

パラコンパクト空間とその応用について

ソフィア・ヒナコフシカ

2026年2月

本講演では、現代の位相空間論において最も重要な性質のひとつであるパラコンパクト性について紹介する。Hausdorff空間がパラコンパクトであるとは、任意の開被覆が局所有限な開被覆による細分をもつことをいう。

パラコンパクト性は1944年にフランスの数学者 Jean Dieudonné によって [1] で導入された。Dieudonné はコンパクト性における条件「有限部分被覆が存在する」を「局所有限な開被覆による細分が存在する」に緩めても、コンパクト空間で成立するいくつかの基本的事実が成り立つことを示した。さらに彼は、同論文において可分距離空間がパラコンパクトであることを証明し、一般に距離空間はパラコンパクトであるかという問題を提起した。この問題に対する解答を与えたのが Arthur Harold Stone である：

Theorem 1 (A. H. Stone, 1948 [3]) 距離空間はパラコンパクトである。

その後、Ernest Michael はパラコンパクト空間に関して次の定理を証明した：

Theorem 2 (E. Michael, 1953 [2]) T_1 空間 X において、次は同値である：

1. X はパラコンパクトである。
2. X の任意の開被覆に従属する局所有限な単位の分割が存在する。
3. X の任意の開被覆に従属する単位の分割が存在する。

ここで単位の分割とは、 X 上の連続関数族 $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ であって、各点の近傍で有限個を除いて 0 となり、かつ任意の点 $x \in X$ に対して

$$\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$$

が成り立つものをいう。単位の分割は、局所的に定義された構成を大域的に貼り合わせるための基本的な道具である。そのため、パラコンパクト性は多様体を扱う文脈においてしばしば現れる。

本講演の前半では、Theorem 1 と Theorem 2 を目標にパラコンパクト性の定義、基本的な性質および具体例を紹介し、その概念の理解を深める。後半では、パラコンパクト性に関連する発展的な話題として、次を取り上げる：

- 位相多様体。

- Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理.
- covering property とパラコンパクト性の関係について.

講演前半は入門的内容とし, 前提知識として学部 2-3 年で学ぶ集合と位相の知識のみを仮定する. 特に, 集合については選択公理, 位相についてはコンパクト性および分離公理を理解していることを想定する. 後半では一部に初歩的な集合論の知識を要するが, 概ね前半の内容を踏まえて理解できる構成とする.

参考文献

- [1] Jean Dieudonné. Une généralisation des espaces compacts. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Neuvième Série* 23: 65-76.
- [2] Ernest Michael. A note on paracompact spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 4 (1953), 831-838.
- [3] Arthur Harold Stone. Paracompactness and product spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* 54(10): 977-982 (October 1948).