シークエント計算入門
～カット除去定理とその応用～

くま

本講演では，数理論理学の基礎から始め，その基本的体系の一つである**シークエント計算**を導入する．そして，シークエント計算において重要な**カット除去定理**の証明の概略と，その応用について紹介する．

数理論理学（数学基礎論）は「数学を数学する」分野だとしばしば説明される．これは，数理論理学では数学の営みを記号を用いて形式化し，その構造を数学的に調べる分野を意味する．例えば，数理論理学では「集合」「真偽」「証明」「計算」のような概念が，数学的な道具立てで分析されている．

上記の概念の中でも特に「証明」を分析する分野は証明論と呼ばれ，その代表的な体系の一つが**シークエント計算**である．シークエント計算は 1935 年にゲンツェンによって導入された証明体系であり，「仮定（の列） Γ から 結論（の列） Δ が導かれる」を意味する **シークエント** $\Gamma \Rightarrow \Delta$ を導出する．例えば， $\Rightarrow A \to (B \to (A \land B))$ （「A ならば「B ならば「A かつ B」」」）の証明は次の証明図によって与えられる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}\,(\mathrm{LW}) \qquad \dfrac{B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow B}\,(\mathrm{LW})}{A, B \Rightarrow A \land B}\,(\mathrm{R}\land)}{A \Rightarrow B \to (A \land B)}\,(\mathrm{R}\to)}{\Rightarrow A \to (B \to (A \land B))}\,(\mathrm{R}\to)$$

ゲンツェンはシークエント計算の体系 LK, LJ の導入とともに，次の**カット除去定理**を示した．

定理 1. LK（LJ）で $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明可能（証明図が存在する）であれば, LK（LJ）で $\Gamma \Rightarrow \Delta$ は**カット規則**を用いずに証明可能である．ここで，カット規則とは次の規則である．

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(\mathrm{Cut})$$

カット規則は「「A ならば B」 かつ 「B ならば C」ならば,「A ならば C」」という三段論法の形式化であり，論理として要請されるべき規則である．一方この規則では，カットされる論理式（上の A）の情報が下から上へ向かって（どのようにも！）増大しうる．このため，カット規則の存在は，証明図の構造の分析において不都合である．それゆえ，カット規則が用いられない「余分な情報を含まない証明図」の存在を保証するカット除去定理は重要でかつ有用な定理である．

そしてこの定理の応用により，論理のさまざまな性質を示すことができる．例として，無矛盾性，選言特性，存在特性，決定可能性，などの性質を導くことができる．本講演ではこれらの応用について重点的に紹介し，カット除去定理の嬉しさをお伝えできれば幸いである．