

ホモトピー型理論による「正しい」数学

Taichi Uemura
@t_uemura669101

2025 年 10 月 11 日
数学徒のつどい 第 8 回

数学の言語

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

数学における言葉遣い。

概念の定義 自然数とは、実数とは、群とは、等

対象の構成 $3 \in$ 自然数、 $\sqrt{2} \in$ 実数、 $(\mathbb{Z}, +) \in$ 群、等

命題の記述 「3 は素数である」、「 $\sqrt{2}$ は有理数ではない」、「 $(\mathbb{Z}, +)$ は可換群である」、等

証明 「明らか」、「... を参照せよ」、「読者の演習問題とする」、等
今回は数学をするための**形式言語**についての話。

形式言語

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

文法や意味が形式的に与えられる言語。プログラミング言語みたいなもの。

述語論理

命題を

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

のような記号列で表す。命題の証明も形式的な推論の連鎖で表す。

数学の形式言語

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

(一階)(古典) 述語論理+ZFC

あらゆる数学的対象を集合で表現する極端な言語。現代の数学は ZFC に基づいていることになっている。

型理論

型なるもので数学的概念を表現する言語。「 $3 \in \mathbb{N}$ 」において 3 が対象で $\mathbb{N}$ はその型。証明支援系 Lean¹ で少し名前が知られたかも。

証明支援系 形式言語で定理の証明を書くためのソフトウェア。

¹<https://lean-lang.org/>

同一性、同一視

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

同一性は数学における基本的な関心事。

- ▶ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ($\mathbb{Q}$ において)
- ▶ $1 = 0.999999\dots$ ($\mathbb{R}$ において)

「=」以外にも様々な**同一視**の概念がある。

- ▶ 集合の間の全単射
- ▶ 線形同型、群同型、環同型、位相同型、等
- ▶ 自然同値、圏同値
- ▶ ホモトピー、ホモトピー同値

同型ならば同一?

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

数学ではよく同型な対象を同一視する。

群

群同型な群は同一視する。群同型ならば「群としての性質」は同じなので問題ない。

- ▶ 「群としての性質」とは?
- ▶ 「群としての性質」以外の性質も簡単に書けるので不安。
- ▶ 同一視といっても、異なる群同型があり得るけど、それによる違いは?
- ▶ そもそも「同一視する」の意味を形式化してほしい。
- ▶ 正直、雰囲気だけで同一視している。

同型でも同一ではない

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

多くの言語は同一性を表す命題「 $a = b$ 」を持つ。「同一視する」とはこの意味で同一だとしてもいいが...

群

全単射 $(n \mapsto n + 1) : \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ を通して $\mathbb{Z}$ にもう一つの群構造 $+$ ' を入れる。つまり $n + ' m = (n + 1) + (m + 1) - 1$ 。当然 $(n \mapsto n + 1)$ は群同型 $(\mathbb{Z}, +') \cong (\mathbb{Z}, +)$ であるが、 $+$ ' と $+$ は異なるので、 $(\mathbb{Z}, +')$ と $(\mathbb{Z}, +)$ が同一であると主張するのは無理がある。

商集合は同一視?

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

商集合は「同一視する」ことをそれなりに捉えている。

有理数

有理数は $(n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ という組を
 $(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) :\Leftrightarrow n_1 m_2 = n_2 m_1$ という関係で同一視したもの。有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は商集合 $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim$ 。

群全体の集合²を群同型で割ったものを考えればよいのか。

問題点

商集合の側では「どの」群同型で同一視したかという情報が失われる。

²サイズの問題はいったん置いとく

同一性より同一視

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

- ▶ 同一性という命題があると同型と同一性は乖離する。
- ▶ 商集合は同型という構造を同一性という性質に潰してしまう。
- ▶ 同一性という概念が邪魔。
- ▶ 同一性は自明な同一視と考えれば、同一視の方が根源的。

アイディア

同一性の概念は置いて、同一視という構造を中心に数学の言語を設計し、「同型な対象を同一視する」を実現しよう。

- ▶ ZFC はだめ。
- ▶ 型理論でも、同一性を表す命題を持つとだめ。

ホモトピー論

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

対象の集まり、対象の間の同一視の集まり、同一視の間の高次の同一視の集まり、... からなる構造、 ∞ -**グループイド**に関連する研究分野。

Univalence 原理

対象が ∞ -グループイドである ∞ -グループイドがあつて、そこでの同一視は ∞ -グループイドの同値 (集合の全単射みたいなもの) である。つまり、「同値な ∞ -グループイドは同一視する」。

ホモトピー型理論 (HoTT)

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

∞ -グルーポイドの集まりを公理化したような型理論 (cf. ZFC は集合の集まりを公理化したもの)。以下、簡単な歴史。

- ▶ Martin-Löf 型理論 (Martin-Löf 1975)。多くの証明支援系の基。
- ▶ Hofmann and Streicher (1998) が Martin-Löf 型理論とグルーポイドを関連づけ、 ∞ -グルーポイドとの関連に言及。
- ▶ Awodey and Warren (2009) が Martin-Löf 型理論とホモトピー論 (モデル圏) を関連づける。独立に、Voevodsky (2006) が homotopy λ -calculus を提案。この辺りが HoTT の起こりとされる。
- ▶ HoTT の教科書 (The Univalent Foundations Program 2013) が出版。

本講演の内容

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

- ▶ HoTT の基礎
- ▶ Univalence 公理「同値な型は同一視する」
- ▶ 構造同一原理「同型な対象は同一視する」

参考文献

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

- ▶ The Univalent Foundations Program (2013). *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study. URL: <http://homotopytypetheory.org/book/>
標準的な教科書だが、既にやや古い。
- ▶ Egbert Rijke (2022). *Introduction to Homotopy Type Theory*. arXiv: 2212.11082v1
新しい教科書。もうすぐ Cambridge University Press から出版される。

型理論では型やその要素を構成することで数学を営む。

記法

$A : \text{Type}$	A は型
$a : A$	a は型 A の要素
$a_1 \equiv a_2$	a_1 と a_2 は定義から等しい
$c :\equiv e$	c を e と定義する

型や要素の概念はプリミティブで、そういう概念があると受け入れるもの。

記法

- ▶ $B : (x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \dots, x_n : A_n(x_1, \dots, x_{n-1})) \Rightarrow \text{Type}$
「仮定 $x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \dots, x_n : A_n(x_1, \dots, x_{n-1})$ の下で
 $B(x_1, x_2, \dots, x_n) : \text{Type}$ を構成する」
- ▶ $b : (x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \dots, x_n : A_n(x_1, \dots, x_{n-1})) \Rightarrow B(x_1, x_2, \dots, x_n)$
「仮定 $x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \dots, x_n : A_n(x_1, \dots, x_{n-1})$ の下で
 $b(x_1, x_2, \dots, x_n) : B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を構成する」
- ▶ $A : \text{Type}$ と $A : () \Rightarrow \text{Type}$ は実質同じ。
- ▶ $a : A$ と $a : () \Rightarrow A$ は実質同じ。

どのような型や要素を構成できるかという規則を追加して型理論を強化する。

- ▶ 同一視型 $a_1 = a_2$
- ▶ 関数型 $(x : A) \rightarrow B(x)$
- ▶ 対型 $(x : A) \times B(x)$
- ▶ 宇宙

規則

$A : \text{Type}$ と $a : A$ を構成できたとする。

- ▶ $x : A$ に対して、 $a = x : \text{Type}$ を構成できる。
- ▶ $\text{refl} : a = a$ を構成できる。
- ▶ さらに $E : (x : A, y : a = x) \Rightarrow \text{Type}$ と $e : E(a, \text{refl})$ を構成できたとする。
 - ▶ $x : A$ と $y : a = x$ に対して、 $\text{ind}_=(E, e, x, y) : E(x, y)$ を構成できる。
 - ▶ $\text{ind}_= - \text{refl}(E, e) : \text{ind}_=(E, e, a, \text{refl}) = e$ を構成できる。

$a = x$ の要素を同一視と呼ぶ。

同一視

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

規則 (再掲)

$x : A$ に対して、 $a = x : \text{Type}$ を構成できる。

$a = x$ は型。

規則 (再掲)

$\text{refl} : a = a$ を構成できる。

$\text{refl} : a = a$ は a とそれ自身の自明な同一視 (reflexivity)。

同一視

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

残りの規則は $x : A$ と $y : a = x$ の組は実質 (a, refl) しかないことを表す。

規則 (再掲)

$x : A$ と $y : a = x$ に対して、 $\text{ind}_=(E, e, x, y) : E(x, y)$ を構成できる。

(a, refl) での値だけからすべての (x, y) に一般化できる。帰納法 (induction) とも呼ばれる。

規則 (再掲)

$\text{ind}_= - \text{refl}(E, e) : \text{ind}_=(E, e, a, \text{refl}) = e$ を構成できる。

(a, refl) での値は与えられたもののまま。

同一視

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

例

$A : \text{Type}$ と $B : (x : A) \Rightarrow \text{Type}$ と $a_1, a_2 : A$ と $p : a_1 = a_2$ と $b_1 : B(a_1)$ に対し、

$$\text{subst}(B, p, b_1) : B(a_2)$$

$$\text{subst}(B, p, b_1) \equiv \text{ind}_=((x, y \mapsto B(x)), b_1, a_2, p)$$

$B(x) \equiv x = a_1$ で $b_1 \equiv \text{refl}$ の場合、 $p^{-1} : a_2 = a_1$ を得るので $=$ は対称。
よって、 $p : a_1 = a_2$ に対して、 $B(a_1)$ と $B(a_2)$ の要素は互いに移り合う。

同一視された要素を型で区別することはできない。

例

$A, B : \text{Type}$ と $f : (x : A) \Rightarrow B$ と $a_1, a_2 : A$ と $p : a_1 = a_2$ に対し、

$$\text{cong}(f, p) : f(a_1) = f(a_2)$$

$$\text{cong}(f, p) :\equiv \text{subst}((x \mapsto f(a_1) = f(x)), p, \text{refl})$$

あらゆる構成は同一視を保つ。

補足

要素 $\text{ind}_= - \text{refl}(E, e) : \text{ind}_=(E, e, a, \text{refl}) = e$ を構成する規則ではなく $\text{ind}_=(E, e, a, \text{refl}) \equiv e$ とする流儀もある。

- ▶ Martin-Löf 型理論 (Martin-Löf 1975) では $\equiv$.
- ▶ Cubical Type Theory (Cohen et al. 2018) という変種ではこの $\equiv$ は不成立。

今回はどちらにも対応できる定式化を使う。

規則

$A : \text{Type}$ と $B : (x : A) \Rightarrow \text{Type}$ を構成できたとする。

- ▶ $(x : A) \rightarrow B(x) : \text{Type}$ を構成できる。
- ▶ $b : (x : A) \Rightarrow B(x)$ に対し、 $\text{abs}(b) : (x : A) \rightarrow B(x)$ を構成できる。
- ▶ $f : (x : A) \rightarrow B(x)$ と $a : A$ を構成できたら、 $\text{app}(f, a) : B(a)$ を構成できる。
- ▶ $\text{app}(\text{abs}(b), a) \equiv b(a)$
- ▶ $f \equiv \text{abs}(x \mapsto \text{app}(f, x))$

$(x : A) \rightarrow B(x)$ の要素を関数と呼ぶ。

関数

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

要は

構成 $b : (x : A) \Rightarrow B(x)$

と

関数 $f : (x : A) \rightarrow B(x)$

が実質同じ。

記法

- ▶ **abs** は省略し、構成 $b : (x : A) \Rightarrow B(x)$ そのものを関数 $b : (x : A) \rightarrow B(x)$ とみなす。
- ▶ **app**(f, a) は $f(a)$ と書く。

記法

- ▶ $A, B : \text{Type}$ に対し、 $(x : A) \rightarrow B$ は単に $A \rightarrow B$ と書く。
- ▶ $\rightarrow$ は右結合。
- ▶ $f : (x : A) \rightarrow (y : B(x)) \rightarrow C(x, y)$ は2変数の関数と思い、 $f(x)(y)$ のことは $f(x, y)$ とも書く。

規則

$A : \text{Type}$ と $B : (x : A) \Rightarrow \text{Type}$ を構成できたとする。

- ▶ $(x : A) \times B(x) : \text{Type}$ を構成できる。
- ▶ $a : A$ と $b : B(a)$ に対し、 $(a, b) : (x : A) \times B(x)$ を構成できる。
- ▶ $c : (x : A) \times B(x)$ に対し、 $\text{fst}(c) : A$ と $\text{snd}(c) : B(\text{fst}(c))$ を構成できる。
- ▶ $\text{fst}(a, b) \equiv a$
- ▶ $\text{snd}(a, b) \equiv b$
- ▶ $c \equiv (\text{fst}(c), \text{snd}(c))$

$(x : A) \times B(x)$ の要素を対と呼ぶ。

記法

- ▶ $A, B : \text{Type}$ に対し、 $(x : A) \times B$ は単に $A \times B$ と書く。
- ▶ $\times$ は右結合。

要素が型であり、今まで登場した (、そして今回紹介しきれなかった) 型の構成で閉じた型を宇宙と呼ぶ。

- ▶ $\mathcal{U} : \text{Type}$
- ▶ $A : \mathcal{U}$ ならば $A : \text{Type}$ とみなす。
- ▶ $A : \mathcal{U}$ と $a, x : A$ に対し、 $a = x : \mathcal{U}$
- ▶ $A : \mathcal{U}$ と $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ に対し、 $(x : A) \rightarrow B(x) : \mathcal{U}$
- ▶ $A : \mathcal{U}$ と $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ に対し、 $(x : A) \times B(x) : \mathcal{U}$

命題と証明

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

今回の型理論には「命題」とその「証明」の概念は組込まれていない。次の性質を持つ型を命題のようなもの、その要素を証明のようなものと思う。

定義

$A : \text{Type}$ に対し、

$$\text{IsProp}(A) :\equiv (x, y : A) \rightarrow x = y$$

命題であると後に分かる型は「IsXXX」のような名前を付ける。

注意

「すべての $A : \text{Type}$ と $a_1, a_2 : A$ に対し、 $a_1 = a_2$ は命題である」は証明できない (Hofmann and Streicher 1998)。

- ▶ 異なる同一視 $p, q : a_1 = a_2$ があってもよい。
- ▶ すべての $a_1 = a_2$ が命題であるという公理は Uniqueness of Identity Proofs (UIP) と呼ばれる。
- ▶ UIP は後に導入する Univalence と矛盾するので絶対に仮定してはならない。

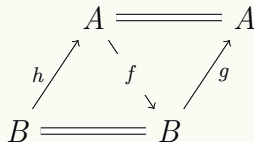
定義 (同値性)

$A, B : \text{Type}$ と $f : A \rightarrow B$ に対し、次の型を定義する。

$$\text{LInv}(f) := (g : B \rightarrow A) \times ((x : A) \rightarrow g(f(x)) = x)$$

$$\text{RInv}(f) := (h : B \rightarrow A) \times ((y : B) \rightarrow f(h(y)) = y)$$

$$\text{IsEquiv}(f) := \text{LInv}(f) \times \text{RInv}(f)$$

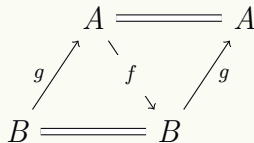


注意

同値性は次のように定義するのが一見自然に見える。

$$\text{Inv}(f) \equiv (g : B \rightarrow A) \times \\ ((x : A) \rightarrow g(f(x)) = x) \times ((y : B) \rightarrow f(g(y)) = y)$$

が、これは正しくない(後述)。



同値

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

定義 (同値)

$A, B : \text{Type}$ に対し、次の型を定義する。

$$A \simeq B :\equiv (f : A \rightarrow B) \times \text{IsEquiv}(f)$$

$A \simeq B$ の要素を同値 (equivalence) と呼ぶ。

例

$A : \text{Type}$ に対し、

$$\text{id} : A \simeq A$$

$$\text{id} :\equiv ((x \mapsto x), ((x \mapsto x), (x \mapsto \text{refl})), ((x \mapsto x), (x \mapsto \text{refl})))$$

定義

宇宙 $\mathcal{U}$ に対して、

$$\text{IdToEquiv} : (X, Y : \mathcal{U}) \rightarrow X = Y \rightarrow X \simeq Y$$

$$\text{IdToEquiv}(X, Y, p) :\equiv \text{subst}((Z \mapsto X \simeq Z), p, \text{id})$$

定義 (Univalence)

宇宙 $\mathcal{U}$ が **Univalence 公理** を満たすとは、

$$\text{IsUnivalent}(\mathcal{U}) :\equiv (X, Y : \mathcal{U}) \rightarrow \text{IsEquiv}(\text{IdToEquiv}(X, Y))$$

が要素を持つこと。

Univalence

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

宇宙 $\mathcal{U}$ が Univalence 公理を満たせば、 $A, B : \mathcal{U}$ に対し、同値

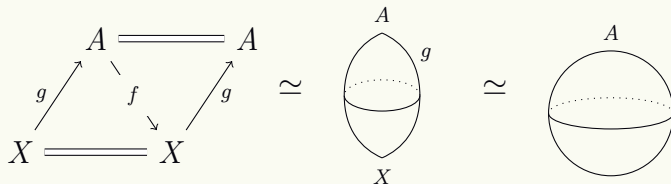
$$_ : (A = B) \simeq (A \simeq B)$$

を構成できる。

- ▶ 同値な型を同一視する。
- ▶ どの同値で型を同一視したかという情報は保持される。
- ▶ 雰囲気で同一視するのとは違い、同値な型を区別することはできないことが保証されている。

補足

$A : \mathcal{U}$ とする。 $(X : \mathcal{U}) \times (A = X)$ は 1 点 (A, refl) だけからなる型。
 Univalence は $(X : \mathcal{U}) \times (A \simeq X)$ が 1 点 (A, id) だけからなる型だという
 主張と同値。一方、 $(X : \mathcal{U}) \times (f : A \rightarrow X) \times \text{Inv}(f)$ は 2 次のループを持
 ち得て、1 点だけからなる型とは限らない。このことから、同値性の定
 義で $\text{Inv}(f)$ を採用すると Univalence は矛盾する公理になる。



型の上の構造を考える。

- ▶ 群構造
- ▶ 位相構造
- ▶ 圏構造

構造同一原理

同型な対象は同一である。

定義 (マグマ)

$\mathcal{U}$ を宇宙とする。

$$\text{MagmaStr} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$$

$$\text{MagmaStr}(X) :\equiv X \rightarrow X \rightarrow X$$

$$\text{Magma}(\mathcal{U}) : \text{Type}$$

$$\text{Magma}(\mathcal{U}) :\equiv (X : \mathcal{U}) \times \text{MagmaStr}(X)$$

$X : \text{Magma}(\mathcal{U})$ に対し、 $|X| :\equiv \text{fst}(X)$, $\mu_X :\equiv \text{snd}(X)$ と書く。

定義 (マグマ同型)

宇宙 $\mathcal{U}$ に対し、

$$\text{Iso} : \text{Magma}(\mathcal{U}) \rightarrow \text{Magma}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$$

$$\text{Iso}(X, Y) \equiv (f : |X| \simeq |Y|) \times$$

$$((x_1, x_2 : |X|) \rightarrow f(\mu_X(x_1, x_2)) = \mu_Y(f(x_1), f(x_2)))$$

定理 (構造同一原理 (structure identity principle))

Univalence 公理を満たす宇宙 $\mathcal{U}$ に対し、次を構成できる。

$$\text{SIP} : (X, Y : \text{Magma}(\mathcal{U})) \rightarrow (X = Y) \simeq \text{Iso}(X, Y)$$

構造同一原理

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

他にも、

- ▶ $\{\text{群の同一視}\} \simeq \{\text{群同型}\}$
- ▶ $\{\text{位相空間の同一視}\} \simeq \{\text{位相同型}\}$
- ▶ $\{\text{圏の同一視}\} \simeq \{\text{圏同値}\}$

などの「正しい」同一視の概念を得る。気になる人は (Ahrens, Kapulkin, and Shulman 2015; Ahrens, North, et al. 2020; Coquand and Danielsson 2013) あたりを読もう。

まとめ

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

HoTT は同一視の概念が「正しい」言語

関連の話題。

- ▶ Higher inductive type
- ▶ モデル (Angiuli et al. 2019; Bezem, Coquand, and Huber 2019; Cohen et al. 2018; Kapulkin and Lumsdaine 2021)
- ▶ 証明支援系 (Vezzosi, Mörtberg, and Abel 2019)
- ▶ 形式化プロジェクト
 - ▶ UniMath. <https://github.com/UniMath/UniMath>
 - ▶ Coq-HoTT. <https://github.com/HoTT/Coq-HoTT>
 - ▶ agda-unimath. <https://unimath.github.io/agda-unimath/>
 - ▶ Cubical Agda. <https://github.com/agda/cubical>
 - ▶ 1lab. <https://1lab.dev/>

参考文献 I

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

- Benedikt Ahrens, Krzysztof Kapulkin, and Michael Shulman (2015).
“Univalent categories and the Rezk completion”. In: *Mathematical Structures in Computer Science* 25.5, pp. 1010–1039. DOI: 10.1017/S0960129514000486.
- Benedikt Ahrens, Paige Randall North, Michael Shulman, and Dimitris Tsementzis (2020). “A Higher Structure Identity Principle”. In: *Proceedings of the 35th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. LICS '20. Saarbrücken, Germany: Association for Computing Machinery, pp. 53–66. DOI: 10.1145/3373718.3394755.
- Carlo Angiuli, Guillaume Brunerie, Thierry Coquand, Kuen-Bang Hou (Favonia), Robert Harper, and Daniel R. Licata (2019). *Syntax and Models of Cartesian Cubical Type Theory*. URL: <https://github.com/dlicata335/cart-cube>.

参考文献 II

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

Steve Awodey and Michael A. Warren (2009). “Homotopy theoretic models of identity types”. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 146.1, pp. 45–55. DOI: 10.1017/S0305004108001783.

Marc Bezem, Thierry Coquand, and Simon Huber (Aug. 2019). “The Univalence Axiom in Cubical Sets”. In: *Journal of Automated Reasoning* 63.2, pp. 159–171. DOI: 10.1007/s10817-018-9472-6.

Cyril Cohen, Thierry Coquand, Simon Huber, and Anders Mörtberg (2018). “Cubical Type Theory: A Constructive Interpretation of the Univalence Axiom”. In: *21st International Conference on Types for Proofs and Programs (TYPES 2015)*. Ed. by Tarmo Uustalu. Vol. 69. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 5:1–5:34. DOI: 10.4230/LIPIcs.TYPES.2015.5.

参考文献 III

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

Thierry Coquand and Nils Anders Danielsson (2013). “Isomorphism is equality”. In: *Indagationes Mathematicae* 24.4. In memory of N.G. (Dick) de Bruijn (1918 – 2012), pp. 1105–1120. DOI: 10.1016/j.indag.2013.09.002.

Martin Hofmann and Thomas Streicher (1998). “The groupoid interpretation of type theory”. In: *Twenty-five years of constructive type theory (Venice, 1995)*. Vol. 36. Oxford Logic Guides. New York: Oxford Univ. Press, pp. 83–111. DOI: 10.1093/oso/9780198501275.003.0008.

Krzysztof Kapulkin and Peter LeFanu Lumsdaine (2021). “The simplicial model of univalent foundations (after Voevodsky)”. In: *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 23.6, pp. 2071–2126. DOI: 10.4171/JEMS/1050.

参考文献 IV

Per Martin-Löf (1975). “An Intuitionistic Theory of Types: Predicative Part”. In: *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* 80, pp. 73–118. DOI: [10.1016/S0049-237X\(08\)71945-1](https://doi.org/10.1016/S0049-237X(08)71945-1).

Egbert Rijke (2022). *Introduction to Homotopy Type Theory*. arXiv: [2212.11082v1](https://arxiv.org/abs/2212.11082v1).

The Univalent Foundations Program (2013). *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study. URL: <http://homotopytypetheory.org/book/>.

Andrea Vezzosi, Anders Mörtberg, and Andreas Abel (July 2019). “Cubical Agda: A Dependently Typed Programming Language with Univalence and Higher Inductive Types”. In: *Proc. ACM Program. Lang.* 3.ICFP. DOI: [10.1145/3341691](https://doi.org/10.1145/3341691).

Vladimir Voevodsky (Sept. 2006). *A very short note on homotopy λ -calculus*. URL: <https://www.math.ias.edu/vladimir/node/96>.

関数外延性

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

定義 (ホモトピー)

$A : \text{Type}$ と $B : (x : A) \Rightarrow \text{Type}$ と $f, g : (x : A) \rightarrow B(x)$ に対し、

$$f \sim g :\equiv (x : A) \rightarrow f(x) = g(x)$$

$$\text{IdToHmtpy}(f, g) : f = g \rightarrow f \sim g$$

$$\text{IdToHmtpy}(f, g, p) :\equiv \text{subst}((h \mapsto f \sim h), p, (x \mapsto \text{refl}))$$

公理 (関数外延性 (function extensionality))

$A : \text{Type}$ と $B : (x : A) \Rightarrow \text{Type}$ に対し、次の型の要素を構成できる。

$$\text{FunExt}(A, B) :\equiv (f, g : (x : A) \rightarrow B(x)) \rightarrow \text{IsEquiv}(\text{IdToHmtpy}(f, g))$$

関数外延性

導入

型理論

ホモトピー型理論

「正しい」数学

References

おまけ

以降、関数外延性は常に仮定する。

定理

- ▶ $\text{IsProp}(A)$ は命題。
- ▶ $\text{IsEquiv}(f)$ は命題。
- ▶ $\text{IsUnivalent}(\mathcal{U})$ は命題。
- ▶ $\text{FunExt}(A, B)$ は命題。