代数体と関数体, Weil 予想と岩澤理論

$^\circ\rho^\circ$(どろ゛ぉど)

@dorhodo

March 20, 2026

おしながき

1. 発表の前に
2. 整数と多項式
3. 代数曲線の Weil 予想
4. 岩澤理論へ

ちょっと！ 誰よこの人！？

- 名前 : °ρ°(どろ゛ ぉど)
- 出身 : 滋賀県
- 学年 : B -1 (高 2)

記号など

この発表では

- k を (関数体の係数) 体 (だいたい $\mathbb{F}_q$)
- L, K を体 (基本的に代数体または大域関数体)
- $\mathrm{char}(k)$ を k の標数 (自然な環準同型 $\phi : \mathbb{Z} \to k$ の核 $\ker(\phi)$ の生成元で負でない最小のもの)
- p を素数
- q を p のべき

とする.

目次

整数と多項式って似てない？

あまりのある割り算ができる！

$$17 = 3 \cdot 5 + 2$$
$$x^3 + x + 1 = (x+1) \cdot (x^2 - x + 2) + (-1)$$

冪級数のかたちにできる！

$$14 = 2 \cdot 1 + 3 + 3^2 \; (= 112_{(3)})$$
$$x^2 + x + 1 = 4 + 3(x-1) + (x-1)^2$$

Fermat 予想

3 以上の自然数 n について,

$$x^n + y^n = z^n$$

を満たす $x, y, z \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ は存在しない.

関数だと？

Fermat 予想 (関数 ver)

3 以上の自然数 n について,

$$X^n + Y^n = Z^n$$

を満たす $X, Y, Z \in \mathbb{C}[T]\backslash\mathbb{C}$ は存在しない.

整数と多項式

このように, 整数と関数には密接な関係がある.

- 関数論の考え方を整数論に応用
  (p 進数, 岩澤理論等)
- 整数論の考えを関数論 (幾何) 的に解釈し統一
  (スキーム, 数論幾何等)

Laurent 展開

点 $z = \alpha$ まわりの $f(z)$ の Laurent 展開は

$$f(z) = \sum_{\nu=-m}^{\infty} a_\nu (z-\alpha)^\nu$$

Laurent 展開の例

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\mathrm{BR}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5k}{k} \frac{(-1)^k}{4k+1} z^{4k+1}$$

($\mathrm{BR}(z)$ は $x^5 + x + z = 0$ の解)

このように, 無限次まで拡張した Laurent 級数を考えると通常の多項式よりも多様な対象を考えられる.

$$x = \sum_{\nu=-m}^{\infty} a_\nu p^\nu$$

のような形の数に拡張したものが p 進数！！
(上の級数を収束させるために導入された距離が p 進距離)
$m = 0$ としたもののなす環を $\mathbb{Z}_p$, その商体を $\mathbb{Q}_p$ と言う.

Hensel の補題

$f(x) \not\equiv 0 \mod p$ となる多項式 $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ について

$$f(x) = \overline{g}(x)\overline{h}(x) \mod p$$

となる互いに素な多項式 $\overline{g}(x), \overline{h}(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ が存在するなら, $\deg(g(x)) = \deg(\overline{g}(x))$ であって

$$g(x) \equiv \overline{g}(x) \mod p,\ h(x) \equiv \overline{h}(x) \mod p$$

となる多項式 $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ が存在して

$$f(x) = g(x)h(x)$$

と $\mathbb{Z}_p[x]$ でも分解できる.

$\left(\frac{c}{p}\right) = 1$ のとき, $f(x) = x^2 - c$ とおくと, 相異なる $a, b \in \mathbb{F}_p$ を用いて

$$f(x) \equiv (x-a)(x-b) \mod p$$

と表せるので $x - a \equiv x - \alpha \mod p,\ x - b \equiv x - \beta \mod p$ すなわち

$$\alpha \equiv a \mod p,\ \beta \equiv b \mod p$$

となる $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$ が存在する.

目次

ζ 関数

Riemannζ 関数

$\mathrm{Re}(s) > 1$ である $s \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

例 (Basel 問題)

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ζ 関数

Riemannζ 関数の性質

- $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき, Euler 積表示
$$\zeta(s) = \prod_{p:\mathrm{prime}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$
をもつ.
- $\zeta(s)$ は全複素平面に解析接続され, $s = 1$ を極に持つ

ζ 関数

Riemannζ 関数の性質

正の整数 n に対し $\zeta(1-n)$ は

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

で定義される Bernoulli 数を用いて

$$\zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n}$$

と表される

ζ 関数

予想 (Riemann)

$\zeta(s)$ の非自明な零点はすべて $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 上にある.

Riemann 以後, 様々な種類の ζ 関数及びこれらの性質の類似が考えられ, 数論に大きな影響を与えた.
(谷山志村予想, Langrans 予想など)

Kornblum の ζ 関数

Riemannζ 関数は $\mathbb{Z}$ の素数をわたる積で表せた.
$\to$ 多項式環 $\mathbb{F}_p[T]$ にも素数っぽいものの積を考えること
で ζ 関数を考えられるのでは？

定義 (Kornblum の ζ 関数)

Kornblum の ζ 関数 $\zeta_{\mathbb{F}_p[T]}(s)$ を以下の Euler 積により定義する.

$$\zeta_{\mathbb{F}_p[T]}(s) := \prod_{h:\mathbb{F}_p[T] \text{ の既約モニック}} \frac{1}{1 - N(h)^{-s}}$$

ここで, $N(h) := p^{\deg(h)}$

Kornblum の ζ 関数

$$\zeta_{\mathbb{F}_p[T]}(s) = \frac{1}{1-p^{1-s}}$$

(証明)　$\mathbb{F}_p[T]$ は UFD なので,

$$\zeta_{\mathbb{F}_p[T]}(s) = \sum_{f:\mathbb{F}_p[T] \text{ のモニック}} \frac{1}{N(f)^s}$$

$\deg(f) = k$ のモニック多項式は p^k 個あるので

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}} \cdot p^k = \frac{1}{1-p^{1-s}}$$

Riemannζ 関数は, 自然数の $-s$ 乗和で定義され, 素数による Euler 積であらわせた. ζ 関数を調べることで, 素数分布など, 整数論について様々なことが分かった.
では, $\mathbb{Q}$ の有限次拡大である代数体 K についての ζ 関数について調べればより一般の事象について考えられそう!

定義 (Dedekindζ 関数)

$$\zeta_K(s) := \sum_{\mathfrak{a}:\mathcal{O}_K\text{のイデアル}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$$

ここで, $\mathcal{O}_K$ は K の整数環 ($\mathbb{Z}$ の K における整閉包)

(例)　$K = \mathbb{Q}$ のとき

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathbb{Q}}(s) &= \sum_{\mathfrak{a}:\mathbb{Z}\text{ のイデアル}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)\end{aligned}$$

類数公式

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}\cdot(2\pi)^{r_2}\cdot h_K\cdot \mathrm{Reg}_K}{w_K\cdot\sqrt{|D_K|}}$$

ここで, h_K は K の類数である.
(その他の記号の詳細は省略)

関数体

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{Q}\text{ の}\zeta & \longleftrightarrow & \mathbb{F}_p(T)\text{ の}\zeta \\
\text{(Riemann)} & & \text{(Kornblum)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{Q}\text{ の有限次拡大の}\zeta & \longleftrightarrow & \mathbb{F}_q(T)\text{ の有限次拡大の}\zeta \\
\text{(Dedekind)} & &
\end{array}
$$

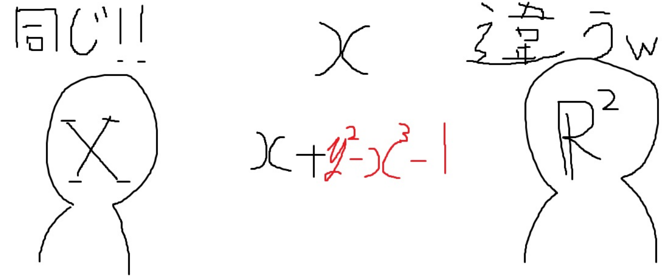
$\mathbb{F}_q(T)$ の有限次拡大体を大域関数体という

なぜ関数体なのか

$\mathbb{F}_q$ より直感的なので $\mathbb{R}$ で, 少し考えてみる.
$\mathbb{R}^2$ 上の多項式関数全体は $\mathbb{R}[x, y]$ である.
$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + 1\}$ の場合を考える.
これの多項式関数全体は $\mathbb{R}[x, y]/(y^2 - x^3 - 1)$ になる!!

なぜ関数体なのか

$X \subset \mathbb{R}^2$ なので, 基本的には $\mathbb{R}[x, y]$ になりそうだが,
X 上で値が一致していればよいので, 例えば



つまり, $(y^2 - x^3 - 1)$ の違いは X では無視されるので,
X の多項式関数全体は $\mathbb{R}[x, y]/(y^2 - x^3 - 1)$ になる!!

なぜ関数体なのか

$\mathbb{R}[x,y]/(y^2-x^3-1)$ の商体は $K := \mathbb{R}(x)$ とおくと $K[y]/(y^2-x^3-1)$ となり, これは K の二次拡大となる.

より一般に, 体 k に対し $K = k(x)$ の代数拡大は, k 上の代数曲線の関数のなす体とみなせる!

因子

定義 (因子)

K の素因子 $P_1, \cdots, P_\lambda$ の形式的な和

$$D = n_1 P_1 + \cdots + n_\lambda P_\lambda$$

を K の因子という.
特に, $n_1, \cdots, n_\lambda$ がすべて 0 以上であるとき, D を有効因子といい, $D \geq 0$ とかく.

$$\deg D := n_1 + \cdots n_\lambda$$

因子

定義

$a \in K$ に対し
$$(a) := \sum_P \mathrm{ord}_P(a)$$
を標準因子という．また，標準因子は $\deg(a) = 0$ をみたす．

例 (標準因子)

$$f(x) = \frac{x(x-1)^2}{(x+1)(x+3)}$$

を考えると,
$x=0$ で位数 1 の零点
$x=1$ で位数 2 の零点
$x=-1,-3$ で 1 位の極
$x=\infty$ で 1 位の極をもつのでそれぞれの点を
$P_0, P_1, P_{-1}, P_{-3}, P_\infty$ とおくと

$$(f(x)) = P_0 + 2P_1 - P_{-1} - P_{-3} - P_\infty$$

であり,

$$\deg(f(x)) = 1+2-1-1-1 = 0$$

関数体の ζ 関数

定義 (関数体の ζ 関数)

K を大域関数体 ($\mathbb{F}_q(T)$ の有限次拡大) とするとき，

$$\zeta_K(s) := \sum_{A \geq 0} \frac{1}{NA^s}$$

ここで，$NA = q^{\deg A}$

(例)

$$\zeta_{\mathbb{F}_q(T)}(s) = \frac{1}{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})}$$

↑無限遠点も考えるのでちょっと形が変わっている

定理

g を K の種数 (K を関数体にもつ曲線の種数) とするとき, ある次数 $2g$ の多項式 $L_K(u) \in \mathbb{Z}[u]$ が存在して

$$\zeta_K(s) = \frac{L_K(q^{-s})}{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})}$$

関数体の ζ 関数

関数体の Riemann 予想 (Artin)

K を大域関数体とするとき $\zeta_K(s)$ の零点はすべて $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 上にある.
言い換えると, $L_K(u)$ の零点 α はすべて $|\alpha| = \sqrt{q}$ をみたす.

$g = 1$ の場合 (つまり楕円曲線) については Hasse によって, より一般の場合については Weil によって示された.

Hasse の定理

楕円曲線

$\mathrm{char}(k) \neq 2, 3$. $a, b \in k$ は $\Delta := -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0$ をみたすとき,

$$E : y^2 = x^3 + ax + b$$

を k 上の楕円曲線という.
($\mathrm{char}(k) = 2, 3$ のときも定義できるが面倒なため省略)
これは種数 1 の非特異射影曲線となる.
また, これを満たす $(x, y) \in \mathbb{P}^2(k)$ を E の k 有理点といい, その集合を $E(k)$ と書く.

Hasse の定理

定理 (Hasse)

E を $\mathbb{F}_q$ 上の楕円曲線とするとき, 以下が成り立つ.

$$|q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q)| \leq 2\sqrt{q}$$

この Hasse の定理は E の関数体 $k(E)$ の Riemann 予想と同値である.

楕円曲線は Abel 群の構造をもった Abel 多様体であるということを利用する. $\overline{\mathbb{F}_q}$ 上に広げた $E(\overline{\mathbb{F}_q})$ で考えると m 倍写像が定義出来るので, E の m 等分点 (m ねじれ点) を

$$E[m] := \{P \in E(\overline{\mathbb{F}_q}) \mid mP = O\}$$

と定義する. m が q と互いに素のとき,

$$E[m] \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

$P \in E[m]$ には $\sigma \in G_{\mathbb{F}_q} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$ が作用し,

$$m\sigma(P) = \sigma(mP) = \sigma(O) = O$$

となるので, 表現

$$G_{\mathbb{F}_q} \to \mathrm{Aut}(E[m]) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$$

を得るが, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は標数 0 でないため, 行列が扱いにくい.

Hasse の定理の証明方針

定義

E を楕円曲線, l を素数とする．このとき,

$$T_l(E) := \varprojlim_n E[l^n]$$

を E の (l 進)Tate 加群という．

l, q が互いに素なら,

$$T_l(E) \cong \varprojlim_n (\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_l$$

Frobenius 写像

$$\mathrm{Frob}_q : E(\overline{\mathbb{F}_q}) \ \to \ E(\overline{\mathbb{F}_q})$$

から誘導される, Tate 加群間の線形写像

$$\phi : T_l(E) \ \to \ T_l(E)$$

の固有多項式を考えるとうまくいく

Hasse の定理の証明方針

$\det(\phi) = q,\ \mathrm{Tr}(\phi) = q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q) =: a_q$ より，ϕ の固有多項式は

$$\det(T - \phi) = T^2 - \mathrm{Tr}(\phi)T + \det(\phi) = T^2 - a_q T + q$$

これが実数 T について常に 0 以上であることを示すことで証明できる!!

また, 関数体の Riemann 予想からは代数曲線 C の点の個数 $\#C(\mathbb{F}_q)$ について以下の評価が得られる.

定理 (Weil)

C を種数 g の $\mathbb{F}_q$ 上の代数曲線とするとき

$$|q + 1 - \#C(\mathbb{F}_q)| \leq 2g\sqrt{q}$$

より一般の場合はどうするのか

定義 (因子類群)

K の因子のなす群 $\mathcal{D}_K$ の同値関係を

$$D_1 \sim D_2 \overset{\text{def}}{\iff} \text{ある } f \in K \text{ が存在して } D_1 - D_2 = (f)$$

とするとき因子類群を $Cl(K) := \mathcal{D}_K / \sim$ と定義する．このとき

$$\deg : Cl(K) \to \mathbb{Z}$$

は準同型であり，その核 $Cl^0(K)$ は Abel 多様体となる．
K が代数曲線 C の関数体 $k(C)$ なら，これを $J(C)$ と書き，Jacobi 多様体という．

より一般の場合はどうするのか

$J(C)$ は Abel 多様体なので群構造を持ち, 楕円曲線の場合と同様にして Tate 加群を構成できる!

ではこの Tate 加群, そして Jacobi 多様体 (因子類群) とは結局何者なのか？

$Cl(K)$ の定義はすなわち, 標準因子による自然な準同型

$$K^* \to \mathcal{D}$$

の余核を考えているということである.
これはイデアル類群が

$$K^* \to J_K$$

の余核であったことを踏まえると, 非常に似ている.

目次

関数体の場合は Frobenius 写像

$$\mathrm{Frob}_q : C(\overline{\mathbb{F}_q}) \;\to\; C(\overline{\mathbb{F}_q})$$

を考えることが重要なポイントの一つであった. また, 因子類群を調べるといったことについても述べた. これらの概念を代数体の場合についても考えたい.

岩澤理論へ

係数体の代数閉包 $\overline{\mathbb{F}_q}$ の類似を考えたい．代数体に類似する概念はないので，$\mathbb{F}_q$ から $\overline{\mathbb{F}_q}$ を作る際の手法を真似してみたい．
有限体の拡大は 1 の冪根の添加によって作られていたため，代数体 K に 1 の冪根をすべて添加した体

$$\bigcup_n K(\mu_n)$$

を考えたいが，これは少々大きいため，

$$K(\mu_{p^\infty}) := \bigcup_n K(\mu_{p^n})$$

を考える．

岩澤類数公式

定理 (Iwasawa)

イデアル類群 $Cl(K(\mu_{p^n}))$ の p–Sylow 群を $A_{K(\mu_{p^n})}$ とすると, 十分大きい n について, 定数 λ, μ, ν が存在して

$$\#A_{K(\mu_{p^n})} = p^{\lambda n + p^n \mu + \nu}$$

となる.

岩澤類数公式の例

$K = \mathbb{Q}, p = 37$ のとき

$$A_{\mathbb{Q}(\mu_{37^n})} \cong \mathbb{Z}/37^n\mathbb{Z} \tag{1}$$

$$A_{\mathbb{Q}(\mu_{37^\infty})} \cong \varprojlim_n \mathbb{Z}/37^n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{37} \tag{2}$$

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1399}), p = 3$ のとき

$$A_{K(\mu_{3^n})} \cong \mathbb{Z}/3^{n+2}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3^{n-1}\mathbb{Z} \tag{3}$$

$$A_{K(\mu_{3^\infty})} \cong \varprojlim_n (\mathbb{Z}/3^{n+2}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3^{n-1}\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \tag{4}$$

$\mathbb{Z}_p$ の世界で色々考えればよさそう!!

p 進 L 関数

p 進数の世界にも ζ 関数のようなものを考える上で, L 関数の概念を導入する.

定義

$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ を Dirichlet 指標とするとき,

$$L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

を **Dirichlet の L 関数**という.

この定義をそのまま p 進数的に解釈しても上手くいかないため別の方法を考える.

……の前に L 関数周辺の性質を見てみる.

Dirichlet の L 関数の性質

- $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき, Euler 積表示

$$L(s,\chi) = \prod_{p:\mathrm{prime}} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

  をもつ.
- $L(s,\chi)$ は全複素平面に解析接続される

Dirichlet の L 関数の性質

$\mathrm{mod}\ f$ の指標 χ, 正の整数 n に対し $L(1-n,\chi)$ は

$$\sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) x e^{ax}}{e^{fx}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n,\chi}}{n!} x^n$$

で定義される一般 Bernoulli 数を用いて

$$L(1-n,\chi) = -\frac{B_{n,\chi}}{n}$$

と表される

定理 (Kummer)

n, r_1, r_2 を正の整数で, r_1 は $p-1$ で割り切れないとする. このとき

$$r_1 \equiv r_2 \mod p^{n-1}(p-1)$$
$$\Rightarrow (1-p^{r_1-1})\zeta(1-r_1) \equiv (1-p^{r_2-1})\zeta(1-r_2) \mod p^n$$

これはつまり, r_1 と r_2 が p 進的に近ければその分 $(1-r)\zeta(1-r)$ の値も近いということである!!

定義

$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ を Dirichlet 指標とするとき，

$$L_p(s,\chi) = (1 - \chi\omega^{-r}(p)p^{r-1})L(1-r, \chi\omega^{-r})$$

をみたす $\mathbb{Z}_p$ から $\overline{\mathbb{Q}_p}$ への p 進正則関数 $L_p(s,\chi)$ がただ一つ存在する．これを久保田-Leopold の p 進 L 関数という．

p 進 L 関数

性質

$O_\chi := \mathbb{Z}_p[\mathrm{Im}\chi]$ とする．久保田-Leopold の p 進 L 関数 $L_p(s,\chi)$ に対し，ある $G_\chi(T) \in O_\chi[[T]]$ と位相的生成元 u が存在して

$$L_p(s,\chi) = G_\chi(u^s - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (u^s - 1)^n$$

と表せる．(このように表せる関数を岩澤関数という)

別方向からの ζ 関数

ところで, 関数体の ζ 関数は $\mathrm{Frob}_q \in G_{\mathbb{F}_q}$ の $T_l(E)$(より一般にはエタールコホモロジー $H^i(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_l)$) への作用を調べることによって得られるものであった. これの類似を考えたい.

岩澤主予想へ

ノルム写像に関する逆極限

$$X := \varprojlim_n A_{\mathbb{Q}}(\mu_{p^n})$$

$$X^{\omega^i} := \{x \in X \mid \forall \sigma \in \Delta, \sigma(x) = \omega(\sigma)^i x\}$$

とおくと, 位相的生成元 $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})$ に対し,
$\gamma - 1$ の X^{ω^i} への作用の固有多項式

$$\det(TI - V_{\gamma-1})$$

を考える.

岩澤主予想へ

定理

$$\mathrm{Char}(X^{\omega^i}) = (\det(TI - V_{\gamma-1}))$$

が成立.

左辺は特性イデアルと言い, 元の個数を一般化したものである.

岩澤主予想へ

岩澤主予想

χ を奇指標で $\chi \neq \omega$ を満たす第 1 種指標であるとする．このとき，$\mathcal{O}_\chi[[T]]$ のイデアル間の等式

$$\mathrm{Char}((X)_\chi) = \left(\frac{1}{2} G_{\chi^{-1}\omega}(T)\right)$$

が成立する．

参考文献

- Rosen, M. (2013). Number theory in function fields. Springer Science & Business Media
- 黒川信重・栗原将人・斎藤毅 (2005). 数論 II: 岩澤理論と保型形式 岩波書店
- J.H.Silverman (2009). The Arithmetic of Elliptic Curves, 2nd edition Springer. J.H. シルヴァーマン (著) 鈴木治郎（訳）(2023)．楕円曲線の数論―基礎概念からアルゴリズムまで― 共立出版
- J.Neukirch (1999). Algebraic Number Theory Springer. J. ノイキルヒ (著), 足立恒雄 (監訳), 梅垣敦紀 (翻訳) (2012)． 代数的整数論 丸善出版
- 高橋浩樹. (2020). 福田隆: 重点解説 岩澤理論――理論から計算まで――, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ, 145, サイエンス社
- 黒川信重・小山信也. (2018). ゼータへの招待 日本評論社
- 青木美穂. (2019). p 進ゼータ関数―久保田-レオポルドから岩澤理論へ― 日本評論社
- 三枝洋一 (2024). 数論幾何入門: モジュラー曲線から大定理・大予想へ 森北出版
- D. シグマ (2017). 楕円曲線と保型形式のおいしいところ 暗黒通信団
- 橋本喜一朗. (2017). 探検! 数の密林・数論の迷宮 日本評論社