x \in R$ が 1 次元, つまり $\lambda_t(x) = 1 + xt$ を満たすとすると

$$\begin{aligned}
\psi_{-t}(x) &= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(x)) \\
&= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(1 + xt) \\
&= -\frac{xt}{1 + xt} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n t^n
\end{aligned}$$

1次元の元の振る舞い

$x \in R$ が1次元, つまり $\lambda_t(x) = 1 + xt$ を満たすとすると

$$
\begin{aligned}
\psi_{-t}(x) &= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(\lambda_t(x)) \\
&= -t\frac{\partial}{\partial t}\log(1+xt) \\
&= -\frac{xt}{1+xt} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n t^n
\end{aligned}
$$

なので $\psi^i(x) = x^i$.

Adams operation

Proposition

1. λ-ring R に対し, $\psi^k : R \to R$ は λ-ring の射である.

Adams operation

Proposition

1. λ-ring R に対し, $\psi^k : R \to R$ は λ-ring の射である.
2. $\psi^1 = id$, $\psi^m \psi^n = \psi^{m+n}$.

Adams operation

Proposition

1. λ-ring R に対し, $\psi^k : R \to R$ は λ-ring の射である.
2. $\psi^1 = id$, $\psi^m \psi^n = \psi^{m+n}$.
3. 任意の素数 p について $\psi^p(x) \equiv x^p \mod p$.

Adams operation

Proposition

1. λ-ring R に対し, $\psi^k : R \to R$ は λ-ring の射である.
2. $\psi^1 = id$, $\psi^m \psi^n = \psi^{m+n}$.
3. 任意の素数 p について $\psi^p(x) \equiv x^p \mod p$.

Remark

3 つ目は

$$(x_1 + \cdots + x_n)^p \equiv x_1^p + \ldots x_n^p \mod p$$

から従う.

Wilkerson の定理

Theorem

R を $\mathbb{Z}$ 上 flat な可換環とする．このとき R 上の λ-ring structure は次のデータと等価である．

1. 各自然数 $k \geq 1$ に対し環準同型 $\psi^k : R \to R$ が与えられている．
2. $\psi^1 = id$, $\psi^m \psi^n = \psi^{m+n}$.
3. 任意の素数 p について $\psi^p(x) \equiv x^p \mod p$.

Wilkerson の定理

Theorem

R を $\mathbb{Z}$ 上 flat な可換環とする．このとき R 上の λ-ring structure は次のデータと等価である．

1. 各自然数 $k \geq 1$ に対し環準同型 $\psi^k : R \to R$ が与えられている．
2. $\psi^1 = id$, $\psi^m \psi^n = \psi^{m+n}$.
3. 任意の素数 p について $\psi^p(x) \equiv x^p \mod p$.

Remark

上の条件を満たす ψ^k を Adams operation に持つ λ-ring strucure が存在すれば一意であることは Newton's formula の帰結．難しいのは存在性を示すところである．

Outline

Witt polynomial

Definition

可算個の変数 $x_1, x_2, \ldots$ に関する整数係数多項式 $w_n(x)$ を次で定める.

$$w_n(x) = \sum_{d|n} d x_d^{\frac{n}{d}}$$

Witt polynomial の例

Example

$$
\begin{aligned}
w_1(x) &= x_1 \\
w_2(x) &= x_1^2 + 2x_2 \\
w_3(x) &= x_1^3 + 3x_3 \\
w_4(x) &= x_1^4 + 2x_2^2 + 4x_4 \\
w_5(x) &= x_1^5 + 5x_5 \\
w_6(x) &= x_1^6 + 2x_2^3 + 3x_3^2 + 6x_6
\end{aligned}
$$

Witt polynomial の例

Example

$$
\begin{aligned}
w_1(x) &= x_1 \\
w_2(x) &= x_1^2 + 2x_2 \\
w_3(x) &= x_1^3 + 3x_3 \\
w_4(x) &= x_1^4 + 2x_2^2 + 4x_4 \\
w_5(x) &= x_1^5 + 5x_5 \\
w_6(x) &= x_1^6 + 2x_2^3 + 3x_3^2 + 6x_6
\end{aligned}
$$

Remark

特に素数 p について

$$w_p(x) = x_1^p + px_p$$

ring of big Witt vector

Proposition

$a = (a_1, \dots), b = (b_1, \dots)$ を可算個の変数とするとき, 各 $n \geq 1$ について $2n$ 変数の整数係数多項式 ξ_n, π_n が一意に存在して以下を満たす.

$$\begin{aligned} w_n(\xi_1(a,b), \dots, \xi_n(a,b)) &= w_n(a) + w_n(b) \\ w_n(\pi_1(a,b), \dots, \pi_n(a,b)) &= w_n(a) \times w_n(b) \end{aligned}$$

ring of big Witt vector

Definition

R を可換環とする．このとき $\mathbb{W}(R) = \prod_{n \in \mathbb{N}} R$ 上の二項演算 $+_W, \times_W$ を次で定める．

$$\begin{aligned} a +_W b &= (\xi_1(a,b), \xi_2(a,b), \dots) \\ a \times_W b &= (\pi_1(a,b), \pi_2(a,b), \dots) \end{aligned}$$

これは可換環をなす．これを R の ring of big Witt vector と呼ぶ．

Remark

定義より，各 n に対して環準同型 $\mathbb{W}(R) \to R$ が $a \mapsto w_n(a)$ で定まる．これを ghost component と呼ぶ．

Artin-Hasse exponential

Proposition

R を可換環とする．写像 $\mathbb{W}(R) \to \Lambda(R)$ を次で定める．

$$(a_1, a_2, \dots) \mapsto \prod_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n a_n t^n)$$

するとこれは環の同型を与える．

Outline

δ_p-ring

Definition

p を素数とする．可換環 R と写像 $\delta_p : R \to R$ の組が δ_p-ring であるとは以下を満たすときを言う．

1. $\delta_p(1) = 0$.
2. $\delta_p(x+y) = \delta_p(x) + \delta_p(y) - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!} x^k y^{p-k}$.
3. $\delta_p(xy) = x^p \delta_p(y) + y^p \delta_p(x) + p\delta_p(x)\delta_p(y)$.

δ_p-ring

Definition

p を素数とする．可換環 R と写像 $\delta_p : R \to R$ の組が δ_p-ring であるとは以下を満たすときを言う．

1. $\delta_p(1) = 0$.
2. $\delta_p(x+y) = \delta_p(x) + \delta_p(y) - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!} x^k y^{p-k}$.
3. $\delta_p(xy) = x^p \delta_p(y) + y^p \delta_p(x) + p\delta_p(x)\delta_p(y)$.

Remark

R が δ_p-ring のとき，$\phi_p : R \to R$ を $\phi_p(x) = x^p + p\delta_p(x)$ で定めると環準同型となる．したがって R が p-torsion free のとき，R 上の δ_p-ring structure を与えることと R 上の Frobenius lift を与えることは等価である．

λ-ring と δ_p-ring の関係

Theorem

可換環 R について以下のデータは等価である.

1. R 上の λ-ring structure
2. 各素数 p に対し, R 上の δ_p-ring structure が与えられていて, 素数 p, q に対して $\phi_p\delta_q = \delta_q\phi_p$ を満たす.

λ-ring と δ_p-ring の関係

Theorem

可換環 R について以下のデータは等価である.

1. R 上の λ-ring structure
2. 各素数 p に対し, R 上の δ_p-ring structure が与えられていて, 素数 p, q に対して $\phi_p\delta_q = \delta_q\phi_p$ を満たす.

Remark

これは Wilkerson の定理の一般化である.

ring of p-typical Witt vector

δ_p-ring の圏から可換環の圏への忘却関手は右随伴を持つ．それは ring of p-typical Witt vector と呼ばれる．これを W_p と書くことにする．

Proposition

$W_p(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}_p$

ring of big Witt vector の分解

Proposition

p を素数, R を $\mathbb{Z}_{(p)}$-algebra とする．このとき $\mathbb{W}(R)$ は $W_p(R)$ の可算直積に分解する．

Reference

[1] David Mumford.
Lectures on curves on an algebraic surface.
Number 59. Princeton University Press, 1966.

[2] Masatoshi Noumi.
Macdonald Polynomials: Commuting Family of q-Difference Operators and Their Joint Eigenfunctions, volume 50.
Springer Nature, 2023.

[3] Donald Yau.
Lambda-rings.
World Scientific Publishing Company, 2010.