

協力ゲーム理論入門

yuchains

2025 年 10 月 12 日

ゲーム理論

- ゲーム理論は、非協力ゲーム、協力ゲームに大別される。
- 第4回すうがく徒のつといでは、非協力ゲームについて扱った。

1\2	A	B
A	$(2^*, 4^*)$	$(10^*, 0)$
B	$(0, 8^*)$	$(8, 6)$

- 【非協力ゲーム】プレイヤー間で拘束力のある合意ができない：
(A,A) が実現する。⇒ ナッシュ均衡
- 【協力ゲーム】プレイヤー間で拘束力のある合意ができる：(B,B) が
実現できる。
- 今回は、『協力ゲーム理論』とその応用について説明する。

凸集合

Definition (凸集合)

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ について、

$$\forall x, y \in X, t \in [0, 1], (1 - t)x + ty \in X$$

が成り立つとき、 X は凸集合であるという。

Definition (狭義凸集合)

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ について、

$$\forall x, y \in X, t \in [0, 1], (1 - t)x + ty \in \text{int} X$$

が成り立つとき、 X は狭義凸集合であるという。

Definition (準凹関数)

関数 $f : X \rightarrow Y$ について、 X が凸集合であり、任意の $x_1, x_2 \in X$ と任意の $\alpha \in (0, 1)$ について、

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \geq \min \{f(x_1), f(x_2)\}$$

を満たすとき、準凹関数であるという。また、

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) > \min \{f(x_1), f(x_2)\}$$

を満たすとき、狭義準凹関数であるという。

Theorem (準凹関数の性質)

X を凸集合とする。関数 $f : X \rightarrow Y$ が与えられたとき、任意の $c \in \mathbb{R}$ について、上位集合

$$U_f(c) := \{x \in X \mid f(x) \geq c\}$$

が凸集合であることは、 f が準凹関数であることの必要十分条件である。
また、上位集合が狭義凸集合であることは、 f が狭義準凹関数であることの必要十分条件である。

Definition (対応)

集合 X, Y について、任意の $x \in X$ について、 Y の部分集合 $F(x) \subseteq Y$ を対応させる関数を対応 (correspondence) といい、 $F : X \rightrightarrows Y$ と表記する。

- 任意の $x \in X$ について、 $F(x) \subseteq Y$ が一点集合のとき、対応 $F : X \rightrightarrows Y$ は関数と同一視できる。

Example (アルバイト報酬問題)

$N = \{A, B, C\}$ がアルバイトをする。それぞれ異なるスキルを持っており、協力してアルバイトをすることで作業効率と報酬が変化する。

$S \subseteq N$ が協力したときの報酬を $v(S)$ とすると、

$$v(\emptyset) = 0, v(\{A\}) = 6, v(\{B\}) = 9, v(\{C\}) = 8$$

$$v(\{A, B\}) = 17, v(\{A, C\}) = 20, v(\{B, C\}) = 19, v(\{A, B, C\}) = 30$$

となる。このとき、 $N = \{A, B, C\}$ はどのように報酬を分けるべきか。

- 上記のような問題は、協力ゲーム理論の TU(Transferable Utility) 特性関数形ゲームで定式化できる。

TU 特性関数形ゲーム

Definition (TU 特性関数形ゲーム)

TU 特性関数形ゲームは、以下の組で定義される。

$$(N, v)$$

ここで、

- $N = \{1, \dots, n\}$: プレイヤーの集合
 - $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$: 特性関数 ($v(\emptyset) = 0$)
- である。

- $S \in 2^N$ をプレイヤーの提携という。
- $v(S) \in \mathbb{R}$ を提携 S の利得という。

Definition (優加法ゲーム)

TU 特性関数形ゲーム (N, v) が優加法ゲームであるとは、任意の互いに素な提携 S, T について、

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

が成り立つことである。

- この講演では、主に優加法性を満たす場合について扱う。

凸ゲーム

Definition (凸ゲーム)

TU 特性関数形ゲーム (N, v) が凸ゲームであるとは、任意の提携 S, T について、

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

が成り立つことである。

- 凸ゲームは優加法ゲームである。

Definition (平衡集合族)

TU 特性関数形ゲーム (N, v) において、 N の非空な真部分集合の族 $B = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ に対して、非負ベクトル $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ が存在して、

$$\sum_{j:i \in S_j} \alpha_j = 1, \forall i \in N$$

が成り立つとき、 B を平衡集合族、 α を平衡ベクトルという。

- 平衡集合族は、 N の分割の一般化となっている。
- 各プレイヤーが重み付きで複数の提携に参加している状態である。
- $N = \{1, 2, 3\}$ のとき、集合族

$B = \{\{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}, \{S_2, S_3\}\}$ をとる。

$\alpha = (1 - 2t, 1 - 2t, 1 - 2t, t, t, t), \forall t \in (0, \frac{1}{2})$ は全て平衡集合族 B の平衡ベクトルとなる。

Definition (平衡ゲーム)

TU 特性関数形ゲーム (N, v) が平衡ゲームであるとは、任意の平衡集合族 $B = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ と、その任意の平衡ベクトル $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ について、

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j v(S_j) \leq v(N)$$

が成り立つことである。

- 凸ゲームは優加法ゲームである。

Definition (配分)

TU 特性関数形ゲーム (N, v) において、ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ が以下の条件を満たすとき配分という。

- ① 【全体合理性】 $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$
- ② 【個人合理性】 $x_i \geq v(\{i\})$

- TU 特性関数形ゲーム (N, v) について、良い性質を満たす配分の集合をゲームの解という。

Definition (配分の支配)

TU 特性関数形ゲーム (N, v) において、以下の条件を満たすとき、提携 S を通して配分 x が配分 y を支配するという。

- ① $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$
- ② $x_i > y_i, \forall i \in S$

また、ある提携 S を通して配分 x が配分 y を支配する（提携 S が存在する）とき、単に配分 x が配分 y を支配するという。

- 提携 S を通して配分 x が配分 y を支配するとき、提携 S に属するすべてのプレイヤーにとって、配分 x が配分 y より望ましいといえる。
- 提携 S に属するプレイヤーは配分 y に不満を持ち、全体提携 N を解消する誘因を持つことになる。

- TU 特性関数形ゲームにおいてもっとも重要な解である「コア」を定義する。

Definition (コア)

TU 特性関数形ゲーム (N, v) において、他のいかなる配分にも支配されない配分の集合をコアという。

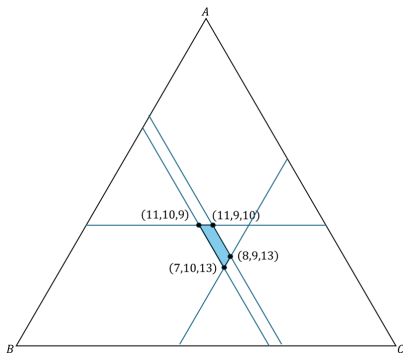
- コアに属する配分は他の配分に支配されることはないため、どの提携もその配分に不満を持つことはない。

コアの例

Example (アルバイト報酬問題)

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= 0, v(\{A\}) = 6, v(\{B\}) = 9, v(\{C\}) = 8 \\ v(\{A, B\}) &= 17, v(\{A, C\}) = 20, v(\{B, C\}) = 19, v(\{A, B, C\}) = 30 \end{aligned}$$

- コアの集合は下図のようになる。



優加法ゲームのコア

Theorem (優加法ゲームのコア)

優加法的な TU 特性関数形ゲームのコアは、任意の提携 $S \in 2^N$ について、

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

を満たす配分の集合と一致する。

- 優加法ゲームにおいては、コアが常に存在するとは限らない。

優加法ゲームのコア

- 優加法ゲームにおいては、コアが常に存在するとは限らない。

Example (優加法ゲームのコアが存在しない場合)

- $N = \{1, 2, 3\}$
 - $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$
 - $v(\{A, B\}) = v(\{A, C\}) = v(\{B, C\}) = v(N) = 10$
-
- 全体合理性より、 $x_A + x_B + x_C = 10$ である。
 - コアの定義より、 $x_A + x_B \geq 10, x_A + x_C \geq 10, x_B + x_C \geq 10$ を満たす必要がある。
 - 上記を満たす配分は存在しない。

コアの存在条件

Theorem (コアの存在条件)

TU 特性関数形ゲームのコアが非空であるための必要十分条件は、平衡ゲームであることである。

- 凸ゲームのコアは非空である。

シャープレイ値

- コアは常に存在するとは限らず、また一般に複数の配分がコアに属することになる。
- これらを解決する解の1つとして、シャープレイ値がある。
- シャープレイ値は、機械学習など他の広い分野で用いられている。

シャーププレイ値

Definition (シャーププレイ値)

TU 特性関数形ゲーム (N, v) において、

$$\phi_i(v) := \sum_{S: i \in S \subseteq N} \frac{(|S| - 1)! (|N| - |S|)!}{|N|!} (v(S) - v(S \setminus \{i\}))$$

をプレイヤー $i \in N$ のシャーププレイ値という。また、

$\phi(v) := (\phi_1(v), \dots, \phi_n(v))$ を TU 特性関数形ゲーム (N, v) のシャーププレイ値という。

- 優加法的な TU 特性関数形ゲームにおいて、シャーププレイ値は配分である。
- プレイヤー i のシャーププレイ値は、プレイヤーがランダムな順序で全体提携 N を構成するときのプレイヤー i の限界貢献度の期待値を示している。

シャープレイ値の例

Example (報酬分配問題)

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= 0, v(\{A\}) = 6, v(\{B\}) = 9, v(\{C\}) = 8 \\ v(\{A, B\}) &= 17, v(\{A, C\}) = 20, v(\{B, C\}) = 19, v(\{A, B, C\}) = 30 \end{aligned}$$

- プレイヤーのすべての順列を考えた時の各プレイヤーの限界貢献度とシャープレイ値は以下となる。

順列	A	B	C
ABC	6	11	13
ACB	6	10	14
BAC	8	9	13
BCA	11	9	10
CAB	12	10	8
CBA	11	11	8

プレイヤー	シャープレイ値
A	$\phi_A = \frac{6+6+8+11+12+11}{6} = 9$
B	$\phi_B = \frac{11+10+9+9+10+11}{6} = 10$
C	$\phi_C = \frac{13+14+13+10+8+8}{6} = 11$

シャープレイ値の例

Example (報酬分配問題)

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= 0, v(\{A\}) = 6, v(\{B\}) = 9, v(\{C\}) = 8 \\ v(\{A, B\}) &= 17, v(\{A, C\}) = 20, v(\{B, C\}) = 19, v(\{A, B, C\}) = 30 \end{aligned}$$

- シャープレイ値（プレイヤーの限界貢献度）の観点からは、 $A : 9, B : 10, C : 11$ と分配するのが良いということになる。
- シャープレイ値はどのような性質を持つだろうか。

ヌルプレイヤー/対称なプレイヤー

Definition (ヌルプレイヤー)

任意の提携 $S \in 2^N$ について、

$$v(S \cup \{i\}) = v(S)$$

を満たすとき、プレイヤー $i \in N$ はヌルプレイヤーであるという。

Definition (対称なプレイヤー)

$i, j \in N$ を含まない任意の提携 $S \in 2^{N \setminus \{i, j\}}$ について、

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$$

を満たすとき、プレイヤー $i, j \in N$ は対称なプレイヤーであるという。

シャーププレイ値の性質

Theorem (シャーププレイ値の性質)

V をプレイヤーの集合を N とする優加法的な TU 特性関数形ゲームの特性関数の集合とする。このとき、以下の性質を満たす関数 $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ は一意に定まり、 $\phi(v)$ はゲーム (N, v) のシャーププレイ値である。

- ① 【全体合理性】 任意の $v \in V$ について、 $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$
- ② 【ヌルプレイヤーのゼロ評価】 任意の $v \in V$ について、プレイヤー i がゲーム (N, v) のヌルプレイヤーならば、 $\phi_i(v) = 0$
- ③ 【対称性】 任意の $v \in V$ について、プレイヤー i, j がゲーム (N, v) の対称プレイヤーならば、 $\phi_i(v) = \phi_j(v)$
- ④ 【加法性】 任意の $v_1, v_2 \in V$ について、 $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$

シャープレイ値とコア

Theorem (シャープレイ値とコア)

ある TU 特性関数形ゲームが凸ゲームであるとき、シャープレイ値はそのコアに含まれる。

シャープレイ・シュールビック投票力指数

Example (投票ゲーム)

ある議会に政党 A,B,C が存在する。党員数はそれぞれ、48 人,45 人,7 人である。総議席数は 100 人で、過半数（51 議席）で法案を通すことができる。このとき、各党はどの程度の影響力を持つか。

- 提携 S で法案を通すことができるときに $v(S) = 1$ 、できないときに $v(S) = 0$ とすると、TU 特性関数形ゲームとして表現することができる。
- 投票ゲームのシャープレイ値をシャープレイ・シュールビック投票力指数という。
- 政党 A,B,C の比率は (48%, 45%, 7%) であるが、投票力指数は、それぞれ (33.3%, 33.3%, 33.3%) となる。

Example (投票ゲーム)

ある議会に政党 A,B,C が存在する。党員数はそれぞれ、48 人,45 人,7 人である。総議席数は 100 人で、過半数（51 議席）で法案を通すことができる。このとき、各党はどの程度の影響力を持つか。

- C 党は他の党より圧倒的に議席が少ないにもかかわらず同じ投票力となっている。（C がキャスティングボードを握る局面が多いため。）
- 議席数が単純に議会での投票力となるわけではなく、各党の議席数、提携の制限、党同士の連立などの状況により少数政党が大きな投票力を発揮することがある。

TU ゲームと NTU ゲーム

- TU ゲームでは、プレイヤー間で利得が譲渡可能であるという仮定のもと、プレイヤー間での利得の分配について考えてきた。
- しかし、この仮定は一般に成り立つわけではない。
 - 例えば、各プレイヤーの効用が金銭に対し線形である必要がある。
- プレイヤー間で利得が譲渡可能であるという仮定を置かないゲームを NTU(Transferable Utility) ゲームという。
- ここでは、純粋交換経済のコアの例を用いて、NTU ゲームについて紹介する。

純粋交換経済

- 純粋交換経済は、財の売買による交換のみを考える経済のモデルである。
- 今回は簡単のため、財 $L = \{1, \dots, l\}$ と消費者（プレイヤー） $N = \{1, \dots, n\}$ で構成される完全競争市場を考える。
 - 財：商品、サービス、労働・余暇など
 - 消費者：財を消費することで効用（満足）を得る

完全競争市場

完全競争市場は以下の性質を持つ。

- ① 【プライステイカーの仮定】 全ての消費者はプライステイカーとして行動する。(十分に多数の消費者が存在し、自分の行動で市場価格を変えることはできない。)
- ② 【完備情報】 消費者は市場に関する全ての情報を持っている。
- ③ 【財の同質性】 市場で売買される財には差がない。
- ④ 【参入・退出の自由】 市場への参入・退出は自由で特定の消費者が排除されることはない。

上記が満たされない場合は、『ゲーム理論』や『情報の経済学』にて扱われる。

消費者 $i \in \{1, \dots, n\}$ は、以下で特徴付けられる。

- 効用関数： $u_i : \mathbb{R}_{\geq 0}^I \rightarrow \mathbb{R}$
 - 消費者が財を消費したときに得られる効用（満足度）
 - 連続、狭義単調増加
- 初期保有： $w_i = (w_{i,1}, \dots, w_{i,I}) \in \mathbb{R}_{>0}^I$
 - 消費者が初期保有している財の数量

- 完全競争市場では、全ての消費者は価格を所与のものとして行動（プライステイカー）する。
- 価格 $p \in \mathbb{R}_+^I$ が与えられたとき、消費者 i の予算は、 $p \cdot w_i$ となる。
- 消費者 i は、以下の予算制約の下で自らの効用を最大化するように財の売買を行う。

$$X_i = \left\{ x_i \in \mathbb{R}_+^L \mid p \cdot x_i \leq p \cdot w_i \right\}$$

- つまり、消費者 i は以下の効用最大化問題を解いていると見做すことができる。

$$D_i(p) := \arg \max_{x_i \in B_i(p)} u_i(x_i)$$

- 効用最大化問題の解 $D_i(p)$ を消費者 i の需要という。
- 対応 $D_i : \mathbb{R}_+^I \rightarrow \mathbb{R}_+^L$ を消費者 i の需要対応という。

超過需要

- 純粋交換経済では生産者の存在を考えないため、供給としては消費者 i の初期保有 w_i のみを考える。

$$S_i(p) := \{w_i\}$$

- 需要から供給を引いたものを、消費者 i の超過需要という。

$$Z_i(p) := D_i(p) - S_i(p)$$

- 各消費者の超過需要の合計を、(総) 超過需要という。

$$Z(p) := \sum_{i \in N} Z_i(p)$$

- (総) 超過需要が 0 のとき、需要と供給が一致する。

配分

Definition (配分)

財の消費量 $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ が

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i$$

を満たすとき、配分という。

配分の支配

Definition (配分の支配)

配分 $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^I$ とある非空な提携 $S \in 2^N$ について、以下を満たす配分 $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^I$ が存在するとき、提携 S を通して配分 x が配分 y を支配するという。

- ① $u_i(x_i) \geq u_i(y_i), \forall i \in S$
- ② $u_i(x_i) > u_i(y_i), \exists i \in S$
- ③ $\sum_{i \in S} x_i \leq \sum_{i \in S} \omega_i$

また、ある提携 S を通して配分 x が配分 y を支配する（提携 S が存在する）とき、単に配分 x が配分 y を支配するという。

ワルラス均衡

Definition (ワルラス均衡)

財の配分と価格の組 $(x^*, p^*) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \times \mathbb{R}_{> 0}^l$ が以下の 2 条件を満たすとき、ワルラス均衡という。

- ① 【効用最大化】 任意の消費者 i について、 $x_i^* \in D(p)$
- ② 【需給一致】 $\sum_i x_i^* = \sum_i w_i^*$

厚生経済学の第一定理

Theorem (厚生経済学の第一定理)

ワルラス均衡配分 $x^* \in \mathbb{R}_+^I$ はパレート効率的である。つまり、全体提携 N を通してワルラス均衡配分を支配する配分は存在しない。

Definition (コア)

他のいかなる配分にも支配されない配分の集合をコアという。

Theorem (ワルラス均衡はコア)

任意の消費者 i の効用関数 $u_i : \mathbb{R}_{\geq 0}^I \rightarrow \mathbb{R}$ を準凹関数とする。このとき、ワルラス均衡配分はコアに含まれる。

- ワルラス均衡という一般均衡理論の解と、コアという協力ゲーム理論の解に関係性があることが分かった。
- 一般にコアの集合はワルラス均衡配分の集合に対して大きいですが、プレイヤーの人数が増えるとコアの集合は縮小し、極限においてはワルラス均衡配分の集合に一致することが示せる。

レプリカ経済

- 経済構造を写像 $E : N \rightarrow A$ で定義する。ここで、 $A := \{(u_i, \omega_i) \mid i \in N\}$ を消費者の特性の集合とする。
- 経済構造 $E : N \rightarrow (u_i, \omega_i)$ が定まったとき、消費者の特性はそのままに各特性の消費者を $1, 2, \dots, r, \dots$ と増加させることを考える。
- このときの経済構造は、写像 $E_r(i, r) := E(i), \forall i \in N$ を満たす写像 $E_r : N \times \mathbb{N} \rightarrow A$ で表すことができる。

エッジワースの極限定理

Theorem (エッジワースの極限定理)

任意の消費者 i の効用関数 $u_i : \mathbb{R}_{\geq 0}^I \rightarrow \mathbb{R}$ を狭義準凹関数とする。任意の $r \in \mathbb{N}$ について、経済構造 E の配分 $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ を r 回複製した配分 $(x_1^*, \dots, x_n^*, x_1^*, \dots, x_n^*, \dots, x_n^*)$ が、経済構造 E_r のコアに属するとする。このとき、配分 $(x_1^*, \dots, x_n^*, x_1^*, \dots, x_n^*, \dots, x_n^*)$ は経済構造 E_r のワルラス均衡配分である。

まとめ

- 協力ゲーム理論の TU 特性関数形ゲームの解である「コア」「シャーププレイ値」について説明した。
- 純粋交換経済の「コア」を定義し、ワルラス均衡とコアの関係について説明した。

参考書籍

- 中山幹夫, 船木由喜彦, 武藤滋夫 『協力ゲーム理論』
- 岡田章 『ゲーム理論 [新版]』
- 丸山徹 『数理経済学の方法』