数学Ⅲのすきまをうめる話　数列編　参照資料

● 準備

三角不等式

a, b を実数とすると，不等式 $|a+b| \leqq |a|+|b|$ が成り立つ．

証明

$$(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$$
$$=2(|ab|-ab) \geqq 0 \quad (\text{等号は } ab \geqq 0 \text{ のときのみ成立})$$

よって $|a+b|^2 \leqq (|a|+|b|)^2$ となるが，$|a|+|b| \geqq 0$，$|a+b| \geqq 0$ より

$|a+b| \leqq |a|+|b|$ が成り立つ．

● 準備

三角不等式

$$|c|-|a| \leqq |c-a|$$

証明

$|a+b| \leqq |a|+|b|$ において $c=a+b$ とすると

$$|c| \leqq |a|+|c-a|$$

移項して

$$|c|-|a| \leqq |c-a|$$

● 準備

三角不等式

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqq|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

証明

$|a+b|\leqq|a|+|b|$ を逐次適用すると，

$$\begin{aligned}
\text{左辺}&=|a_1+a_2+\cdots+a_n|\\
&\leqq|a_1|+|a_2+\cdots+a_n|\\
&\leqq|a_1|+|a_2|+|a_3+\cdots+a_n|\\
&\cdots\\
&\leqq|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|
\end{aligned}$$

よって　$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqq|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

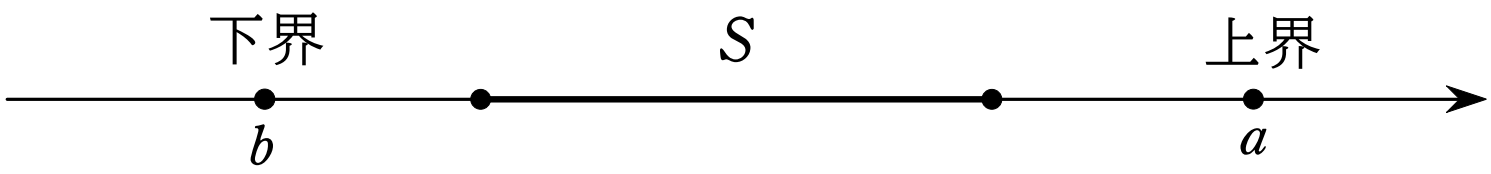
● 準備

定義　上界と下界

S を実数の部分集合とし，a を実数とするとき，

［1］ S に属するすべての x について，$x \leqq a$ が成り立つとき，a は S の上界という．

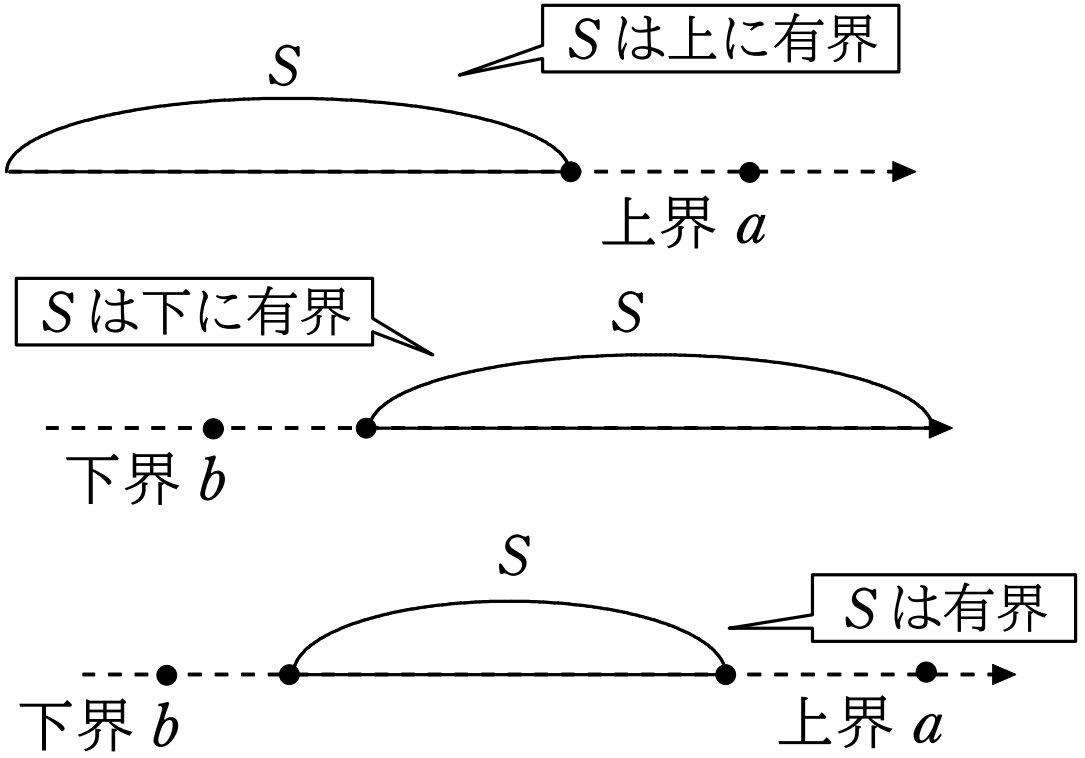
［2］ S に属するすべての x について，$b \leqq x$ が成り立つとき，b は S の下界という．



● 準備

上に有界，下に有界，有界

実数の部分集合 S が上界をもつとき， S は上に有界であるという．
また，S が下界をもつとき，S は下に有界であるという．
集合 S が上にも下にも有界であるとき，単に S は有界であるという．



● 準備　～下に有界なら下限がある～

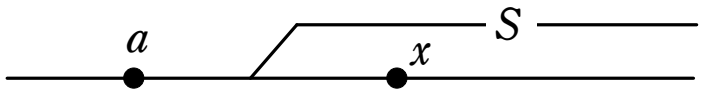
定理

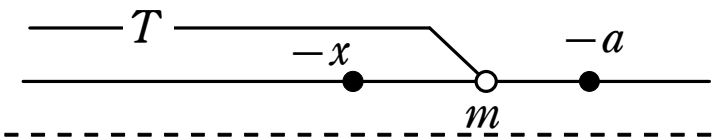
実数の部分集合 S が下に有界であるとき，S の下限が存在する．

証明　$T=\{-x \mid x\in S\}$ とする．

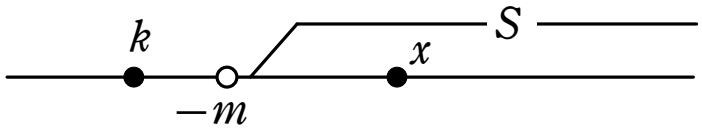
S が下に有界のとき，ある下界 a が存在してすべての $x\in S$ に対して，$a\leqq x$ つまり $-a\geqq -x$ が成り立つ．

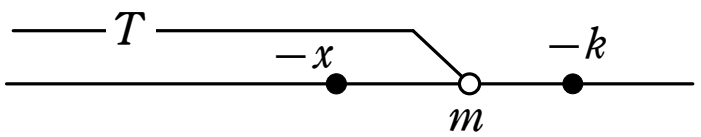
$-x$ は T のすべての元たりえるので，T は上に有界である．公理より T は上限 m をもつ．





すべての $-x\in T$ に対して $-x\leqq m$ なので $x\geqq -m$ である．よって $-m$ は S の下界の１つである．





S の任意の下界を k とすると任意の $x\in S$ に対して，$k\leqq x$ つまり $-k\geqq -x$ が成り立つ．

m が S の最小の上界だから，$m\leqq -k$ つまり，$-m\geqq k$ となり，$-m$ が S の最大の下界であることがわかる．

よって題意が示された．

● 準備　上限・下限

最大値・最小値だけでは表せない集合の端の値を表す概念を導入する．

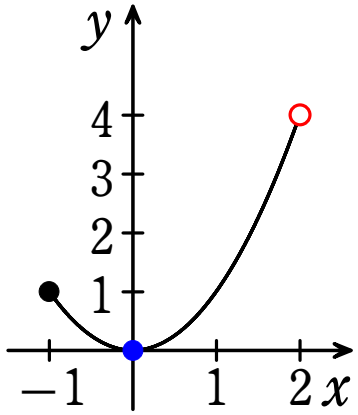
［1］ 実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 S が上に有界であるとき，その上界の中で最小の実数が存在するなら，それを S の上限といい，記号で $\sup S$ と書く．

［2］ 実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 S が下に有界であるとき，その下界の中で最大の実数が存在するなら，それを S の下限といい，記号で $\inf S$ と書く．

例　関数 $y=x^2\,(\,-1\leqq x<2\,)$ の値域は $0\leqq y<4$

最小値は 0，下限は 0.

最大値はない，上限は 4



● 実数の連続性と数列の収束・発散

アルキメデスの原理の系

任意の正の実数 a と任意の実数 b に対して，ある自然数 n が存在して $a>\dfrac{b}{n}$ が成り立つ．

証明

題意を満たす n の存在を確認できればよい．アルキメデスの原理からある自然数 n が存在して

$$an>b$$

が成り立つ．両辺を $n>0$ で割ると

$$a>\frac{b}{n}$$

を得る．よって n が所望のものである．

● 実数の連続性と数列の収束・発散

高校の数列の収束と発散について確認する．

数列の収束

数列 $\{a_n\}$ において， n を限りなく大きくするとき， a_n が一定の値 α に限りなく近づくならば，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad n\to\infty \text{ のとき } a_n \to \alpha$$

と書き，この値 α を数列 $\{a_n\}$ の極限値という．

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき， $\{a_n\}$ は発散するという．

特に，$n\to\infty$ のとき a_n が限りなく大きくなることを正の無限大に発散するといい，

$n\to\infty$ のとき a_n が負で絶対値が限りなく大きくなるとき負の無限大に発散するという．

これらの定義だと「 n を限りなく大きくする」といった無限についての計算を行わないといけないが，具体的にどうすればよいかわからない．そこで，次のページで有限の計算で極限を論じられる定義をみていく．

● 実数の連続性と数列の収束・発散

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 0$ を示せ.

証明

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ より任意の $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きい N_1 が存在して $n \geqq N_1$ なら $|a_n| < \varepsilon$ が成り立つ.

$|a_n - 0| < \varepsilon$

このとき三角不等式から

$$|a_{N+1}+\cdots+a_n| < |a_{N+1}|+\cdots+|a_n| < \varepsilon+\cdots+\varepsilon = (n-N)\varepsilon$$

であるから，$$\frac{|a_{N+1}+\cdots+a_n|}{n} < \frac{(n-N)\varepsilon}{n} < \frac{n\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

N_2 は実数であり，
自然数とは限らない.

$N_2 = \dfrac{|a_1+\cdots+a_N|}{\varepsilon} + 1$ とすると $n \geqq N_2$ のとき $\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{N_2}$ より

$$\frac{|a_1+\cdots+a_N|}{n} < \frac{|a_1+\cdots+a_N|}{N_2} = \frac{|\quad|}{\frac{|\quad|}{\varepsilon}+1} = \frac{\varepsilon|\quad|}{|\quad|+\varepsilon} < \frac{\varepsilon|\quad|}{|\quad|} = \varepsilon$$

$N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$n \geqq N_3$ のとき

$$\frac{|a_1+\cdots+a_n|}{n} \leqq \frac{|a_1+\cdots+a_N|}{n} + \frac{|a_{N+1}\cdots+a_n|}{n} < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$$

なので $\left|\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n} - 0\right| < 2\varepsilon$ が成り立つ N_3 の存在が示されたので，題意は成り立つ.

● 実数の連続性と数列の収束・発散

$\varepsilon - N$ 論法を用いると，数列が収束しないことを証明することもできる．

例題

第 n 項が $a_n = (-1)^n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ は収束しないことを示せ．

証明

数列 $\{a_n\}$ がある実数 α に収束するとして，背理法で証明する．

数列 $\{a_n\}$ が収束することから $\varepsilon = 1$ のとき，ある番号 N が存在して $n \geqq N$ のとき

すべての n について

$$|a_n - \alpha| < 1$$

となる必要がある．

n が偶数のとき $a_n = 1$ だから $|1 - \alpha| < 1$，特に $1 - \alpha < 1$ が成り立つ．

n が奇数のとき $a_n = -1$ だから $|-1 - \alpha| < 1$，特に $1 + \alpha < 1$ が成り立つ．

このとき $\alpha > 0$，$\alpha < 0$ となるから矛盾．よって数列 $\{a_n\}$ は実数値 α に収束しない．

● 実数の連続性と数列の収束・発散

$\varepsilon - N$ 論法を用いると数列が正の無限大に発散することも定義できる.

定義　正の無限大・負の無限大への発散

（1） 任意の実数 M に対して，ある自然数 N が存在して，$n \geqq N$ となるすべての自然数 n について $a_n > M$ となるとき，数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散するという.

（2） 任意の実数 M に対して，ある自然数 N が存在して，$n \geqq N$ となるすべての自然数 n について $a_n < M$ となるとき，数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散するという.

気持ち的には…

どんなに大きな M があっても， n を十分に大きくすれば $a_n > M$ を満たすということを正の無限大に発散すると考えている．負の無限大についても同様.

● 実数の連続性と数列の収束・発散

例題

第 n 項が $a_n = n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散することを示せ.

証明

M を任意の実数として，アルキメデスの原理を 1 と M に適用すると，ある自然数 N が存在して，
$N > M$ ($1 \cdot N > M$) が成立する．このとき $n \geqq N$ なるすべての自然数 n に対して
$a_n = n > N > M$ となるから，$\{a_n\}$ は正の無限大に発散する.

負の無限大についても同様に議論することができる.

次のページ以降から，収束する数列の性質について考えていく.

● 収束する数列の性質

定理

数列 $\{a_n\}$ が収束するとき，その極限値は一意的に定まる．

証明

$\{a_n\}$ が α にも β にも収束すると仮定する．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな自然数が存在して $n \geqq N_1$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$，$n \geqq N_2$ ならば $|a_n - \beta| < \varepsilon$ が成立する．

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$n \geqq N$ ならば，

$$|\alpha - \beta| = |\alpha - a_N + a_N - \beta| \leqq |a_n - \alpha| + |a_N - \beta| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

が成り立つ．ε の原理により $\alpha = \beta$ となり，極限値は一意に定まることが示された．

極限が一意に定まるのは，ε の原理が由来．

● 収束する数列の性質

定理　収束列の有界性

収束する数列 $\{a_n\}$ は有界である.

証明

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ とする. $\{a_n\}$ が収束するから特に $\varepsilon=1$ としたときに,

十分大きな N が存在して $n\geqq N$ ならば $|a_n-\alpha|<1$ が成立する必要がある.

三角不等式から,

$$|a_n|-|\alpha|\leqq|a_n-\alpha|<1$$

となり, $|a_n|<|\alpha|+1$ を得る. ここで, N 個の実数

$$|a_1|,\ |a_2|,\ \cdots,\ |a_{N-1}|,\ |\alpha|+1$$

のうち最大のものを M とすると, $|a_n|<M$ がいえる. よって収束列は有界であることがいえた.

$a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots, a_n$ の $n-N$ 項はすべて $|\alpha|+1$ 以下である.

● 収束する数列の性質

定理　部分列の極限

$\{a_n\}$ を実数 α に収束する数列とする．このとき，$\{a_n\}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}$ も α に収束する．

証明

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きな N が存在して，

$n \geqq N$ ならば　　$|a_n - \alpha| < \varepsilon$

である．ここで，部分列の番号について $n_K \geqq N$ となる 1 つの $n_K(K)$ をとる．

このとき $k \geqq K$ となるすべての番号 k について

$$|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．これは $\{a_{n_k}\}$ が α に収束することそのものである．

● 収束する数列の性質

定理　大小関係と極限

$\{a_n\}$ を α に収束する数列とする．

（1） 実数 a について，$a_n \geqq a$ が無限個の番号 n について成り立つならば $\alpha \geqq a$．

（2） 実数 b について，$a_n \leqq b$ が無限個の番号 n について成り立つならば $\alpha \leqq b$ ．

証明

（1）$a_n \geqq a$ が成り立つような番号は無限個あるので，その無限個の番号を小さい順にならべてできる $\{a_n\}$ の部分列を $\{a_{n_k}\}$ とおく．このとき $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ である．

この部分列をあらためて $\{a_n\}$ で表すこととする．このときすべての n で $a_n \geqq a$ である．

$\alpha \geqq a$ を背理法で示すために，$\alpha < a$ と仮定する． $\varepsilon = a - \alpha > 0$ とすると，十分大きな N について $n \geqq N$ ならば $|a_n - \alpha| < a - \alpha$，特に $a_n < a$ が成り立つことになり矛盾．

したがって $\alpha \geqq a$ が成り立つ．（2）も同様に示せる．