代数閉体の圏論的特徴づけ

るめなる (@Re1yra) — 2026/02/19

体 k が**代数閉体**であるとは、任意の定数でない多項式 $f(x) \in k[x]$ に対して、ある $a \in k$ が存在して、k において $f(a) = 0$ が成り立つことをいうのでした。 この定義では **1 変数**多項式の根の存在のみを要請していますが、実はここから**多変数**の**連立**方程式の根の存在までを言うことができます：

Theorem 1 —— Hilbert の弱零点定理 (Hilbert's weak Nullstellensatz)

k を代数閉体とする。 このとき、任意の整数 $m, n \geq 1$ と任意の多項式 $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ に対し、$(f_1, \ldots, f_m) \neq (1)$ なら、ある $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ が存在して、k において

$$f_1(a_1, \ldots, a_n) = \cdots = f_m(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

が成り立つ。

さて、このように代数閉という条件は名前通り非常に代数的な条件に見えます。 しかし、驚くべきことに、可換環全体の圏 CRing において、代数閉体を**純粋に圏論的な条件**によって特徴づけることができるのです！ もう少し具体的に述べると、次のようなことが成り立ちます：

(1) 終対象をもつ余完備な圏 C に対し、C の対象が **Nullstellensatzian** であるという性質を定義できる。 ここで、「終対象をもつ」と「余完備」という条件は一般的な圏論的仮定であることに注意。

(2) CRing の対象に対して、それが代数閉体であることと Nullstellensatzian であることが同値になる。

本講演では、圏論の入門書で扱われている程度の圏論の基本事項（特に極限・余極限）と、剰余環やイデアル程度の環論の基礎事項を仮定して、この圏論的な条件による代数閉体の特徴づけについて解説します。 実は、証明のキーとなるのは上で述べた Hilbert の弱零点定理（Theorem 1）なのです！ Nullstellensatzian という用語もここから来ています。

Nullstellensatzian object の概念は、安定ホモトピー論に関する論文である [BSY22] において導入されました。 もし時間があれば、[BSY22] において Nullstellensatzian object の概念がどのようなことに・どのような動機で使われているのかという安定ホモトピー論側の話についても、その概要をお話できればと思います。

参考文献

[BSY22] Robert Burklund, Tomer Schlank, and Allen Yuan. The Chromatic Nullstellensatz. to appear in Annals of Mathematics. arxiv:2207.09929.