

ミンコフスキー空間内の光的曲線について

山中 正和

2025 年 10 月 12 日

簡単に自己紹介

- 大学院修士課程数学専攻を約 20 年前に修了
- 8 年程前から大学数学を再開
- ポアンカレ予想や幾何化予想を少しでも理解したいと勉強中
- 職業は塾講師（大学受験の数学・物理・化学）

参考文献

- 井ノ口順一 - $1+1$ 次元の世界-ミンコフスキー平面の曲線 現代数学社 2022 年
- 井ノ口順一 - $1+2$ 次元の世界-ミンコフスキー空間の曲線と曲面 現代数学社 2022 年
- H.Liu,S.D.Jung, Null curves and representation in three dimensional Minkowski spacetime, New Horizons in Mathematical Physics **1**,no.1,1-7, 2017 年
- B.Nolasco,R.Pacheco, Evolutes of plane curves and null curves in Minkowski 3-space,J.Geom. **108**,195-214, 2017 年
- Z.Olszak, A note about the torsion of null curves in the 3-dimensional Minkowski spacetime and the Schwarzian derivative, Filomat **29**,no.3,553-561, 2015 年

講演の内容

- ユークリッド空間の曲線論
- 内積の定義を少し変えたミンコフスキー空間の曲線の分類、問題点の解消方法
- 接ベクトルの大きさが常に0となる光的曲線の扱い
- 光的曲線の具体例
- 光的曲線の一般的な形

3次元ユークリッド空間の外積 I

定義 (外積)

$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積 $\mathbf{a} \times_E \mathbf{b}$ を次のように定義する.

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad \text{に対して,}$$
$$\mathbf{a} \times_E \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

外積の性質

- $\mathbf{a} \times_E \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $(\mathbf{a} \times_E \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}, (\mathbf{a} \times_E \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$
- $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times_E \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} \times_E (\mathbf{b} \times_E \mathbf{c}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$
- $(\mathbf{a} \times_E \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times_E \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

3次元ユークリッド空間内の曲線 I

定義 ($\mathbb{E}^3$ 内の曲線)

区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された $\mathbb{E}^3$ (3次元ユークリッド空間) 内のベクトル値関数を $\mathbb{E}^3$ 内の曲線とよぶ.

曲線は正則曲線の条件

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t) \neq 0$$

をみたし、微分可能であるとする.

3次元ユークリッド空間内の曲線 II

命題

区間 I で定義された $\mathbb{R}^3$ 内のベクトル値関数 $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ に対し,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t)) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t) \times_E \mathbf{y}(t)) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \times_E \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \times_E \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t)$$

- 弧長パラメーターを採用する. すなわち,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)} dt \quad \left(\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \gamma(t) \right)$$

で関数 s を定め, パラメーターを t から s に変更する.

3次元ユークリッド空間内の曲線 III

- $$\mathbf{T}_E(s) = \boldsymbol{\gamma}'(s) = \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}(s) = (\gamma'_1(s), \gamma'_2(s), \gamma'_3(s))$$

を単位接ベクトル場とよび、 $\mathbf{T}_E(s) \cdot \mathbf{T}_E(s) = 1$ となる.

定義 (曲率)

$$\kappa_E(s) = \|\mathbf{T}'_E(s)\| = \sqrt{\mathbf{T}'_E(s) \cdot \mathbf{T}'_E(s)}$$

で定め、この曲線の曲率とよぶ.

- $\mathbf{T}_E(s) \cdot \mathbf{T}_E(s) = 1$ の両辺を微分して,
 $\mathbf{T}'_E(s) \cdot \mathbf{T}_E(s) + \mathbf{T}_E(s) \cdot \mathbf{T}'_E(s) = 0$ より, $\mathbf{T}'_E(s) \cdot \mathbf{T}_E(s) = 0$ となり,
 $\mathbf{T}'_E(s) \perp \mathbf{T}_E(s)$ がいえる.

3次元ユークリッド空間内の曲線 IV

- $\kappa_E > 0$ を仮定すると

$$\mathbf{T}'_E(s) = \kappa_E(s) \mathbf{N}_E(s)$$

で定まる曲線に沿う単位ベクトル場 $\mathbf{N}_E(s)$ が定まる. これを主法線ベクトル場とよぶ.

- さらに, $\mathbf{B}_E(s)$ を

$$\mathbf{B}_E(s) = \mathbf{T}_E(s) \times_E \mathbf{N}_E(s)$$

で定め, 従法線ベクトル場とよぶ.

- $\{\mathbf{T}_E(s), \mathbf{N}_E(s), \mathbf{B}_E(s)\}$ は曲線の各点で $\mathbb{E}^3$ の正規直交基底となっている. すなわち,

$$\|\mathbf{T}_E(s)\| = \|\mathbf{N}_E(s)\| = \|\mathbf{B}_E(s)\| = 1$$

$$\mathbf{T}_E(s) \cdot \mathbf{N}_E(s) = \mathbf{N}_E(s) \cdot \mathbf{B}_E(s) = \mathbf{B}_E(s) \cdot \mathbf{T}_E(s) = 0$$

3次元ユークリッド空間内の曲線 V

定義 (フレネ標構)

行列値関数 $F(s) = (T_E(s) \ N_E(s) \ B_E(s))$ をフレネ標構とよぶ.

- $\tau_E(s) = N'_E(s) \cdot B_E(s)$ と定めることにより,

$$\frac{d}{ds}F(s) = F(s) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_E(s) & 0 \\ \kappa_E(s) & 0 & -\tau_E(s) \\ 0 & \tau_E(s) & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち,

$$\begin{cases} T'_E(s) = \kappa_E(s) N_E(s) \\ N'_E(s) = -\kappa_E(s) T_E(s) + \tau_E(s) B_E(s) \\ B'_E(s) = -\tau_E(s) N_E(s) \end{cases}$$

が成り立つ. この式をフレネ-セレ公式とよぶ.

3次元ユークリッド空間内の曲線 VI

例 (helix)

$a > 0, b \neq 0, c = \sqrt{a^2 + b^2}$ とする.

$$\gamma(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right) \quad \text{とすると}$$

$$\kappa_E(s) = \frac{a}{c^2}, \quad \tau_E(s) = \frac{b}{c^2} \quad \text{である.}$$

3次元ユークリッド空間内の曲線 VII

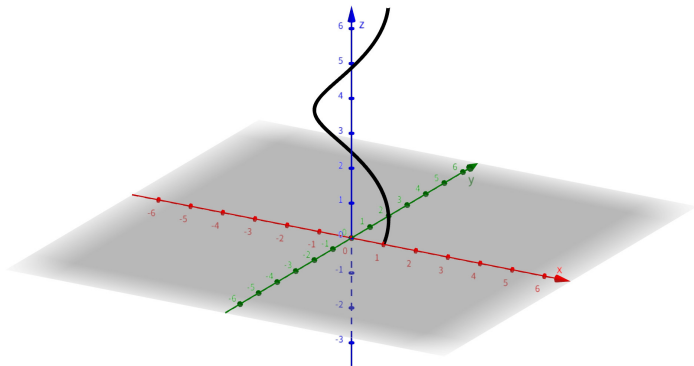


Figure: $\text{helix}(a = 1, b = 1).$ pdf

定義 (ミンコフスキー空間)

数空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3$$

と定め、 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のローレンツ内積とよぶ.

ローレンツ内積を与えた $\mathbb{R}^3$ を 3次元ミンコフスキー空間とよび、 $\mathbb{L}^3$ で表す.

定義 ($\mathbb{L}^3$ における外積)

$\mathbb{L}^3$ 内のベクトル a, b に対して外積 $a \times b$ を次のように定める.

$a, b, c \in \mathbb{L}^3$ に対して

$$\det(a, b, c) = \langle a \times b, c \rangle$$

となる.

$\mathbb{L}^3$ の外積の性質

- $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

- $\langle a \times b, a \rangle = 0, \langle a \times b, b \rangle = 0$
- $a \times (b \times c) = \langle a, b \rangle c - \langle c, a \rangle b$
- $\langle a \times b, a \times b \rangle = -\langle a, a \rangle \langle b, b \rangle + \langle a, b \rangle^2$

$\mathbb{L}^3$ 内のベクトル w を次のように分類する.

定義 (ベクトルの分類)

- $\langle w, w \rangle > 0$ のとき 空間的ベクトル (spacelike vector) という.
- $\langle w, w \rangle < 0$ のとき 時間的ベクトル (timelike vector) という.
- $\langle w, w \rangle = 0$ のとき 光的ベクトル (lightlike vector) という.

$x^2 + y^2 - z^2 = 0$ を光錐とよぶ. 始点を原点とするベクトルの終点が光錐上にあるとき, 光的ベクトルとなる.

定義（1次元線形部分空間の分類）

$\mathbb{L}^3$ 内の 1 次元線型部分空間

$$L = \mathbb{R}w = \{uw \mid u \in \mathbb{R}\}$$

は

- w が空間的ベクトルのとき 空間的線型部分空間（spacelike linear subspace）という.
- w が時間的ベクトルのとき 時間的線型部分空間（timelike linear subspace）という.
- w が光的ベクトルのとき 光的線型部分空間（lightlike linear subspace）という.

定義 ($\mathbb{L}^3$ 内の直線の分類)

$\mathbb{L}^3$ 内の直線

$$\ell = a + L \quad (L = \mathbb{R}w)$$

は同伴する 1 次元線型部分空間 L が

- 空間的のとき 空間的直線 (spacelike line) という.
- 時間的のとき 時間的直線 (timelike line) という.
- 光的のとき 光的直線 (lightlike line) という.

$\mathbb{L}^3$ 内の 2 次元線型部分空間 W は、空間的部分空間、時間的部分空間、光的部分空間の 3 種に分類される。

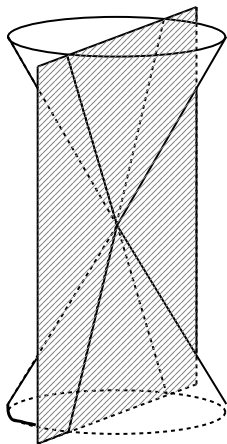
定義 ($\mathbb{L}^3$ 内の 2 次元部分空間の分類)

$\mathbb{L}^3$ 内の 2 次元線形部分空間 W が

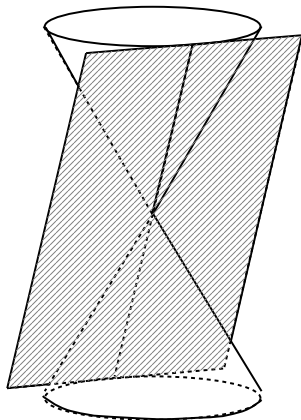
- 空間的ベクトルのみ含むとき、空間的。
- 線形独立な 2 本の光的ベクトルを含むとき、時間的。
- 光的ベクトルを含むが、時間的ベクトルを含まないとき、光的。

とよぶ。

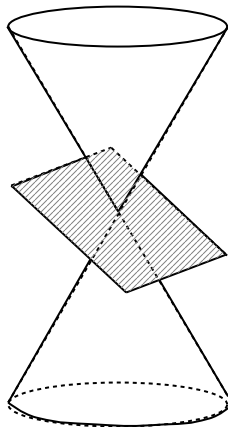
ミンコフスキー空間 VII



(時間的平面)



(光的平面)



(空間的平面)

命題

光的な 2 本のベクトル $v \neq 0$ と $w \neq 0$ が線形従属であるための必要十分条件は

$$\langle v, w \rangle = 0$$

である.

(証明) $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 0$ かつ $\langle v, w \rangle = 0$ を仮定する. $\mathbb{L}^3$ の正規直交基底 $\{u_1, u_2, u_3\}$ を用いて

$$v = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3, \quad w = w_1 u_1 + w_2 u_2 + w_3 u_3$$

とおく. すると,

$$\begin{cases} \langle v, v \rangle = v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 0 \\ \langle w, w \rangle = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 = 0 \\ \langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3 = 0 \end{cases}$$

であり、コーシー・シュワルツの不等式

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \geq |v_1 w_1 + v_2 w_2|$$

に代入すると

$$|v_3| |w_3| \geq |v_3 w_3|$$

が成り立ち、これは等号が成立しているので、コーシー・シュワルツの不等式も等号が成立している。

よって、

$$w_1 = \lambda v_1, \quad w_2 = \lambda v_2$$

をみたす $\lambda \neq 0$ が存在する。

$$w_3^2 = w_1^2 + w_2^2 = \lambda^2(v_1^2 + v_2^2)$$

より

$$w_3^2 = \lambda^2 v_3^2$$

したがって, $w_3 = \pm \lambda v_3$ を得る.

$w_3 = \lambda v_3$ ならば $w = \lambda v$. 一方, $w_3 = -\lambda v_3$ だと

$$w = \lambda(v_1 u_1 + v_2 u_2 - v_3 u_3)$$

すると,

$$\langle w - \lambda v, w - \lambda v \rangle = \langle -2\lambda v_3 u_3, -2\lambda v_3 u_3 \rangle = -4\lambda^2 v_3^2 < 0$$

一方,

$$\langle w - \lambda v, w - \lambda v \rangle = \langle w, w \rangle - 2\lambda \langle v, w \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle = 0$$

となり矛盾. したがって $w = \lambda v$. さらに $w = \lambda v$ ならば

$$\langle v, w \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = 0 \quad (\text{証明終})$$

証明は省略するが、次のことが成り立つ.

定理

線形部分空間 $W \subset \mathbb{L}^3$ に対し次が成り立つ.

- ① W が空間的 (時間的) ならば $W^\perp$ は時間的 (空間的).
 - ② W が光的ならば $W^\perp$ もそう.
- $\mathbb{L}^3$ 内の平面 $\Pi = \boldsymbol{a} + W$ において, W が空間的, 時間的, 光的であるとき, Π を 空間的平面, 時間的平面, 光的平面とよぶ.

ミンコフスキー空間内の曲線の全体像 I

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma' \text{ が空間的 } (\langle T, T \rangle = 1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T' \text{ が空間的 } (\langle T', T' \rangle > 0) \\ T' \text{ が時間的 } (\langle T', T' \rangle < 0) \\ T' \text{ が光的 } (\langle T', T' \rangle = 0) \end{array} \right. \\ \gamma' \text{ が時間的 } (\langle T, T \rangle = -1) \Rightarrow T' \text{ は空間的} \\ \gamma' \text{ が光的 } (\langle T, T \rangle = 0) \Rightarrow ?? \end{array} \right.$$

$\mathbb{L}^3$ 内の空間的曲線 I

命題

区間 I で定義された $\mathbb{L}^3$ 内のベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)$ に対し,

$$\frac{d}{dt} \langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t) \rangle = \left\langle \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t), \boldsymbol{y}(t) \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{x}(t), \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}(t) \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt} (\boldsymbol{x}(t) \times \boldsymbol{y}(t)) = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) \times \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{x}(t) \times \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}(t)$$

$\mathbb{L}^3$ 内の空間的曲線 II

- 正則曲線が

$$\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \gamma(t), \frac{d}{dt} \gamma(t) \right\rangle > 0$$

をみたすとき、空間的曲線 (spacelike curve) とよぶ.

- 弧長パラメーターは

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt$$

を用いる.

- 単位接ベクトル場 $T(s)$ を

$$T(s) = \gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds}(s)$$

で定義する ($\langle T(s), T(s) \rangle = 1$ となる) .

- ただし, $\mathbb{L}^3$ では $\langle T'(s), T'(s) \rangle = 0$ となることがあるので, ユークリッド幾何のときと同じ方法で曲率や単位法ベクトルを定義できない. そこで, $T'(s)$ が光的でない場合と光的の場合に分けて考えることにする.

空間的曲線で、 $T'(s)$ が空間的な場合 I

- $\langle T'(s), T'(s) \rangle > 0$ より、ユークリッド幾何のときと同じように、曲率を

$$\kappa(s) = \sqrt{\langle T'(s), T'(s) \rangle}$$

と定める.

- $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$ の両辺を s で微分すると、 $\langle T'(s), T(s) \rangle = 0$ が得られるので、 $\{T(s), N(s)\}$ は互いに垂直な空間的単位ベクトル場である. そこで $N(s)$ を

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

で定義する.

空間的曲線で、 $T'(s)$ が空間的な場合 II

- 従法線ベクトルを

$$B(s) = -T(s) \times N(s)$$

とおき、さらに

$$\langle N'(s), B(s) \rangle = -\tau(s)$$

とおくことにより、フレネ標構

$$F(s) = (T(s) \quad N(s) \quad B(s))$$

を定める.

- このときフレネ-セレ公式は

$$\frac{d}{ds}F(s) = F(s) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

である.

空間的曲線で、 $T'(s)$ が空間的な場合 III

例 (spacelike circular helix)

$a > 0$, $b \neq 0$, $a > |b|$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ とする.

$$\gamma(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right) \quad \text{とすると}$$

$$\kappa(s) = \frac{a}{c^2} (> 0), \quad \tau(s) = \frac{b}{c^2} \quad \text{である.}$$

空間的曲線で， $T'(s)$ が空間的な場合 IV

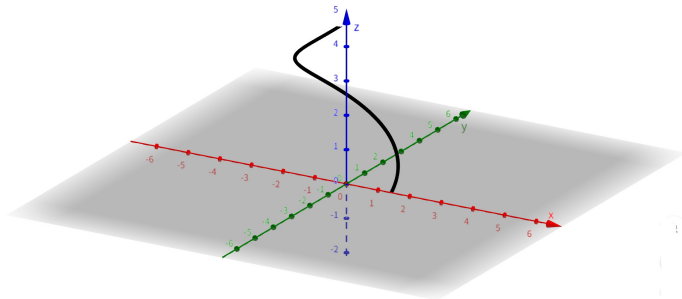


Figure: spacelike circular helix($a = \sqrt{2}, b = 1$).pdf

空間的曲線で、 $T'(s)$ が空間的な場合 V

例 (spacelike pseudo-helix)

$a > 0, b \neq 0, a < |b|, c = \sqrt{b^2 - a^2}$ とする.

$$\gamma(s) = \left(\frac{bs}{c}, a \cosh \frac{s}{c}, a \sinh \frac{s}{c} \right) \quad \text{とすると}$$

$$\kappa(s) = \frac{a}{c^2} (> 0), \quad \tau(s) = -\frac{b}{c^2} \quad \text{である.}$$

空間的曲線で， $T'(s)$ が空間的な場合 VI

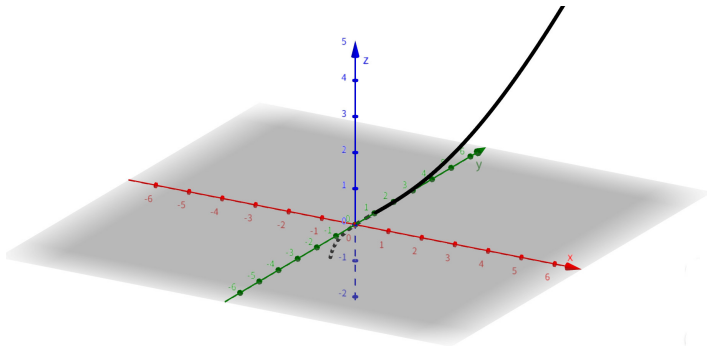


Figure: spacelike pseudo-helix($a = 1, b = \sqrt{2}$).pdf

空間的曲線で $T'(s)$ が時間的な場合 I

- $$\kappa(s) = \sqrt{-\langle T'(s), T'(s) \rangle}, \quad T'(s) = -\kappa(s) N(s)$$

で定義する．また

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

と定めると, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ は曲線上の各点で $\mathbb{L}^3$ の広義の正規直交基底を与える．

- $$\langle N'(s), B(s) \rangle = -\tau(s)$$

とおくことにより, フレネー-セレ公式は

$$\frac{d}{ds} F(s) = F(s) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

を得る．

空間的曲線で $T'(s)$ が時間的な場合 II

例 (spacelike pseudo-helix)

$a > 0$, $b \neq 0$, $a > |b|$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ とする.

$$\gamma(s) = \left(\frac{bs}{c}, a \sinh \frac{s}{c}, a \cosh \frac{s}{c} \right) \quad \text{とすると}$$

$$\kappa(s) = \frac{a}{c^2} (> 0), \quad \tau(s) = \frac{b}{c^2} \quad \text{である.}$$

空間的曲線で $T'(s)$ が時間的な場合 III

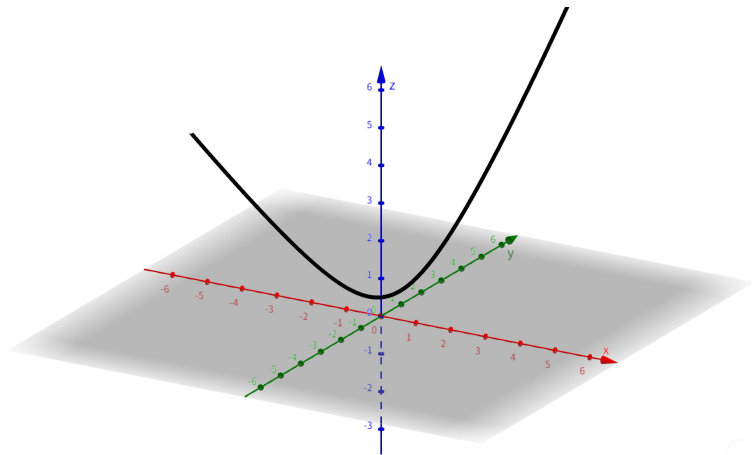


Figure: spacelike circular helix($a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$).pdf

空間的曲線で、 $T'(s)$ が光的な場合 I

- $$\langle T'(s), T'(s) \rangle = 0$$

のため、フレネ標構をうまく定められない。

- そこで

$$F(s) = (f_1(s) \ f_2(s) \ f_3(s))$$

で、次の条件をみたすものを考える。

$$f_1(s) = \gamma'(s) \quad \text{かつ}$$

$$\langle f_1(s), f_1(s) \rangle = 1, \quad \langle f_1(s), f_2(s) \rangle = \langle f_1(s), f_3(s) \rangle = 0,$$

$$\langle f_2(s), f_2(s) \rangle = \langle f_3(s), f_3(s) \rangle = 0, \quad \langle f_2(s), f_3(s) \rangle = 1$$

および

$$\frac{d}{ds}F(s) = F(s) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & k(s) & 0 \\ 0 & 0 & -k(s) \end{pmatrix}$$

空間的曲線で、 $T'(s)$ が光的な場合 II

以上の条件をみたす $F(s) = (f_1(s) \ f_2(s) \ f_3(s))$ を零的標構, $k(s)$ を曲率とよぶ.

例 ($k = 0$)

初期条件などを与えると, 1つの例として $\gamma(s)$ は $\left(\frac{s^2}{2}, s, \frac{s^2}{2}\right)$ がミンコフスキー合同であるものが得られる.

- 初期条件を $\gamma(0) = 0, f_1(x) = \gamma'(0) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする. $k = 0$

より

$$\begin{cases} f_1'(s) = f_2(s) \\ f_2'(s) = 0 \\ f_3'(s) = -f_1(s) \end{cases}$$

空間的曲線で， $T'(s)$ が光的な場合 III

$$f_2'(s) = f_1''(s) = \gamma'''(s)$$

$$f_1'(s) = n \quad (\langle n, n \rangle = 0)$$

$$f_1(s) = ns + e_2$$

$$\gamma(s) = \frac{s^2}{2}n + se_2$$

ここで

$$\langle ns + e_2, ns + e_2 \rangle = 1$$

$$2s\langle n, e_2 \rangle + \langle e_2, e_2 \rangle = 1$$

$$\langle n, e_2 \rangle = 0$$

よって

$$\langle \alpha n + \beta e_2, \alpha n + \beta e_2 \rangle = \beta^2 \geq 0$$

e_2, n が張る部分空間は光的.

空間的曲線で、 $T'(s)$ が光的な場合 IV

$n \mapsto (1, 0, 1)$, $e_2 \mapsto e_2$ と写す変換により,
 $\gamma(s)$ は $\left(\frac{s^2}{2}, s, \frac{s^2}{2}\right)$ にミンコフスキー合同である.
これは平面 $[e_2, n]$ 内の放物線である.

空間的曲線で， $T'(s)$ が光的な場合 V

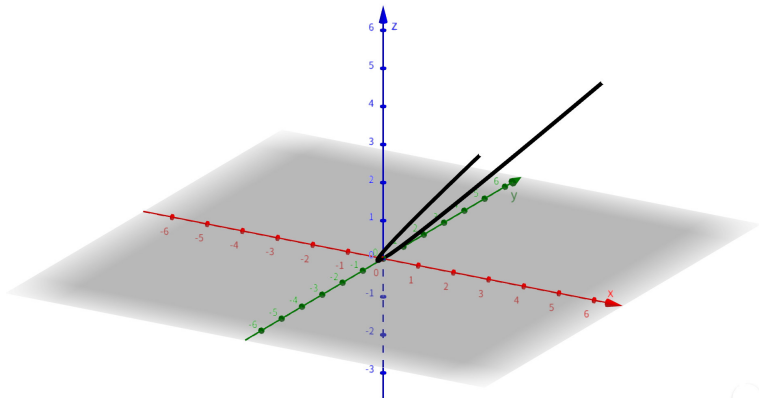


Figure: $k = 0$.pdf

時間的曲線の場合 I

- パラメータとして

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{-\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt$$

を用いる.

- 単位接ベクトル場 $T(s)$ を

$$T(s) = \gamma'(s) = \frac{d}{ds} \gamma(s)$$

で定義する ($\langle T(s), T(s) \rangle = -1$ である).

- 単位法ベクトル場と曲率 $\kappa(s)$ は

$$\kappa(s) = \sqrt{\langle T'(s), T'(s) \rangle}, \quad T'(s) = \kappa(s) N(s)$$

で定義する.

時間的曲線の場合 II

- 従法線ベクトル場 $B(s)$ は

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

で定義する.

- さらに, 捩率 $\tau(s)$ を

$$B'(s) = \tau(s) N(s)$$

によって定義すれば, フレネ-セレ公式

$$F(s) = \begin{pmatrix} T(s) & N(s) & B(s) \end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{ds} F(s) = F(s) \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

を得る.

例 (timelike pseudo-helix)

$a > 0$, $b \neq 0$, $a > |b|$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ とする.

$$\gamma(s) = \left(\frac{bs}{c}, a \cosh \frac{s}{c}, a \sinh \frac{s}{c} \right) \quad \text{とすると}$$

$$\kappa(s) = \frac{a}{c^2} (> 0), \quad \tau(s) = \frac{b}{c^2} \quad \text{である.}$$

時間的曲線の場合 IV

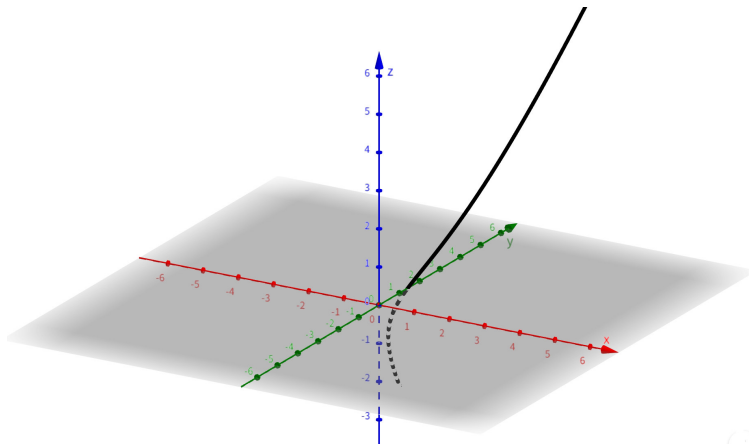


Figure: timelike pseudo-helix($a = \sqrt{2}, b = 1$).pdf

$\mathbb{L}^3$ では次のような光的ベクトルを含む基底も用いられる.

定義 (零的基底)

$\mathbb{L}^3$ の基底 $\mathcal{L} = \{A, B, C\}$ が

$$\langle A, A \rangle = \langle B, B \rangle = 0, \quad \langle A, C \rangle = \langle B, C \rangle = 0,$$

$$\langle A, B \rangle = 1, \quad \langle C, C \rangle = 1$$

をみたすとき, $\mathcal{L}$ を $\mathbb{L}^3$ の (標準) 零的基底 (null basis) とよぶ.

例 (標準零的基底)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

と選ぶと, $\mathcal{L}_0 = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ は零的基底である.

$\gamma(t)$ を $\mathbb{L}^3$ 内の光的曲線 (null curve) とする.

- $\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$ より

$$\langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + \langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle = 0$$

したがって,

$$\langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle = 0$$

となる.

$\ddot{\gamma}(t) \nparallel \dot{\gamma}(t)$ を仮定すると,

$$\dot{\gamma}(t) \text{ は光的} \Rightarrow \ddot{\gamma}(t) \text{ は空間的}$$

となる.

- パラメーターの変換により

$$\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle = 1$$

となるようにパラメーター s をとる．これを擬弧長（pseudo-arc parameter）とよぶ．

定理（光的基底）

$\gamma(s)$ を $\mathbb{L}^3$ 内の光的曲線とする.

次のように定めた $\gamma(s)$ 上の各点の基底

$$\{A(s), B(s), C(s)\}$$

を光的基底とよぶ.

$$\begin{cases} A(s) = \gamma'(s) \\ B(s) = -\gamma'''(s) - \frac{1}{2}\langle \gamma'''(s), \gamma'''(s) \rangle \gamma'(s) \\ C(s) = \gamma''(s) \end{cases}$$

- 光的基底の条件

$$\begin{cases} \langle A, A \rangle = \langle B, B \rangle = \langle A, C \rangle = \langle B, C \rangle = 0 \\ \langle A, B \rangle = \langle C, C \rangle = 1 \end{cases}$$

をみたす.

(確認)

$$\langle B, B \rangle = \langle -\gamma'''(s), -\gamma'''(s) \rangle + \langle \gamma'''(s), \gamma'''(s) \rangle \langle \gamma'(s), \gamma'''(s) \rangle$$

ここで,

$$\langle \gamma'(s), \gamma'''(s) \rangle = 0 \quad \text{より}$$

$$\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle + \langle \gamma'(s), \gamma'''(s) \rangle = 0$$

よって,

$$\langle \gamma'(s), \gamma'''(s) \rangle = -1$$

光的空間曲線 VII

したがって,

$$\langle B, B \rangle = 0$$

$$\langle B, C \rangle = -\langle \gamma''(s), \gamma'''(s) \rangle - \frac{1}{2} \langle \gamma'''(s), \gamma'''(s) \rangle \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle$$

ここで,

$$\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle = 1 \quad \text{より}$$

$$\langle \gamma'''(s), \gamma''(s) \rangle + \langle \gamma''(s), \gamma'''(s) \rangle = 0$$

よって,

$$\langle \gamma''(s), \gamma'''(s) \rangle = 0$$

したがって,

$$\langle B, C \rangle = 0$$

$$\langle A, B \rangle = -\langle \gamma'(s), \gamma'''(s) \rangle - \frac{1}{2} \langle \gamma'''(s), \gamma'''(s) \rangle \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$$

命題

$$L(s) = (A(s) \ B(s) \ C(s))$$

としたとき, 次の式が成り立つように $k(s)$ を定めることができる.

$$\frac{d}{ds}L(s) = L(s) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k(s) \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & k(s) & 0 \end{pmatrix}$$

をみたす. すなわち

$$\begin{cases} A'(s) = C(s) \\ B'(s) = k(s)C(s) \\ C'(s) = -k(s)A(s) - B(s) \end{cases}$$

(証明)

$$B'(s) = a(s)A(s) + b(s)B(s) + c(s)C(s) \quad \text{とおく.}$$

- $\langle A', B \rangle = \langle C, B \rangle = 0$ であり,

$$\langle A, B \rangle = 1 \quad \text{より}$$

$$\langle A', B \rangle + \langle A, B' \rangle = 0$$

$$\text{よって, } \langle A, B' \rangle = 0$$

$$\text{よって, } \langle B', A \rangle = b \langle B, A \rangle = b = 0$$

- $\langle B', B \rangle = a \langle A, B \rangle = a = 0$

$$\text{よって, } B'(s) = c(s)C(s)$$

$c(s)$ を $k(s)$ とおく.

- $C'(s) = a(s)A(s) + b(s)B(s) + c(s)C(s) \quad \text{とおく.}$

光的空間曲線 X

- $\langle C', A \rangle = b \langle A, B \rangle = b = -1$
- $\langle C', B \rangle = a \langle A, B \rangle = a$

ここで,

$$\langle C, B \rangle = 0 \quad \text{より,}$$

$$\langle C', B \rangle + \langle C, B' \rangle = 0$$

$$\text{よって, } \langle C', B \rangle = a = -\langle C, B' \rangle = -c = -k$$

$$\text{よって, } C'(s) = -k(s)A(s) - B(s)$$

例 ($k(s) = 0$ の場合 (光的 3 次曲線))

$k(s) = 0$ とし, $\gamma(0) = 0$ とする.

この条件をみたす曲線の 1 つは

$$\gamma(s) = \left(\frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{4} - \frac{s}{3}, \frac{s^3}{4} + \frac{s}{3} \right)$$

$$\begin{cases} A'(s) = C(s) \\ B'(s) = 0 \\ C'(s) = -B(s) \end{cases}$$

$B'(s) = 0 \Rightarrow B(s)$ は定ベクトル.

$B(s) = b$ とする.

$C'(s) = -b$ より $C(s) = -sb + c$

光的空間曲線 XII

$$\langle C(s), C(s) \rangle = 1 \quad \text{より}$$

$$\langle -sb + c, -sb + c \rangle = -2s\langle b, c \rangle + \langle c, c \rangle = 1$$

$$\text{よって, } \langle b, c \rangle = 0, \langle c, c \rangle = 1$$

$$A(s) = \int C(s)ds = -\frac{s^2}{2}b + sc + a$$

$$\langle A(s), A(s) \rangle = 0 \quad \text{より}$$

$$\langle -\frac{s^2}{2}b + sc + a, -\frac{s^2}{2}b + sc + a \rangle = s^2 + \langle a, a \rangle - s^2\langle a, b \rangle + 2s\langle a, c \rangle = 0$$

$$\text{よって, } \langle a, b \rangle = 1, \langle a, a \rangle = 0, \langle a, c \rangle = 0$$

$\{a, b, c\}$ は零的基底となっている.

$$\gamma(s) = \int A(s)ds = -\frac{s^3}{6}b + \frac{s^2}{2}c + sa$$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{3}(0, -1, -1), \quad \mathbf{b} = -\frac{3}{2}(0, 1, 1), \quad \mathbf{c} = (1, 0, 0)$$

をえらぶと,

$$\gamma(s) = \left(\frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{4} - \frac{s}{3}, \frac{s^3}{4} + \frac{s}{3} \right)$$

光的空間曲線 XIV

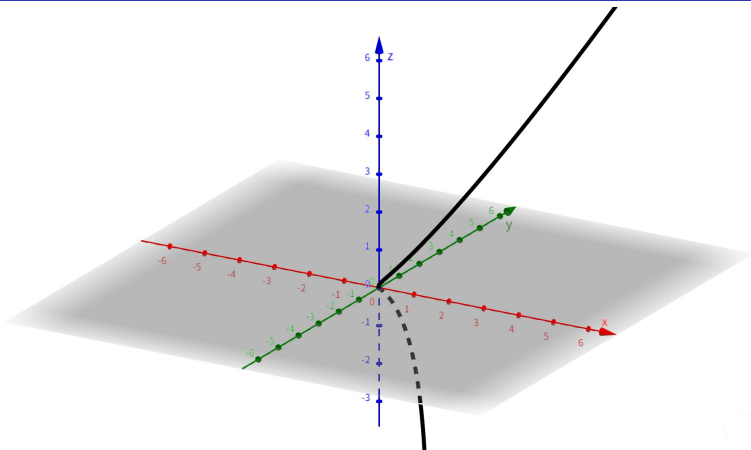


Figure: $k(s) = 0$ の場合 (光的 3 次曲線).pdf

定義（光的曲率）

$k(s)$ を光的曲率とよぶ.

$$\langle \mathbf{C}'(s), \mathbf{C}'(s) \rangle = \langle -k(s)\mathbf{A}(s) - \mathbf{B}(s), -k(s)\mathbf{A}(s) - \mathbf{B}(s) \rangle = 2k(s)$$

したがって,

$$k(s) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{C}'(s), \mathbf{C}'(s) \rangle = \frac{1}{2} \langle \gamma'''(s), \gamma'''(s) \rangle$$

光的曲線を得るための工夫 I

$\gamma(s): I \rightarrow \mathbb{L}^3$ を $\mathbb{L}^3$ の光的曲線とする. 光的より $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle \equiv 0$.
 $\gamma'(s) = (\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s))$ とおくと,

$$\xi_1(s)^2 + \xi_2(s)^2 - \xi_3(s)^2 = 0$$

これを変形して,

$$\frac{\xi_1(s) + \xi_3(s)}{\xi_2(s)} = \frac{-\xi_2(s)}{\xi_1(s) - \xi_3(s)}$$

この式を $f(s)$ とおき, $\xi_2(s) = 2\rho(s)$ とおく. すると,

$$\begin{cases} \xi_1(s) + \xi_3(s) = 2\rho(s)f(s) \\ \xi_1(s) - \xi_3(s) = -2\rho(s)f(s)^{-1} \\ \xi_2(s) = 2\rho(s) \end{cases}$$

光的曲線を得るための工夫 II

これを解いて,

$$\begin{cases} \xi_1 = \rho(f - f^{-1}) \\ \xi_2 = 2\rho \\ \xi_3 = \rho(f + f^{-1}) \end{cases}$$

よって,

$$\gamma(s) = \int \gamma'(s) ds = \int (\xi_1, \xi_2, \xi_3) ds = \int \rho(f - f^{-1}, 2, f + f^{-1}) ds$$

であり. あとは ρ を f で表すことを考えたい.

そこで, $\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle = 1$ を用いる.

$$\gamma''(s) = \rho_s(f - f^{-1}, 2, f + f^{-1}) + \rho f_s(1 + f^{-2}, 0, 1 - f^{-2})$$

光的曲線を得るための工夫 III

$$\begin{aligned}\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle &= \rho_s^2 \{ (f - f^{-1})^2 + 4 - (f + f^{-1})^2 \} \\ &\quad + 2\rho_s f_s \{ (f - f^{-1})(1 + f^{-2}) - (f + f^{-1})(1 - f^{-2}) \} \\ &\quad + \rho_s^2 f_s^2 \{ (1 + f^{-2})^2 - (1 - f^{-2})^2 \} \\ &= 4\rho_s^2 f_s^2 f^{-2}\end{aligned}$$

$$\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle = 1 \quad \text{より} \quad \rho(s) = \frac{f(s)}{2f_s(s)} \text{ とできる.}$$

以上より次の定理を得る.

定理

$f(s)$ を定数でない微分可能な関数とする.

$$\gamma(s) = \int \frac{1}{2} f_s^{-1}(f^2 - 1, 2f, f^2 + 1) ds \quad \text{とすると}$$

$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ とおいたとき,

$$\begin{cases} \gamma_1(s) = \int \frac{f^2(s) - 1}{2f_s(s)} ds \\ \gamma_2(s) = \int \frac{f(s)}{f_s(s)} ds \\ \gamma_3(s) = \int \frac{f^2(s) + 1}{2f_s(s)} ds \end{cases}$$

と表せ, $\gamma(s)$ は L^3 内の光的曲線となる.

光的曲線を得るための工夫 V

定義

上の定理の $f(s)$ を光的曲線 $\gamma(s)$ の「structure function」とよぶ.

$f(s)$ と $k(s)$ の関係を考えたい.

$$2\gamma'(s) = f_s^{-1}(f^2 - 1, 2f, f^2 + 1)$$

$$2\gamma''(s) = -f_s^{-2}f_{ss}(f^2 - 1, 2f, f^2 + 1) + 2(f, 1, f)$$

$$\begin{aligned} 2\gamma'''(s) &= (2f_s^{-3}f_{ss}^2 - f_s^{-2}f_{sss})(f^2 - 1, 2f, f^2 + 1) \\ &\quad - 2f_s^{-1}f_{ss}(f, 1, f) + 2f_s(1, 0, 1) \end{aligned}$$

ここで,

$$\langle (f^2 - 1, 2f, f^2 + 1), (f^2 - 1, 2f, f^2 + 1) \rangle = (f^2 - 1)^2 + 4f^2 + (f^2 + 1)^2 = 0$$

$$\langle (f, 1, f), (f, 1, f) \rangle = 1$$

光的曲線を得るための工夫 VI

$$\langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle = 0$$

$$\langle (f^2 - 1, 2f, f^2 + 1), (f, 1, f) \rangle = f(f^2 - 1) + 2f - f(f^2 + 1) = 0$$

$$\langle (f, 1, f), (1, 0, 1) \rangle = 0$$

$$\langle (f^2 - 1, 2f, f^2 + 1), (1, 0, 1) \rangle = -2$$

これらを用いて,

$$\langle 2\gamma'''(s), 2\gamma'''(s) \rangle = 4\langle \gamma'''(s), \gamma'''(s) \rangle$$

$$= 4f_s^{-2}f_{ss}^2 - 8f_s(2f_s^{-3}f_{ss}^2 - f_s^{-2}f_{sss})$$

$$\langle \gamma'''(s), \gamma'''(s) \rangle = f_s^{-2}f_{ss}^2 - 2f_s(2f_s^{-3}f_{ss}^2 - f_s^{-2}f_{sss})$$

$$= -[(\log f_s)_s]^2 + 2[\log(f_s)_s]_s$$

$$\text{ゆえに,} \quad k(s) = -\frac{1}{2}[(\log f_s)_s]^2 + [\log(f_s)_s]_s$$

$f(s)$ を与えて, null curve と光的曲率を得るという形式で例を紹介する.
 $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ とする.

例 (null Cartan helix)

$f(s) = s$, $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ とすると,

$$\gamma(s) = \left(\frac{s^3}{6} - \frac{1}{2}s, \frac{1}{2}s^2, \frac{s^3}{6} + \frac{1}{2}s \right), \quad k(s) = 0$$

null curve の例 II

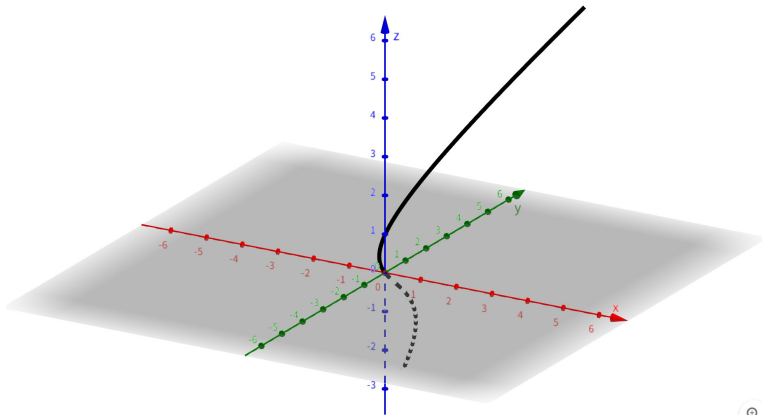


Figure: null Cartan helix.pdf

例 (null Cartan helix)

$$f(s) = -\frac{1}{\tan\left(\frac{cs}{2}\right)}, \quad \gamma(0) = \left(0, \frac{1}{c^2}, 0\right) \text{ とすると,}$$

$$\gamma(s) = \frac{1}{c^2}(\sin(cs), \cos(cs), cs), \quad k(s) = \frac{c^2}{2}$$

null curve の例 IV

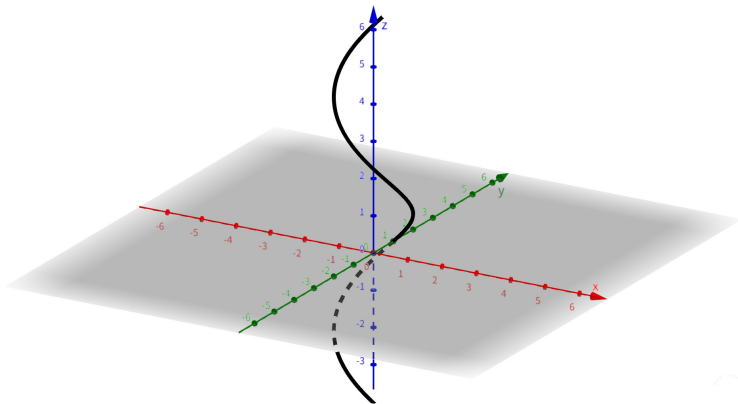


Figure: null Cartan helix($c = 1$).pdf

例 (null Cartan helix)

$f(s) = e^{cs}$, $\gamma(0) = \left(\frac{1}{c^2}, 0, 0\right)$ とすると,

$$\gamma(s) = \frac{1}{c^2}(\cosh(cs), cs, \sinh(cs)), \quad k(s) = -\frac{c^2}{2}$$

null curve の例 VI

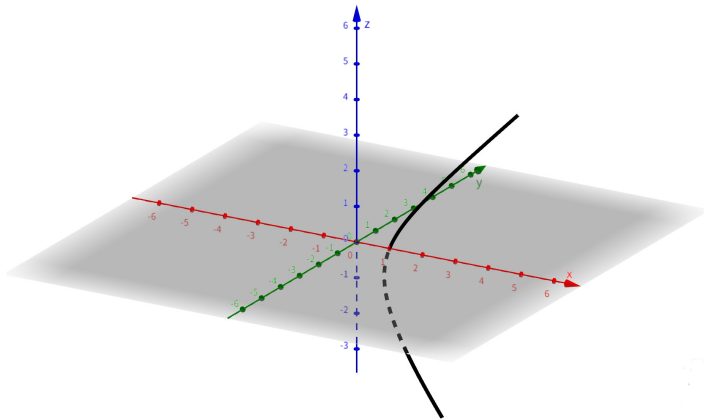


Figure: null Cartan helix($c = 1$).pdf

例 (null slant helix)

$f(s) = \log s$, $\gamma(1) = \frac{1}{8}(-2, -1, 3)$ とすると,

$$\gamma(s) = \frac{s^2}{8} \left(2(2 \log s - 1), 2(\log s)^2 - 2 \log s - 1, 2(\log s)^2 - 2 \log s + 3 \right),$$

$$k(s) = \frac{1}{2s^2}$$

null curve の例 VIII

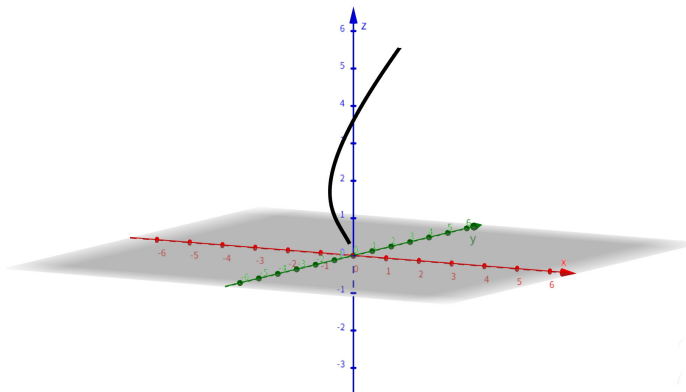


Figure: null slant helix.pdf

例 (null slant helix)

$b = \sqrt{a-1}$ ($a > 1$) とする. $f(s) = \tan(\frac{1}{2} \log s^b)$ とする.

$$\gamma(1) = \frac{1}{b} \left(-\frac{b}{b^2+4}, -\frac{2}{b^2+4}, \frac{1}{2} \right) \text{ とする.}$$

$$\gamma(s) =$$

$$\frac{s^2}{b} \left(\frac{2 \sin(\log s^b) - b \cos(\log s^b)}{b^2+4}, -\frac{2 \cos(\log s^b) + b \sin(\log s^b)}{b^2+4}, \frac{1}{2} \right),$$

$$k(s) = \frac{a}{2s^2}$$

null curve の例 X

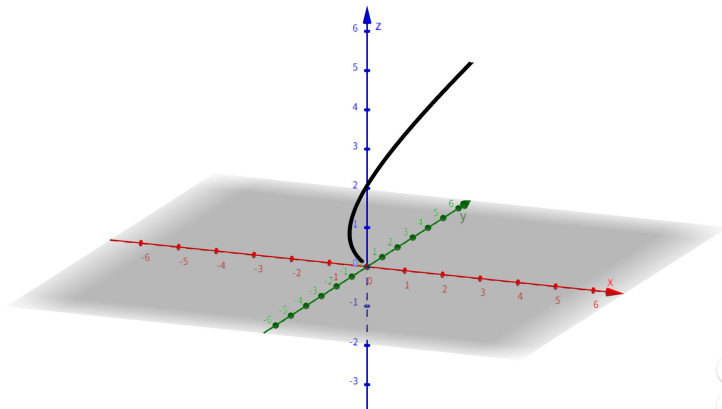


Figure: null slant helix($b = 1$).pdf

例 (null slant helix)

$b = \sqrt{1-a}$ ($a < 1$) とする. ただし, $a \neq -3$ とする.

$$f(s) = s^{-b}, \quad \gamma(1) = \frac{1}{2b} \left(-1, \frac{2b}{b^2-4}, \frac{4}{b^2-4} \right) \text{ とする.}$$

$$\gamma(s) = \frac{s^2}{2b} \left(-1, \frac{s^{-b}}{b-2} + \frac{s^b}{b+2}, \frac{s^{-b}}{b-2} - \frac{s^b}{b+2} \right),$$

$$k(s) = \frac{a}{2s^2}$$

null curve の例 XII

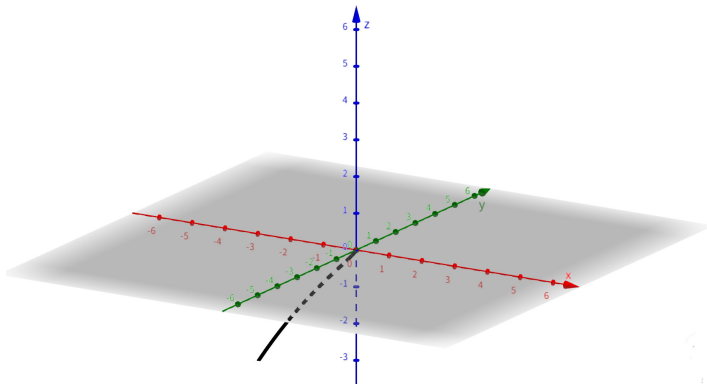


Figure: null slant helix($a = -1, b = \frac{1}{\sqrt{2}}$).pdf

例 (null slant helix)

$$f(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \gamma(1) = \frac{1}{16}(-4, 1, -1) \text{ とする.}$$

$$\gamma(s) = \frac{1}{16}(-4s^2, s^4 - 4\log s, -s^4 - 4\log s),$$

$$k(s) = -\frac{3}{2s^2}$$

null curve の例 XIV

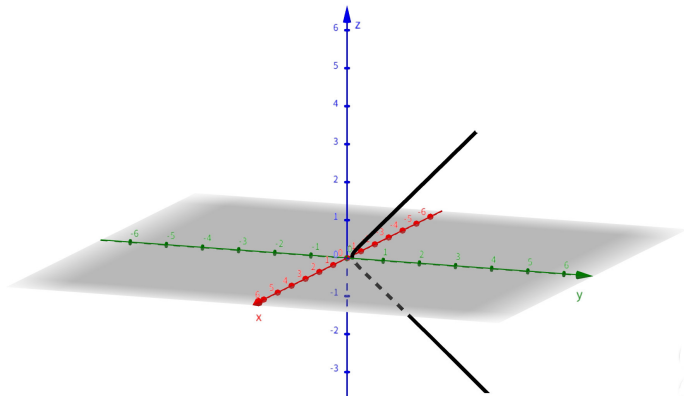


Figure: null slant helix.pdf

光的曲率が一定の場合の一般形 I

定理

$\gamma(s): I \rightarrow \mathbb{L}^3$ を $\mathbb{L}^3$ 内の光的曲線で, $k(s)$ が定数であるとする. このとき, $\gamma(s)$ は次のようにかける.

- (i) $\gamma(s) = C_1 s^3 + C_2 s^2 + C_3 s \quad (k = 0)$
 - (ii) $\gamma(s) = C_1 \sin(\sqrt{2k} s) + C_2 \cos(\sqrt{2k} s) + C_3 s \quad (k > 0)$
 - (iii) $\gamma(s) = C_1 \sinh(\sqrt{-2k} s) + C_2 \cosh(\sqrt{-2k} s) + C_3 s \quad (k < 0)$
- ただし $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{L}^3$ である.

証明

$$C'(s) = -k(s) A(s) - B(s)$$

光的曲率が一定の場合の一般形 II

より,

$$\begin{aligned}\gamma''''(s) &= -k(s) \gamma''(s) - B'(s) \\ &= -k(s) \gamma''(s) - k(s) \gamma''(s) \\ &= -2k(s) \gamma''(s)\end{aligned}$$

この微分方程式を解くことにより, 次が得られる.

$$\begin{cases} \gamma(s) = C_1 s^3 + C_2 s^2 + C_3 s + C_4 & (k = 0) \\ \gamma(s) = C_1 \sin(\sqrt{2k} s) + C_2 \cos(\sqrt{2k} s) + C_3 s + C_4 & (k > 0) \\ \gamma(s) = C_1 \sinh(\sqrt{-2k} s) + C_2 \cosh(\sqrt{-2k} s) + C_3 s + C_4 & (k < 0) \end{cases}$$

ただし $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{L}^3$ とする.

光的曲率が一定の場合の一般形 III

$\mathbb{L}^3$ の変換によって定理の式を得る.

系

$\gamma(s): I \rightarrow L^3$ を L^3 内の光的曲線とする. $k(s)$ が定数なら,

$$[(\log f_s)_s]^2 - 2[(\log f_s)_s]_s = -2k(s) = C \text{ (定数)} \quad (*)$$

が成り立つ. このとき,

$$\begin{cases} a^2 = C > 0 \Rightarrow f(s) = \frac{2}{a} \tan\left(\frac{as}{2}\right) \\ C = 0 \Rightarrow f(s) = -\frac{a}{s} \\ -a^2 = C < 0 \Rightarrow f(s) = \frac{2}{a} \tanh\left(\frac{as}{2}\right) \end{cases}$$

(証明) (*) を解く.

定理

$\gamma(s): I \rightarrow \mathbb{L}^3$ を光的曲線とする. $0 \neq C_0 \in \mathbb{L}^3$ なる定ベクトルで $\langle C(s), C_0 \rangle$ が定数であるものが存在すれば, $\gamma(s)$ は null slant helix とよばれ, 先の定理の形か, 次のように書ける. ただし $\langle C(s), C_0 \rangle = a$ とする.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \gamma(s) = C_1 s^2 + C_2 s^{2+\sqrt{1-2a}} + C_3 s^{2-\sqrt{1-2a}} & (2a < 1) \\ \text{(ii)} \quad \gamma(s) = C_1 s^2 + C_2 s^2 \log s + C_3 s^2 (\log s)^2 & (2a = 1) \\ \text{(iii)} \quad \gamma(s) = C_1 s^2 + C_2 s^2 \sin(\sqrt{-1+2a} \log s) \\ \quad \quad \quad + C_3 s^2 \cos(\sqrt{-1+2a} \log s) & (2a > 1) \end{array} \right.$$

ここで $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{L}^3$ とする.

null slant helix の一般形 II

(証明) $\langle C(s), C_0 \rangle$ が定数であるとき, $k(s)$ は定数であるか, または

$$2 \left(\frac{k'(s)}{k(s)} \right)' - \left(\frac{k'(s)}{k(s)} \right)^2 = 0 \quad \dots (*)$$

が成り立つことを示す.

$$\begin{cases} A'(s) = C(s) \\ C'(s) = -k(s)A(s) - B(s) \\ B'(s) = k(s)C(s) \end{cases}$$

であった.

$$\begin{cases} u(s) = \langle A(s), C_0 \rangle \\ a = \langle C(s), C_0 \rangle \text{ (一定)} \\ v(s) = \langle B(s), C_0 \rangle \end{cases}$$

とおく.

$$0 = \langle \mathbf{C}'(s), \mathbf{C}_0 \rangle = \langle -k(s)\mathbf{A}(s) - \mathbf{B}(s), \mathbf{C}_0 \rangle = -k(s)u(s) - v(s)$$

よって,

$$v(s) = -k(s)u(s) \quad \cdots (A)$$

$$\begin{cases} u'(s) = \langle \mathbf{A}'(s), \mathbf{C}_0 \rangle = \langle \mathbf{C}(s), \mathbf{C}_0 \rangle = a \\ v'(s) = \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{C}_0 \rangle = \langle k(s)\mathbf{C}(s), \mathbf{C}_0 \rangle = ak(s) \end{cases}$$

(A) を微分して

$$v'(s) = -k'(s)u(s) - k(s)u'(s) = -k'(s)u(s) - ak(s)$$

よって,

$$ak(s) = -k'(s)u(s) - ak(s)$$

null slant helix の一般形 IV

$$2ak(s) = -k'(s)u(s) \quad \cdots (B)$$

ここで, $a = 0$ のとき, $k'(s) = 0$ となり, $k(s)$ は定数で, 先の定理の形となり, そうでない場合は,

(B) を s で微分して,

$$2ak'(s) = -k''(s)u(s) - ak'(s)$$

$$3ak'(s) = -k''(s)u(s)$$

$$(B) \text{ より } u(s) = -\frac{2ak(s)}{k'(s)} \text{ を代入して,}$$

$$3ak'(s) = k''(s) \frac{2ak(s)}{k'(s)}$$

$$3a(k'(s))^2 - 2ak(s)k''(s) = 0$$

null slant helix の一般形 V

$$3(k'(s))^2 - 2k(s)k''(s) = 0 \quad \cdots (**)$$

ここで, $(*) \iff 2 \frac{k''(s)k(s) - (k'(s))^2}{(k(s))^2} - \frac{(k'(s))^2}{(k(s))^2} = 0$

$$\iff 3(k'(s))^2 - 2k''(s)k(s) = 0$$

よって, $(*)$ と $(**)$ は同値.

$$2 \left(\frac{k'(s)}{k(s)} \right)' - \left(\frac{k'(s)}{k(s)} \right)^2 = 0 \quad \text{を解いて,}$$

$$k(s) = a(s+b)^{-2} \quad (a, b \text{ は積分定数})$$

$$b = 0 \text{ としてもよく, } k(s) = as^{-2}$$

これを

$$\gamma'''(s) + 2k(s)\gamma''(s) + k'(s)\gamma'(s) = 0 \quad \text{に代入して}$$

null slant helix の一般形 VI

$$\gamma''''(s) + \frac{2a}{s^2} \gamma''(s) - \frac{2a}{s^3} \gamma'(s) = 0$$

$$s^3 \mathbf{A}'''(s) + 2as \mathbf{A}'(s) - 2a \mathbf{A}(s) = 0$$

null slant helix の一般形 VII

これを解いて,

$$\textcircled{i} \quad \gamma(s) = B_1 s + B_2 s^{1+\sqrt{1-2a}} + B_3 s^{1-\sqrt{1-2a}} \quad (2a < 1)$$

$$\textcircled{ii} \quad \gamma(s) = B_1 s + B_2 s \log s + B_3 (\log s)^2 \quad (2a = 1)$$

$$\textcircled{iii} \quad \gamma(s) = B_1 s + B_2 \sin(\sqrt{-1+2a} \log s) \\ + B_3 s \cos(\sqrt{-1+2a} \log s) \quad (2a > 1)$$

ただし $B_1, B_2, B_3 \in \mathbb{L}^3$ とする.

これより定理の式を得る.

系

$\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ を $\mathbb{L}^3$ 内の光的曲線とする. $\gamma(s)$ が null slant helix で

$$[(\log f_s)_s]^2 - 2[(\log f_s)_s]_s = -2k(s) = -2as^{-2} \quad \dots (*)$$

ならば, $f(s)$ は次のように書ける.

- $f(s) = s^c$ または $f(s) = s^{-c}$ ($c \neq 0, \pm 1$ かつ $2a = 1 - c^2$)
- $f(s) = \frac{c}{\log s}$ または $f(s) = \frac{\log s}{c}$ ($c \neq 0$ かつ $2a = 1$)
- $f(s) = \frac{2}{c} \tan\left(\frac{c}{2} \log s\right)$ または $f(s) = -\frac{2}{c} \tan^{-1}\left(\frac{c}{2} \log s\right)$ ($c \neq 0, 2a = c^2 + 1$)

(証明) (*) を解く