

パラコンパクト空間とその応用について

ソフィア・ヒナコフシカ (神原妃那)

@Hinakovska7

2026. 3. 20

第 9 回すうがく徒のつどい

- この講演では、現代の位相空間論において最も重要な性質のひとつであるパラコンパクト空間とその応用について紹介する。
- 講演の前半では、パラコンパクト空間の気持ちを理解することを目標に、歴史的な背景を紹介しながらパラコンパクト空間の定義と定理、具体例を紹介する。
- 講演の後半では、パラコンパクト空間の応用例として、位相多様体、Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理, covering property について、証明抜きに紹介する。
- 本講演は学部 2-3 年生で学ぶ集合と位相の知識を中心に話を進める。特にコンパクト性と分離公理について理解していることを想定している。

目次

- 1 パラコンパクト空間の萌芽
- 2 パラコンパクト空間入門
- 3 A. H. Stone の定理
- 4 単位の分割
- 5 位相多様体
- 6 Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理
- 7 Covering property

目次

- 1 パラコンパクト空間の萌芽
- 2 パラコンパクト空間入門
- 3 A. H. Stone の定理
- 4 単位の分割
- 5 位相多様体
- 6 Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理
- 7 Covering property

パラコンパクト空間の萌芽

定義 1

Hausdorff 空間 X がコンパクト (compact) であるとは, X の任意の開被覆が有限部分被覆をもつことである.

コンパクト空間は大変よい性質をもつ:

コンパクト空間の性質

- コンパクト空間の閉集合はコンパクトである.
- コンパクト空間は正規空間である.
- コンパクト空間の直積空間はコンパクトである. (Tikhonov の定理)
- 距離空間において, コンパクトであるための必要十分条件が数多く知られている. (可算コンパクト, 点列コンパクト, 全有界かつ完備, etc.)

しかし, Euclid 空間 \mathbb{R}^n , 無限集合上の離散空間, 関数空間 $C(I)$, 数列空間 l^p のように, 距離空間であってもコンパクトであるとは限らない. コンパクト性は位相空間を研究するには強すぎる. そこで, コンパクト性を少しだけ弱めて, 距離空間でも扱えるような性質を考えられないだろうか.

パラコンパクト空間の萌芽

例えば、正規性はコンパクト空間と距離空間の持つ性質の1つである:

定義 2

Hausdorff 空間 X が**正規** (normal) であるとは、 X の互いに素な閉集合 F, H に対して、 X のある開集合 U, V が存在して $F \subset U, H \subset V, U \cap V = \emptyset$ を満たすことをいう。

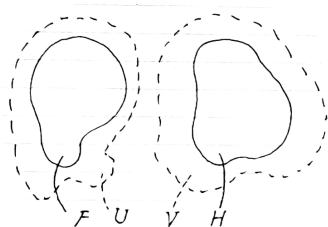


Figure: 正規空間のイメージ.

パラコンパクト空間の萌芽

古典的事実として、正規空間は次のように特徴づけられる:

定理 3

Hausdorff 空間 X について、次は同値である:

- ① X は正規空間である.
- ② X の任意の有限開被覆 $\mathcal{U} = \{U_0, \dots, U_{n-1}\}$ に対して、 X のある有限開被覆 $\mathcal{V} = \{V_0, \dots, V_{n-1}\}$ が存在して任意の $i < n$ に対して $\overline{V_i} \subset U_i$ である.

証明.

(2) \rightarrow (1). 互いに素な閉集合 F_0, F_1 をたすき掛けして $U_0 = X \setminus F_0, U_1 = X \setminus F_1$ とおく. このとき、 $H_0 \subset U_0, H_1 \subset U_1, H_0 \cup H_1 = X$ を満たす X の閉集合 H_0, H_1 が存在する. 再度たすき掛けして $V_0 = X \setminus H_0, V_1 = X \setminus H_1$ とおくと、 $F_0 \subset V_0, F_1 \subset V_1, V_0 \cap V_1 = \emptyset$ である.

パラコンパクト空間の萌芽

証明.

(1) \rightarrow (2). $i < n$ に関して再帰的に \mathcal{V} を構成する. まず,

$$X \setminus \bigcup_{0 < i} U_i \subset V_0 \subset \overline{V_0} \subset U_0$$

を満たす X の開集合 V_0 が存在する. このとき, $\{V_0\} \cup \{U_i : 0 < i < n\}$ は X の開被覆である. 次に,

$$X \setminus \left(V_0 \cup \bigcup_{1 < i} U_i \right) \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1$$

を満たす X の開集合 V_1 が存在する. このとき, $\{V_i : i \leq 1\} \cup \{U_i : 1 < i < n\}$ は X の開被覆である. これを繰り返すと, 各 $i < n$ に対して $\overline{V_i} \subset U_i$ であるような X の開集合族 $\mathcal{V} = \{V_i : i < n\}$ を得る. \mathcal{V} は X の被覆である. 実際, $x \in X$ をとり, $x \in U_i$ を満たす最大の $i < n$ をとると, $\{V_j : j \leq i\} \cup \{U_j : i < j\}$ は X の被覆なので, i の取り方から $x \in V_j$ を満たす $j \leq i$ が存在する. \square

パラコンパクト空間の萌芽

このことから、正規性は被覆に関する性質を有することがわかる。コンパクト性も同じような性質を持っていたことを踏まえると、位相空間 X は次のような条件を持つべきである:

目標

位相空間 X の任意の開被覆 \mathcal{U} に対して、 X のある開被覆 \mathcal{V} が存在して \mathcal{V} は \mathcal{U} を細かくし、ある有限的な性質を満たすとき、 X は性質 C を持つということにする。このとき、次のような定理を満たすように C を定めたい:

- X が可分距離空間またはコンパクト空間ならば X は性質 C を持つ。
- X が性質 C を持つならば、 X は正規空間である。
- 性質 C は位相的性質であって、 X の閉集合に関して遺伝的である。

パラコンパクト空間の萌芽

「細かく」を定義すると、次のようになる:

定義 4

位相空間 X の部分集合族 \mathcal{A}, \mathcal{B} に対し, \mathcal{B} が \mathcal{A} の**細分** (refinement) であるとは, 任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して, ある $A \in \mathcal{A}$ が存在して $B \subset A$ を満たすことをいう.

コンパクト性は得られる細分が大域的に有限であるという意味である. それでは, 細分が局所的に有限であるに置き換えるとどうなるだろうか. 局所有限の定義は次のようになる:

定義 5

位相空間 X の部分集合族 \mathcal{A} が**局所有限** (locally finite) であるとは, 任意の $x \in X$ に対して, x のある近傍 G が存在して $|\{A \in \mathcal{A}: G \cap A \neq \emptyset\}| < \aleph_0$ を満たすことをいう.

目次

- 1 パラコンパクト空間の萌芽
- 2 **パラコンパクト空間入門**
- 3 A. H. Stone の定理
- 4 単位の分割
- 5 位相多様体
- 6 Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理
- 7 Covering property

パラコンパクト空間入門

1944年、フランスの数学者である Jean Dieudonné [4] はパラコンパクト空間を導入した:

定義 6

Hausdorff 空間 X がパラコンパクト (paracompact) であるとは、 X の任意の開被覆 \mathcal{U} に対して、 X のある開被覆 \mathcal{V} が存在して \mathcal{V} は \mathcal{U} の局所有限な細分であることをいう。

局所有限性と細分の定義を思い出せば、次の定理は容易に示される:

定理 7

コンパクトならばパラコンパクトである。

証明.

X をコンパクト空間、 \mathcal{U} を X の開被覆とする。このとき、 \mathcal{U} の有限部分被覆 \mathcal{V} が存在する。 \mathcal{V} は有限なので、 \mathcal{V} は局所有限である。また、 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ なので、 \mathcal{V} は \mathcal{U} の細分である。したがって、 X はパラコンパクトである。□

パラコンパクト空間入門

コンパクト空間の閉集合がコンパクトであることの証明を参考にすれば、この定理も同様に示すことができる。

定理 8

パラコンパクト空間の閉集合はパラコンパクトである。

証明.

X をパラコンパクト空間, A を X の閉集合, $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を A の開被覆とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して, $U_\lambda = W_\lambda \cap A$ を満たす X の開集合 W_λ が存在する. このとき, $\{W_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \cup \{X \setminus A\}$ は X の開被覆であるから, 局所有限な開被覆による細分 $\{V_\mu : \mu \in M\}$ が存在する. このとき, $\mathcal{V} = \{V_\mu \cap A : \mu \in M\}$ は A の開被覆であって, \mathcal{U} の局所有限な細分である. したがって, A はパラコンパクトである. □

パラコンパクト空間入門

局所有限な集合族は閉包を保存する.

補題 9

位相空間 X の部分集合族 $\mathcal{A} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が局所有限ならば,

$$\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$$

である.

証明.

各 $\lambda \in \Lambda$ に対して,

$$\overline{A_\lambda} \subset \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda}$$

であることから, 左辺の $\lambda \in \Lambda$ に関する和をとればよい.

証明.

逆に, $x \in \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda}$ をとると, \mathcal{A} は局所有限なので, $|\{\lambda \in \Lambda : U \cap A_\lambda \neq \emptyset\}| < \aleph_0$ を満たす x の開近傍 U が存在する. そこで, $U \cap A_\lambda \neq \emptyset$ を満たす $\lambda \in \Lambda$ を $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ とすると,

$$U \cap \bigcup_{i < n} A_{\lambda_i} \neq \emptyset$$

である. よって,

$$x \in \overline{\bigcup_{i < n} A_{\lambda_i}} = \bigcup_{i < n} \overline{A_{\lambda_i}}$$

である. ゆえに,

$$\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$$

である. □

注意.

局所有限な集合族であっても、内部を保存するとは限らない。例えば、実数直線 \mathbb{R} の部分集合族

$$\{[n, n + 1] : n \in \mathbb{Z}\}$$

は局所有限な閉被覆なので閉包を保存するが、

$$\text{Int} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n + 1] \right) = \mathbb{R}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Int}([n, n + 1]) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

である。

パラコンパクト空間入門

コンパクト空間が正規であることの証明を参考にすれば、パラコンパクト空間が正規であることの証明も同様にできる。

補題 10

パラコンパクト空間は正則である。

証明.

X をパラコンパクト空間とする. $x \in X$ と $x \notin F$ を満たす X の閉集合 F をとる. X が Hausdorff なので, 各 $y \in F$ に対して, $x \in U(x)$, $y \in V(y)$, $U(x) \cap V(y) = \emptyset$ を満たす X の開集合 $U(x), V(y)$ が存在する. X はパラコンパクトなので,

$$\{V(y) : y \in F\} \cup \{X \setminus F\}$$

は局所有限な開被覆による細分 \mathcal{H} をもつ.

証明.

$$V = \bigcup \{H \in \mathcal{H} : H \cap F \neq \emptyset\}$$

とおくと, V は X の開集合であって, $F \subset V$ である. ここで, $U = X \setminus \bar{V}$ とおくと, $U \cap V = \emptyset$ である. あとは $x \in U$ を示せばよい. $H \cap F \neq \emptyset$ を満たす $H \in \mathcal{H}$ を固定すると, $H \subset V(y)$ を満たす $y \in F$ が存在する. よって, $U(x) \cap H = \emptyset$ である. したがって, $x \notin \bar{H}$ である. H の固定を外すと, 補題 9 (局所有限) より

$$\bar{V} = \bigcup \{\bar{H} : H \in \mathcal{H}, H \cap F \neq \emptyset\}$$

であるから, $x \notin \bar{V}$ である. ゆえに, $x \in U$ である. □

定理 11

パラコンパクト空間は正規である.

証明.

X が正規であることを示す. そのために, X の互いに素な閉集合 F_0, F_1 をとる. X は正則なので, 各 $x \in F_1$ に対して, $F_0 \subset U(x)$, $x \in V(x)$, $U(x) \cap V(x) = \emptyset$ を満たす X の開集合 $U(x), V(x)$ が存在する. X はパラコンパクトなので,

$$\{V(x) : x \in F_1\} \cup \{X \setminus F_1\}$$

は局所有限な開被覆による細分 \mathcal{H} をもつ. あとは補題 10 と同様に示せる. \square

パラコンパクト空間入門

パラコンパクト空間に関する主張の反例をいくつか紹介するが、証明を理解するには集合論の知識が必要なので、ここでは事実のみ述べる。

注意.

一般に、パラコンパクト空間の部分空間はパラコンパクトであるとは限らない。例えば、Tikhonov の板 (Tikhonov's plank) $T = (\omega + 1) \times (\omega_1 + 1)$ はコンパクトであるが、その部分空間 $D = T \setminus \{(\omega, \omega_1)\}$ は正規でないことが知られている。

注意.

パラコンパクトでない正規空間が存在する。例えば、 ω_1 を順序位相空間とみなせば、 ω_1 は正規だがパラコンパクトでないことが知られている。

パラコンパクト空間入門

コンパクト空間のときとは異なり、パラコンパクト空間の直積空間がパラコンパクトであるとは限らない。

注意.

Sorgenfrey 直線 \mathbb{S} はパラコンパクトだが, Sorgenfrey 平面 $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ は正規ですらない。つまりパラコンパクトでない。

しかし、片方の空間がコンパクトであれば、直積空間もパラコンパクトになってくれる:

定理 12

X をパラコンパクト, Y をコンパクトとすると, 直積空間 $X \times Y$ はパラコンパクトである。

証明.

G を $X \times Y$ の開被覆とする. 点 $x \in X$ を固定すると, 各 $y \in Y$ に対して, $\langle x, y \rangle \in G$ を満たす $G \in \mathcal{G}$ が存在する. G は $X \times Y$ の開集合なので,

$$\langle x, y \rangle \in U_y(x) \times V_x(y) \subset G$$

を満たす X の開集合 $U_y(x)$ と Y の開集合 $V_x(y)$ が存在する.

$\mathcal{V}_x = \{V_x(y) : y \in Y\}$ とおくと, Y はコンパクトなので, \mathcal{V}_x は有限部分被覆

$\mathcal{V}'_x = \{V_x(y_j) : j < r_x\}$ を持つ. ここで,

$$x \in W(x) \subset \bigcap_{j < r_x} U_{y_j}(x)$$

を満たす X の開集合 $W(x)$ が存在する. よって, $\{W(x) : x \in X\}$ とおくと, X はパラコンパクトなので, 局所有限な開被覆による細分 \mathcal{W} を持つ.

証明.

ここで、各 $W \in \mathcal{W}$ に対して、 $W \subset W(x)$ を満たす $x \in X$ が存在するので、選択公理よりこのような x をひとつ固定して、 $\varphi(W)$ と表す。各 $x \in X$ に対して、

$$P(x) = \bigcup \{W \in \mathcal{W} : \varphi(W) = x\}$$

とおくと、 $P(x) \subset W(x)$ である。したがって、 $\{P(x) : x \in X\}$ は $\{W(x) : x \in X\}$ の局所有限な開被覆による 1: 1 細分である。最後に、

$$\mathcal{H} = \{P(x) \times V_x(y_j) : x \in X, j < r_x\}$$

とおくと、 \mathcal{H} は \mathcal{G} の局所有限な開被覆による細分である。 □

目次

- 1 パラコンパクト空間の萌芽
- 2 パラコンパクト空間入門
- 3 **A. H. Stone の定理**
- 4 単位の分割
- 5 位相多様体
- 6 Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理
- 7 Covering property

A. H. Stone の定理

1944 年, Dieudonné は可分距離空間と局所コンパクト距離空間がパラコンパクトであることを示し, この事実から一般の距離空間もパラコンパクトであると予想した. その後, 1948 年, Arthur Harold Stone は Dieudonné の予想が正しいことを示した:

定理 13 (A. H. Stone, 1948 [14])

距離空間はパラコンパクトである.

ここでは, Mary Ellen Rudin [11] による直接的かつ比較的簡単な証明を紹介する.

証明 (準備).

$\langle X, d \rangle$ を距離空間, \mathcal{U} を X の開被覆とする. 整列可能定理より, ある整列集合 $\langle \Lambda, < \rangle$ を用いて $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ と表すことができる. 各 $n < \omega$ と $\alpha \in \Lambda$ に対して,

$$C_{\alpha,n} = \left\{ x \in X : U_d \left(x, \frac{3}{2^n} \right) \subset U_\alpha \right\} \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} U_\beta$$

とおく. 次に, $n < \omega$ に関して再帰的に

$$V_{\alpha,n} = \bigcup \left\{ U_d \left(x, \frac{1}{2^n} \right) : x \in C_{\alpha,n} \setminus \bigcup_{m < n} \bigcup_{\beta \in \Lambda} V_{\beta,m} \right\}$$

と定める. そして $\mathcal{V}_n = \{V_{\alpha,n} : \alpha \in \Lambda\}$ とおき, $\mathcal{V} = \bigcup_{n < \omega} \mathcal{V}_n$ とする. このとき, 各 $n < \omega$ と $\alpha \in \Lambda$ に対して, $V_{\alpha,n} \subset U_\alpha$ であるから, \mathcal{V} は \mathcal{U} の細分である.

証明 (Step 1).

\mathcal{V} が X の開被覆であることを示そう. $x \in X$ をとると, $\langle \Lambda, < \rangle$ は整列集合なので,

$$\alpha(x) = \min\{\alpha \in \Lambda : x \in U_\alpha\}$$

と定めることができる. $U_{\alpha(x)}$ は X の開集合なので, アルキメデスの原理より

$$U_d\left(x, \frac{3}{2^n}\right) \subset U_{\alpha(x)}$$

を満たす $n < \omega$ が存在する. よって, $x \in C_{\alpha(x), n}$ なので, $x \in V_{\beta, m}$ を満たす $\beta \in \Lambda$ と $m < n$ が存在するか, $x \in V_{\alpha(x), n}$ である. したがって, \mathcal{V} は X の開被覆である.

証明 (Step 2).

\mathcal{V} が局所有限であることを示そう. $x \in X$ をとると,

$$U_d \left(x, \frac{1}{2^m} \right) \subset V_{\alpha(x), n} \quad (1)$$

を満たす $m, n < \omega$ が存在する. このとき, 任意の $k \geq m + n + 1$ と $\alpha \in \Lambda$ に対して,

$$U_d \left(x, \frac{1}{2^{m+n+1}} \right) \cap V_{\alpha, k} = \emptyset \quad (2)$$

であることを示そう. もしそうでないとすると, ある $\alpha \in \Lambda$ と $k \geq m + n + 1$ が存在して,

$$U_d \left(x, \frac{1}{2^{m+n+1}} \right) \cap V_{\alpha, k} \neq \emptyset$$

を満たす.

証明 (Step 2).

そこで,

$$y \in U_d \left(x, \frac{1}{2^{m+n+1}} \right) \cap V_{\alpha,k}$$

をとる. $y \in V_{\alpha,k}$ なので, $y \in U_d \left(z, \frac{1}{2^k} \right)$ を満たす $z \in C_{\alpha,k} \setminus \bigcup_{i < k} \bigcup_{\beta \in \Lambda} V_{\beta,i}$ が存在する. $n < k$ と (1) より, $z \notin V_{\alpha(n),n}$ である. よって,

$$d(x, z) \geq \frac{1}{2^m} \tag{3}$$

である. しかし,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{1}{2^{m+n+1}} + \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{m+n}} \leq \frac{1}{2^m}$$

であるから, これは (3) に矛盾する.

証明 (Step 2).

一方で,

$$\forall k < \omega \forall \alpha, \beta \in \Lambda \left(\alpha \neq \beta \rightarrow d(V_{\alpha,k}, V_{\beta,k}) \geq \frac{1}{2^k} \right) \quad (4)$$

である. このことを示すために, $k < \omega$ と $\alpha < \beta$ を満たす $\alpha, \beta \in \Lambda$ を固定し, $y \in V_{\alpha,k}$, $z \in V_{\beta,k}$ をとる. このとき, $y \in U_d(a, \frac{1}{2^k})$ を満たす $a \in C_{\alpha,k}$ と $z \in U_d(b, \frac{1}{2^k})$ を満たす $b \in S_{\beta,k}$ が存在する. よって, $U_d(a, \frac{3}{2^k}) \subset U_{\alpha}$, $b \notin U_{\alpha}$ である. したがって,

$$d(a, b) \geq \frac{3}{2^k}$$

である. ゆえに,

$$d(y, z) \geq d(a, b) - d(a, y) - d(b, z) \geq \frac{3}{2^k} - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k}$$

である.

A. H. Stone の定理

証明 (Step 2).

(4) より, 任意の $k < \omega$ に対して,

$$\left| \left\{ \alpha \in \Lambda : U_d \left(x, \frac{1}{2^{k+1}} \right) \cap V_{\alpha, k} \neq \emptyset \right\} \right| \leq 1$$

である. よって, 各 $k \leq m+n$ に対して,

$$\left| \left\{ \alpha \in \Lambda : U_d \left(x, \frac{1}{2^{m+n+1}} \right) \cap V_{\alpha, k} \neq \emptyset \right\} \right| \leq 1$$

である. したがって, (2) より,

$$\left| \left\{ V \in \mathcal{V} : U_d \left(x, \frac{1}{2^{m+n+1}} \right) \cap V \neq \emptyset \right\} \right| \leq m+n+1$$

である. ゆえに, \mathcal{V} は局所有限 (かつ σ -疎) である. □

目次

- 1 パラコンパクト空間の萌芽
- 2 パラコンパクト空間入門
- 3 A. H. Stone の定理
- 4 単位の分割**
- 5 位相多様体
- 6 Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理
- 7 Covering property

単位の分割

位相空間を実数値連続関数で解釈しようとする考え方は古くから知られている。例えば、最大値・最小値定理は B. Bolzano によって 1830 年代に得られていた。この定理を位相空間の言葉で表すと、次のようになる:

定理 14 (B. Bolzano, 1830s)

X を空でないコンパクト空間とする。このとき、連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は最大値と最小値をもつ。

また、Urysohn の補題は正規空間を実数値連続関数で特徴付ける重要な定理である:

定理 15 (P. Urysohn, 1925)

位相空間 X において、次は同値である:

- ① X は正規である。
- ② 任意の互いに素な X の閉集合 F, H に対して、ある連続関数 $f: X \rightarrow I$ が存在して $F \subset f^{-1}\{0\}$ かつ $H \subset f^{-1}\{1\}$ である。

単位の分割

正規空間であれば, Urysohn の補題を応用することで空間を連続関数の分割だと思えることができる. つまり, 正規空間の有限開被覆を

- $X \iff 1$
- $F, H \iff f, g$

という対応によって細分の議論を連続関数に翻訳することができる:

定理 16

X を正規空間とする. このとき, X の任意の開被覆 $\mathcal{U} = \{U, V\}$ に対して, 次を満たす連続関数 $f, g: X \rightarrow I$ が存在する:

- ① 任意の $x \in X$ に対して, $f(x) + g(x) = 1$ である.
- ② $f^{-1}[(0, 1]] \subset U$, $g^{-1}[(0, 1]] \subset V$ である.

逆に, X がこの性質を満たすならば, X は正規である.

単位の分割

証明 (→).

任意に X の開被覆 $\{U, V\}$ をとる. X は正規なので, $F \subset U$, $H \subset V$ を満たす X の閉被覆 $\{F, H\}$ が存在する. Urysohn の補題より,

$$X \setminus U \subset h_0^{-1}[\{0\}], F \subset h_0^{-1}[\{1\}]$$

を満たす連続関数 $h_0: X \rightarrow I$ が存在する. 同様に,

$$X \setminus V \subset h_1^{-1}[\{0\}], H \subset h_1^{-1}[\{1\}]$$

を満たす連続関数 $h_1: X \rightarrow I$ が存在する. そこで,

$$f = \frac{h_0}{h_0 + h_1}, g = \frac{h_1}{h_0 + h_1}$$

と定めると, $f + g = 1$ かつ $f^{-1}[(0, 1]] \subset U$, $g^{-1}[(0, 1]] \subset V$ である.

証明 (\leftarrow).

F, H を互いに素な X の閉集合とする. $U = X \setminus F, V = X \setminus H$ とおく. このとき, $\mathcal{U} = \{U, V\}$ は X の開被覆である. よって,

- $f + g = 1,$
- $f^{-1}[(0, 1]] \subset U, g^{-1}[(0, 1]] \subset V$

を満たす連続関数 $f, g: X \rightarrow I$ が存在する. よって,

$$F \subset f^{-1}[\{0\}], H \subset f^{-1}[\{1\}]$$

である. したがって, Urysohn の補題より X は正規である. □

単位の分割

同様の議論をパラコンパクト空間でも展開できないだろうか. E. Michael は 1953 年, パラコンパクト空間に関する論文の中で次の定理を示した:

定理 17 (E. Michael, 1953 [6])

X をパラコンパクト空間とする. このとき, X の任意の開被覆 \mathcal{U} に対して, 次を満たす連続関数族 $\langle f_\alpha: X \rightarrow I \rangle_{\alpha \in \Lambda}$ が存在する:

- 1 任意の $x \in X$ に対して, $\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x) = 1$ である.
- 2 $\{f_\alpha^{-1}[(0, 1]]: \alpha \in \Lambda\}$ は \mathcal{U} の細分である.

逆に, X が T_1 空間であって, この性質を満たすならば, X はパラコンパクトである.

注意.

この性質を \mathcal{U} に従属する**単位の分割**という. なお, (1) の左辺は次で定める:

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ \sum_{\alpha \in M} f_\alpha(x) : M \in [\Lambda]^{<\omega} \right\}$$

単位の分割

証明 (→).

U を X の開被覆とし, $U = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ と表す. X はパラコンパクトなので, U は局所有限であると仮定してよい. このとき, 各 $\alpha \in \Lambda$ に対して, $F_\alpha \subset U_\alpha$ を満たす X の閉被覆 $\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ が存在する. Urysohn の補題より, 各 $\alpha \in \Lambda$ に対して,

$$X \setminus U_\alpha \subset h_\alpha^{-1}[\{0\}], F_\alpha \subset h_\alpha^{-1}[\{1\}]$$

を満たす連続関数 $h_\alpha : X \rightarrow I$ が存在する. ここで, 連続関数 $h : X \rightarrow I$ を, $x \in X$ に対して

$$h(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} h_\alpha(x)$$

で定める. そして各 $\alpha \in \Lambda$ に対して,

$$f_\alpha = \frac{h_\alpha}{h}$$

と定める. あとは h が well-defined であれば, $\langle f_\alpha : X \rightarrow I \rangle_{\alpha \in \Lambda}$ は U に従属する単位の分割であることが従う.

単位の分割

証明 (\rightarrow).

h が well-defined であることを示す. $x \in X$ をとり,

$$h(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} h_{\alpha}(x)$$

が絶対収束することを示そう. U は局所有限なので,

$$M = \{\alpha \in \Lambda : G \cap U_{\alpha} \neq \emptyset\}$$

が有限であるような x の近傍 G が存在する. そこで, $\alpha \in \Lambda \setminus M$ に対して, $G \cap U_{\alpha} = \emptyset$ なので, $h_{\alpha}(x) = 0$ である. したがって, h は有限確定値である. また, $y \in G$ に対して,

$$h(y) = \sum_{\alpha \in M} h_{\alpha}(y)$$

であるから, $h \upharpoonright G$ は連続である. ゆえに, h は連続である.

単位の分割

逆を示すために、単位の分割に関する次の補題を示そう:

補題 18

X を位相空間とする. \mathcal{U} を X の開被覆とし, $\langle f_\alpha: X \rightarrow I \rangle_{\alpha \in \Lambda}$ を \mathcal{U} に従属する単位の分割とすると, \mathcal{U} は局所有限な開被覆による細分 \mathcal{V} を持つ.

証明.

最初に, 次を示す: 任意の連続関数 $g: X \rightarrow I$ と $g(a) > 0$ を満たす任意の点 $a \in X$ に対して, a のある近傍 G_0 と $M \in [\Lambda]^{<\omega}$ が存在して,

$$\forall x \in G_0 \forall \alpha \in \Lambda \setminus M (f_\alpha(x) < g(x)) \quad (5)$$

を満たす. まず, 連続関数 $g: X \rightarrow I$ と $g(a) > 0$ を満たす $a \in X$ をとる. 単位の分割の定義から,

$$1 - \sum_{\alpha \in M} f_\alpha(a) < g(a)$$

を満たす $M \in [\Lambda]^{<\omega}$ が存在する.

証明.

あとは

$$G_0 = \left\{ x \in X : 1 - \sum_{\alpha \in M} f_\alpha(x) < g(x) \right\}$$

とおくと、これは (5) を満たす.

次に、以下を示す: $f: X \rightarrow I$ を

$$f(x) = \sup_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x)$$

で定めるとき、 $f: X \rightarrow I$ は連続かつ $f > 0$ である. まず、 $x \in X$ をとると、 $f_{\alpha(x)}(x) > 0$ を満たす $\alpha(x) \in \Lambda$ が存在する. ここで $g = f_{\alpha(x)}$ として上の議論を適用すると、 x のある近傍 G_0 と $M \in [\Lambda]^{<\omega}$ が存在して (5) を満たす. このとき、 $\alpha(x) \in M$ である.

単位の分割

証明.

よって, $z \in G_0$ に対して,

$$f(z) = \max_{\alpha \in M} f_{\alpha}(z)$$

である. したがって, $f \upharpoonright G_0$ は連続である. ゆえに, $f: X \rightarrow I$ は連続である. また, $f > 0$ である.

この $f: X \rightarrow I$ を用いて, 各 $\alpha \in \Lambda$ に対して,

$$V_{\alpha} = \left\{ x \in X : f_{\alpha}(x) > \frac{f(x)}{2} \right\}$$

とおき, $\mathcal{V} = \{V_{\alpha} : \alpha \in \Lambda\}$ とする. このとき, \mathcal{V} は U の局所有限な開被覆による細分であることを示す. $x \in V_{\alpha}$ をとると,

$$f_{\alpha}(x) > \frac{f(x)}{2} > 0$$

なので, $x \in f_{\alpha}^{-1}[(0, 1]]$ である. $f_{\alpha}^{-1}[(0, 1]] \subset U$ を満たす $U \in \mathcal{U}$ が存在するので, \mathcal{V} は U の細分である.

証明.

$x \in X$ をとる. もしすべての $\alpha \in \Lambda$ に対して, $x \notin V_\alpha$ であると仮定すると, すべての $\alpha \in \Lambda$ に対して,

$$f_\alpha(x) \leq \frac{f(x)}{2}$$

である. よって,

$$f(x) = \sup_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x) \leq \frac{f(x)}{2}$$

であるが, これは $f(x) > 0$ であることに矛盾する. したがって, \mathcal{V} は X の開被覆である.

また, $x \in X$ をとり, $g = f/2$ として冒頭の議論を適用すると, x のある近傍 G_0 と $M \in [\Lambda]^{<\omega}$ が存在して, (5) を満たす. このとき,

$$\{\alpha \in \Lambda: G_0 \cap V_\alpha \neq \emptyset\} \subset M$$

である. したがって, \mathcal{V} は局所有限である. □

単位の分割

さて、定理 17 の証明に戻ろう。

証明 (←).

補題 18 より, X が Hausdorff であることを示せば十分である. そのために, $x \neq y$ を満たす $x, y \in X$ をとる. X は T_1 なので, $\mathcal{U} = \{X \setminus \{x\}, X \setminus \{y\}\}$ は X の開被覆である. 仮定より, \mathcal{U} に従属する単位の分割 $\langle f_\alpha: X \rightarrow I \rangle_{\alpha \in \Lambda}$ が存在する. いま, $a = f_{\alpha_0}(x) > 0$ を満たす $\alpha_0 \in \Lambda$ を固定する. このとき, $f_{\alpha_0}^{-1}[(0, 1]] \subset X \setminus \{y\}$ である. よって, $f_{\alpha_0}(y) = 0$ である.

$$U = f_{\alpha_0}^{-1} \left[\left(\frac{a}{2}, 1 \right] \right], V = f_{\alpha_0}^{-1} \left[\left[0, \frac{a}{2} \right) \right]$$

とおくと, $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ である. □

目次

- 1 パラコンパクト空間の萌芽
- 2 パラコンパクト空間入門
- 3 A. H. Stone の定理
- 4 単位の分割
- 5 位相多様体**
- 6 Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理
- 7 Covering property

位相多様体

定義 19

M が n 次元位相多様体 (topological manifold) であるとは、次を満たすことをいう:

- ① M は Hausdorff である.
- ② M は局所 Euclid 空間である: 任意の $x \in M$ に対して, x のある開近傍 U が存在して $U \approx \mathbb{R}^n$ である.

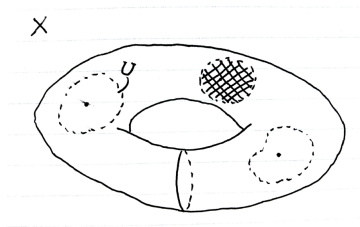


Figure: 位相多様体のイメージ.

位相多様体

位相多様体において、次が成り立つ:

定理 20

M を連結な位相多様体とするとき、次は同値である:

- ① M は第 2 可算公理を満たす.
- ② M は距離化可能である.
- ③ M はパラコンパクトである.

証明の概略.

M を位相多様体とする.

- (1) \rightarrow (2). 位相多様体は正則である. 第 2 可算公理と Urysohn の距離化定理より, M は距離化可能である.
- (2) \rightarrow (3). Stone の定理 (定理 13) より明らか.
- (3) \rightarrow (1). 省略. □

位相多様体

1 次元位相多様体はパラコンパクト性と点列コンパクト性によって完全に分類できる:

定理 21 ([15])

M を連結な 1 次元位相多様体とする.

- M がパラコンパクトかつ点列コンパクトならば, M は円周 S^1 に同相である.
- M がパラコンパクトかつ点列コンパクトでないならば, M は Euclid 直線 \mathbb{R} に同相である.
- M がパラコンパクトでないかつ点列コンパクトならば, M は長い直線 \mathbb{L} に同相である.
- M がパラコンパクトでないかつ点列コンパクトでないならば, M は長い半直線 \mathbb{L}_+ に同相である.

目次

- 1 パラコンパクト空間の萌芽
- 2 パラコンパクト空間入門
- 3 A. H. Stone の定理
- 4 単位の分割
- 5 位相多様体
- 6 Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理**
- 7 Covering property

Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理

古典的な距離化定理として、次が知られている:

定理 22 (P. Urysohn, 1924)

第 2 可算公理を満たす正則空間は距離化可能である.

この定理の証明を一般化することで、次の定理を示すことができる:

定理 23 (Bing-Nagata-Smirnov, 1950 [2] [9] [13])

X を位相空間とすると、次は同値である:

- ① X は距離化可能である.
- ② X は正則かつ σ -局所有限な開基を持つ: ある局所有限な集合族 $\{B_n : n < \omega\}$ が存在して、 $B = \bigcup_{n < \omega} B_n$ は X の開基である.

Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理

証明の概略.

(1) \rightarrow (2). X がある距離 d によって距離化可能であるとする. Stone の定理 (定理 13) より, X はパラコンパクトである. 各 $n < \omega$ に対して,

$$\mathcal{U}_n = \left\{ U_d \left(x, \frac{1}{2^n} \right) : x \in X \right\}$$

とおくと, \mathcal{U}_n は X の開被覆である. よって, \mathcal{U}_n は局所有限な開被覆による細分 \mathcal{V}_n を持つ. そこで,

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n < \omega} \mathcal{V}_n$$

とおくと, \mathcal{V} は σ -局所有限な開基である.

(2) \rightarrow (1). 省略. □

目次

- 1 パラコンパクト空間の萌芽
- 2 パラコンパクト空間入門
- 3 A. H. Stone の定理
- 4 単位の分割
- 5 位相多様体
- 6 Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理
- 7 Covering property

コンパクト性とパラコンパクト性の間の関係はわかりやすい.

定義 24

Hausdorff 空間 X が**可算コンパクト** (countably compact) であるとは, X の任意の可算開被覆が有限部分被覆を持つことをいう.

定理 25

可算コンパクトかつパラコンパクトならばコンパクトである.

コンパクト性は強すぎるので、少しだけ弱めた性質を考える。

定義 26

Hausdorff 空間 X が Lindelöf であるとは、 X の任意の開被覆が可算部分被覆を持つことをいう。

次の定理から、Lindelöf 性は一種の可算公理であると考えられる：

定理 27

X を距離空間とすると、次は同値である：

- X は第 2 可算公理を満たす。
- X は Lindelöf である。
- X は可分である。

実は, 次の定理が知られている:

定理 28 (Morita, 1948 [7])

正則 Lindelöf ならばパラコンパクトである.

また, 非可算集合の離散空間はパラコンパクトだが Lindelöf でない. 以上のことから,

コンパクト \rightarrow 正則 Lindelöf \rightarrow パラコンパクト

であることがわかった.

今度はパラコンパクト性と正規性の間の関係について見てみよう。パラコンパクト性の研究の中で、次のような概念が考えられた:

定義 29

X を Hausdorff 空間とする。

- X が**強篩分可能** (strongly screenable) であるとは、 X の任意の開被覆が σ -疎な開被覆による細分を持つことをいう。
- X が**篩分可能** (screenable) であるとは、 X の任意の開被覆が σ -互いに素な開被覆による細分を持つことをいう。

実は、パラコンパクト性と強篩分可能性は同値である:

定理 30 (Michael, 1953 [6])

X を位相空間とするとき、次は同値である:

- ① X はパラコンパクトである。
- ② X は正則かつ強篩分可能である。

Covering property

先の Michael の結果から、篩分可能性からパラコンパクト性が言えないか気になる。実際、永見啓応は次のような結果を得た:

定義 31

Hausdorff 空間 X が可算パラコンパクト (countably paracompact) であるとは、 X の任意の可算開被覆が局所有限な開被覆による細分を持つことをいう。

定理 32 (Nagami, 1955 [8])

X を位相空間とすると、次は同値である:

- ① X はパラコンパクトである。
- ② X は篩分可能, 可算パラコンパクトかつ正規である。

この結果の仮定にある「可算パラコンパクト」を排除できないだろうか。

問題 33 (Nagami, 1955 [8])

正規かつ篩分可能ならばパラコンパクトか。

Covering property

この問題の解決には 43 年もの年月を必要とした。まず, M. E. Rudin は 1983 年に $V = L$ から導かれる組み合わせ論的な性質を用いて部分的な解決に成功した:

定理 34 (Rudin, 1983 [12])

◇⁺⁺ の仮定の下, 篩分可能かつ族正規だが可算パラコンパクトでない空間が存在する。

1998 年, Zoltan Balogh はこの難問の完全な解決を果たした:

定理 35 (Balogh, 1998 [1])

篩分可能かつ正規だが可算パラコンパクトでない空間が存在する。

注意.

正規だが可算パラコンパクトでない空間はしばしば **Dowker 空間**と呼ばれる。C. H. Dowker によって 1951 年にその空間の存在が予想され, M. E. Rudin によって 1971 年に肯定的に解決されたが, 現在もなおよく研究されている。

Covering property

このように、正規性とパラコンパクト性の間の関係を単一の空間で理解するのは大変難しいことである。

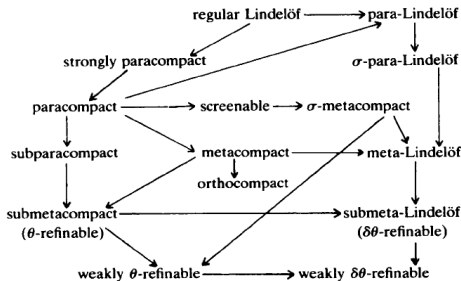


Figure: D. Burke による Covering property の図式 [3], p.370.

最後に、40年以上も未解決の問題を紹介する。

定義 36

Hausdorff 空間 X が *para-Lindelöf* であるとは、 X の任意の開被覆が局所可算な開被覆による細分を持つことをいう。

C. Navy は 1980 年に博士論文の中で以下の定理を示した:

定理 37 (Navy, 1980 [10])

正規かつ *para-Lindelöf* だがパラコンパクトでない空間が存在する。

では、「パラコンパクトでない」を「可算パラコンパクトでない」まで強めることはできるだろうか。

問題 38 (C. Navy, 1980 [10])

正規かつ *para-Lindelöf* だが可算パラコンパクトでない空間が存在するか。

- [1] Z. Balogh.
A normal screenable nonparacompact space in ZFC.
Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 1835-1844.
- [2] R. H. Bing.
Metrization of Topological Spaces.
Canadian Journal of Mathematics, Volume 3 (1951), 175-186.
- [3] D. Burke.
Covering properties, in: K. Kunen, J. E. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology.
North-Holland Publishing Company (1984), 347-422.
- [4] J. Dieudonné.
Une généralisation des espaces compacts.
Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 23 (1944), 65-76.

- [5] R. Engelking.
General topology.
Heldermann (1989).
- [6] E. Michael.
A note on paracompact spaces.
Proc. Amer. Math. Soc. 4, No. 5 (1953), 831-838
- [7] K. Morita.
Star-finite coverings and star-finite property.
Math. Japonicae 1 (1948), 60-68.
- [8] K. Nagami.
Paracompactness and Strong Screenability.
Nagoya Mathematical Journal 8 (1955), 83-88.
- [9] J. Nagata.
On a necessary and sufficient condition of metrizability.
J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A 1(2) (1950) 93-100.

- [10] C. Navy.
A Paralindelöf Space which is not paracompact.
PhD thesis, University of Wisconsin, Madison.
- [11] M. E. Rudin.
A new proof that metric spaces are paracompact.
Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 603.
- [12] M. E. Rudin.
A normal screenable non-paracompact space.
Topology Appl. 15 (1983), 313-322.
- [13] Y. Smirnov.
On the metrization of topological spaces.
Uspekhi Matematicheskikh Nauk 6, Issue 6(46) (1951), 100-111.
- [14] A. H. Stone.
Paracompactness and product spaces.
Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 977-982.

- [15] A. Yamashita.
1次元多様体の分類.
<https://yamyamtopo.wordpress.com/2015/09/17/%ef%bc%91%e6%ac%a1%e5%85%83%e5%a4%9a%e6%a7%98%e4%bd%93%e3%81%ae%e5%88%86%e9%a1%9e/>,
トポロジーいろいろ, 2020.6.10 更新, 2026.3.18 アクセス.
- [16] 児玉之宏, 永見啓応.
位相空間論.
岩波書店 (1974).