代数体と関数体, Weil 予想と岩澤理論

°ρ°(どろ˘ぉど) (@dorhodo)

【内容】

数と関数には密接な関係がある．簡単な例として整数と多項式には「余りのある割り算」というものが考えられる．より発展的な例としては, Hensel による p 進数の概念も, 複素関数論における Taylor 展開 (あるいは Laurent 展開) の類似を数論的に考えたことに由来する (p 進展開).

さて, 20 世紀中ごろ, 有限体上の代数多様体の性質について考えた Weil 予想が提唱され, Dwork, Grothendieck, Deligne らによって解決された．この証明, もっと言えばそれ以前の特殊な場合についての証明においても鍵となっていたのは

$$X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$$

という, 係数体を代数閉体にした代数多様体上の Frobenius 写像

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Frob}_q\colon & \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q}) \\ & \uplus & & \uplus \\ & [x_0, x_1, \cdots, x_n] & \longmapsto & [x_0^q, x_1^q, \cdots, x_n^q] \end{array} \tag{1}$$

の作用を調べることにあった．これによって, X が代数曲線の場合はその関数体のイデアル類群についても多くのことが分かった．イデアル類群は代数体の場合においても (むしろ歴史的経緯を考えれば代数体の場合のほうが) 重要な対象であるため, 同様のことを考えてみたい．しかしここである問題が生じる．これらの類似の議論が上手くいく, 係数体のような概念が代数体にはないのである.

そこで, $\mathbb{Z}_p$ 拡大という, 有限体の代数拡大の類似となる無限次 Galois 拡大を考えれば代数体の類数について部分的に分かる, というのが岩澤理論である.

本発表では代数体と関数体という 2 つの世界を行き来し, その上に成り立つ美しい理論について紹介するつもりである.

【前提知識】

Galois 理論, 代数的整数論の初歩