

CR 多様体の変形と埋め込み可能性

すーり

第8回すうがく徒のつどい

2025 年 10 月 12 日

自己紹介

名前 すーり (@math_su_ri)

専門 Cauchy–Riemann (CR) 幾何, 多変数複素解析

出身 新潟県

趣味 絵を描くこと, アニメを観ること, ゲーム

よろしくお願いします！

Contents

- Background: Cauchy–Riemann (CR) 幾何の起源
- CR 多様体の定義と具体例
- CR 多様体の埋め込み可能性
- 埋め込み不可能な CR 多様体: 3次元球面 S^3 の変形
- CR 変形空間の局所スライス定理 (発展)

Background: Cauchy–Riemann (CR) 幾何の起源

Background

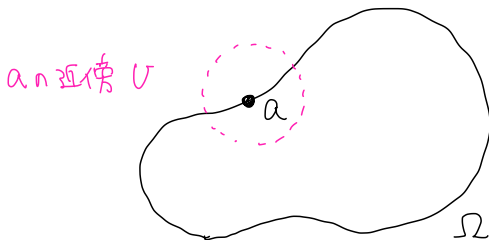
多変数複素解析における正則領域の研究

1 変数の場合から: $\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域 (連結開集合) とする.

$\forall a \in \partial\Omega$ に対し, Ω 上の正則関数

$$f(z) = \frac{1}{z - a}$$

は a の近傍に解析接続できない.



解析接続

U 上の正則関数

F で

$$F|_{\Omega \cap U} = f$$

とみたるものか
と云ふこと.

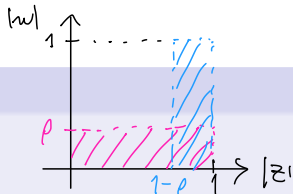
Background

多変数 (2 変数以上) の場合

$\mathbb{C}^{n+1}$ ($n \geq 1$) 内の領域で、それよりも真に大きい領域へ全ての正則関数が解析接続されるものがある！

Theorem (Hartogs 現象)

$n = 1$ とし, $0 < \rho < 1$ とする.



$$\Omega_H = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \underline{0 < |z| < 1, 0 < |w| < \rho} \}$$
$$\cup \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \underline{1 - \rho < |z| < 1, 0 < |w| < 1} \}$$

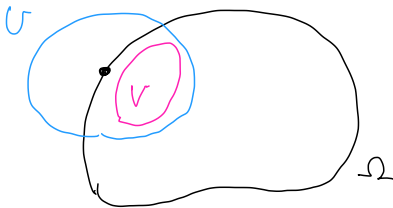
とおく. このとき Ω_H 上の任意の正則関数 f に対し, 多重円板 $P = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| < 1, |w| < 1 \}$ 上の正則関数 F が存在して, $F|_{\Omega_H} = f$ となる.

Background

Hartogs 現象が**起こらない**領域が、正則関数が“本来棲んでいる領域”として重要である $\rightsquigarrow$ “正則領域” の概念が定義される

Definition (正則領域)

領域 Ω が**正則領域**であるとは、次を満たす領域 $U, V \neq \emptyset$ が**存在しない**ことである: $U \not\subset \Omega$ かつ $V \subset \Omega \cap U$ であり、 Ω 上の任意の正則関数 f に対して、 U 上の正則関数 F が存在して $F|_V = f$ を満たす。



Rem 1 変数のとき、任意の領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ は常に正則領域である.

Background

正則領域は領域の幾何的な性質と同値である！

Theorem (Hartogs, Levi; 岡 1953)

正則領域 $\iff$ “擬凸領域”

“擬凸領域” は、複素解析的に凸な領域のこと。

以下では領域の境界が滑らかである場合に擬凸性の定義をしよう。

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ の境界 $\partial\Omega$ は滑らかなので、 C^∞ 関数 $r: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて $\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid r(z) = 0\}$ と表すことができる。(ただし dr は $\partial\Omega$ の各点で消えないとする。)

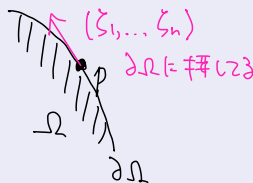
Example 球 $B^{n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z|^2 < 1\}$ の境界 ∂B^{n+1} は実 $(2n+1)$ 次元の球面 $S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z|^2 = 1\}$ である。 $r(z) = |z|^2 - 1$ とおくと、 $S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid r(z) = 0\}$ と表せる。

Background

$\Omega \subset \mathbb{C}^{n+1}$: 領域, $\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid r(z) = 0\}$

Definition

Ω が次を満たすとき, **擬凸領域**であるという: $\forall p \in \partial\Omega$ に対して,
 $(\zeta_1, \dots, \zeta_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ が

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial r}{\partial z_j}(p) \zeta_j = 0 \quad (1)$$


を満たすならば,

$$\sum_{j,k=1}^{n+1} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p) \zeta_j \bar{\zeta}_k \geq 0 \quad (2)$$

が成り立つ. 不等式 (2) でつねに “>” が成り立つならば, **強擬凸**であるという.

ただし, $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$

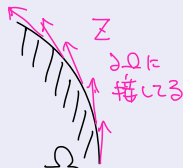
Background

$\partial\Omega$ 上に, 外側にある $\mathbb{C}^{n+1}$ の複素構造を “制限” して幾何構造を与える.

Definition (境界 $\partial\Omega$ 上の CR 構造)

境界 $\partial\Omega$ の接バンドルの複素化 $\mathbb{C}T\partial\Omega$ の部分バンドル

$$T^{1,0}\partial\Omega := \mathbb{C}T\partial\Omega \cap \text{Span} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n+1}} \right\}$$



を定める. $T^{1,0}\partial\Omega$ を $\partial\Omega$ 上の標準的 CR 構造という.

標準的 CR 構造に属しているベクトル場は, z 微分だけで表されるベクトル場であって, 境界 $\partial\Omega$ に接しているものに他ならない. つまり,

$$Z \in \Gamma(T^{1,0}\partial\Omega) \iff Zr = 0 \text{ and } Z = \zeta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \zeta_{n+1} \frac{\partial}{\partial z_{n+1}}. \quad (3)$$

実はこの条件 (3) は, 境界の各点で (1) と同値であることがわかる.

Background

領域の複素幾何と境界の CR 幾何との対応

Theorem (Bochner–Hartogs 1943, Fefferman 1974)

2つの有界強擬凸領域 Ω_1 と Ω_2 に対して,

Ω_1 と Ω_2 が双正則同値 $\iff \partial\Omega_1$ と $\partial\Omega_2$ の標準的 CR 構造が CR 同型

ここで, CR 構造が **CR 同型**とは, 微分同相写像 $F: \partial\Omega_1 \longrightarrow \partial\Omega_2$ で

$$F_*(T^{1,0}\partial\Omega_1) \subset T^{1,0}\partial\Omega_2$$

となるものが存在するときという.

CR 多様体の定義と具体例

CR 多様体

領域の境界上の標準的 CR 構造から:

$\partial\Omega$ 上の標準的 CR 構造

$$T^{1,0}\partial\Omega := \mathbb{C}T\partial\Omega \cap \text{Span} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n+1}} \right\}$$

は次の性質をもつことがわかる.

- $\text{rank}_{\mathbb{C}} T^{1,0}\partial\Omega = n$, ((3) より)
- $T^{1,0}\partial\Omega \cap \overline{T^{1,0}\partial\Omega} = \{0\}$,
- $[T^{1,0}\partial\Omega, T^{1,0}\partial\Omega] \subset T^{1,0}\partial\Omega$

$\leadsto \partial\Omega$ は実 $(2n+1)$ 次元の多様体なので, 上の 3 つの性質を実 $(2n+1)$ 次元の多様体 M に一般化しよう!

CR 多様体の定義と具体例

Definition

M : 実 $(2n+1)$ 次元多様体.

接バンドルの複素化 $\mathbb{C}TM$ における部分バンドル $T^{1,0}M$ が次を満たすとき, M の **CR 構造** という:

- (i) $\text{rank}_{\mathbb{C}} T^{1,0}M = n$,
- (ii) $T^{1,0}M \cap T^{0,1}M = \{0\}$ ($T^{0,1}M := \overline{T^{1,0}M}$),
- (iii) $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$.

このとき, $(M, T^{1,0}M)$ を **CR 多様体** と呼ぶ.

CR 多様体の定義と具体例

具体例 1 $(2n+1)$ 次元球面

$$\begin{aligned} S^{2n+1} &= \{ (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1 \} \\ &= \{ (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid r(z) = 0 \}. \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} r(z_1, \dots, z_{n+1}) &= |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 - 1 \\ &= z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_{n+1} \bar{z}_{n+1} - 1. \end{aligned}$$

球面 S^{n+1} の標準的 CR 構造 $T^{1,0}S^{n+1}$ を求めよう. ベクトル場 Z が $T^{1,0}S^{n+1}$ に属するための条件を思い出すと,

$$Zr = 0 \text{ and } Z = \zeta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \zeta_{n+1} \frac{\partial}{\partial z_{n+1}}$$

であった.

CR 多様体の定義と具体例

$$Z = \zeta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \zeta_{n+1} \frac{\partial}{\partial z_{n+1}} \text{ かつ } Zr = 0 \text{ となるためには,}$$

$$\zeta_1 \bar{z}_1 + \cdots + \zeta_{n+1} \bar{z}_{n+1} = 0.$$

が必要十分である. よって,

$$Z_j = \bar{z}_{n+1} \frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial z_{n+1}} \quad (j = 1, \dots, n)$$

とおくと,

$$T^{1,0}S^{n+1} = \text{Span} \{ Z_1, \dots, Z_n \}$$

となる. (つまり, $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ が大域的な frame になる.)

特に 3 次元 ($n = 1$) の場合は, $S^3 = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \}$ で,

$$T^{1,0}S^3 = \text{Span} \{ Z \}, \quad Z = \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial w}.$$

CR 多様体の定義と具体例

具体例 2 Heisenberg 群

$\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} (= \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R})$ に次のような群演算を入れた Lie 群を **Heisenberg 群** という:

$$(z, t) \cdot (z', t') = (z + z', t + t' + 2 \operatorname{Im} z \bar{z}').$$

ただし, $z, z' \in \mathbb{C}^n$, $t, t' \in \mathbb{R}$, $z \bar{z}' = \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}'_j$.

複素ベクトル場

$$Z_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + i \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial t} \quad (j = 1, \dots, n)$$

を考える. これらは左不変ベクトル場である.

$Z_1, \dots, Z_n$ で生成される部分バンドル

$$T^{1,0}\mathbb{H}^n := \operatorname{Span} \{ Z_1, \dots, Z_n \}$$

は CR 構造である.

CR 多様体の定義と具体例

具体例 2 (つづき)

Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ はある領域の境界として実現される:

$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ 内の領域

$$\Sigma = \{ (z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \zeta > \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \}$$

とすると,

$$\partial \Sigma = \{ (z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \zeta = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \}$$

である. 写像 $\pi: \mathbb{H}^n \rightarrow \partial \Sigma$ を

$$\pi(z, t) = (z, t + \sum_{j=1}^n |z_j|^2)$$

と定めると, π は CR 同型 (i.e, $\pi_* T^{1,0} \mathbb{H}^n \subset T^{1,0} \partial \Sigma$) となることが示せる.

複素幾何と結びつきの深い “強擬凸 CR 多様体” を定義しよう.

Definition

CR 多様体 $(M, T^{1,0}M)$ が強擬凸であるとは, 各点で消えない $\theta \in \Omega^1(M)$ であって, 次を満たすものが存在するときという:

$\ker \theta = HM := \operatorname{Re}(T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M)$ であり, Levi 形式 と呼ばれる $T^{1,0}M$ 上のエルミート計量

$$(Z, W) \mapsto -i d\theta(Z, \overline{W}), \quad \text{for } Z, W \in \Gamma(M, T^{1,0}M)$$

が正定値である.

このとき, HM は接触構造で, θ は接触形式となることがわかる.

Ex. 1 領域 Ω が強擬凸領域であることと, 境界 $\partial\Omega$ が強擬凸 CR 多様体であることは同値である.

Ex. 2 球面 S^{n+1} と Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ も強擬凸 CR 多様体である.

CR 多様体の埋め込み可能性

CR 多様体の埋め込み可能性

問. CR 多様体 M は, いつ十分次元の大きい $\mathbb{C}^N$ に “埋め込める” か?

Definition

$(M, T^{1,0}M)$: CR 多様体

微分可能多様体の埋め込み $F: M \rightarrow \mathbb{C}^N$ が **CR 埋め込み** であるとは,

$$F_* T^{1,0}M \subset \text{Span} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_N} \right\}.$$

が成り立つことである. この CR 埋め込みが存在するとき, M は **(CR) 埋め込み可能** であるという.

CR 多様体の埋め込み可能性

特にコンパクト強擬凸 CR 多様体が埋め込み可能なとき，複素幾何と深い関係がある．

Theorem

コンパクト強擬凸 CR 多様体 M が埋め込み可能であるならば， M はある複素多様体 X 内の強擬凸領域 Ω の境界と CR 同型である．

証明のスケッチ

Harvey–Lawson 1975 により， M は特異点付きの Stein 空間 X' の境界として実現される．さらに Heunemann–Ohsawa 1986 により， $X' \cup \partial X'$ はより大きい Stein 空間 $\tilde{X}$ に含まれる．最後に $\tilde{X}$ の特異点解消 X をとればよい．



CR 多様体の埋め込み可能性

- $\dim M \geq 5 \implies M$ はいつでも埋め込み可能である.
(Boutet de Monvel 1975)
- $\dim M = 3 \implies$ 一般に埋め込み可能とは限らない!
e.g.) 3次元球面の標準的 CR 構造の“変形”に埋め込み不可能 CR 構造が現れる. (Rossi 1965, Burns–Epstein 1990)

埋め込み不可能な CR 多様体: 3次元球面 S^3 の変形

3次元球面 S^3 の変形

3次元球面: $S^3 = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \}$

標準的 CR 構造は

$$T^{1,0}S^3 = \text{Span} \{ Z \}, \quad Z = \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial w}$$

であった.

$0 < |c| < 1$ なる $c \in \mathbb{C}$ に対して,

$$Z_c := Z + c\bar{Z},$$

$$T_c^{1,0}S^3 := \text{Span} \{ Z_c \}$$

と定める. このとき $T_c^{1,0}S^3$ はまた強擬凸 CR 構造になる.

変形した CR 多様体 $(S^3, T_c^{1,0}S^3)$ を **Rossi 球面** という.

Rossi 球面の埋め込み不可能性

Theorem (Rossi 1965)

Rossi 球面 $(S^3, T_c^{1,0}S^3)$ は埋め込み不可能である

証明のスケッチ

もし, CR 埋め込み $F: (S^3, T_c^{1,0}S^3) \rightarrow \mathbb{C}^N$ が存在したとすると, $F = (f_1, \dots, f_N)$ の各成分 f_j は $\bar{Z}_c f_j = 0$ を満たさないとはいけない. 実際, $w_1, \dots, w_N$ を $\mathbb{C}^N$ の座標とすると, CR 埋め込みの定義より $F_*(\bar{Z}_c) \subset \text{Span} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{w}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{w}_N} \right\}$ なので,

$$0 = F_*(\bar{Z}_c)w_j = \bar{Z}_c(w_j \circ F) = \bar{Z}_c f_j.$$

しかし一方で, S^3 上の関数 f が $\bar{Z}_c f = 0$ をみたすとき, $f(z, w) = \overbrace{f(-\bar{z}, -\bar{w})}^{\text{f}(-\bar{z}, -\bar{w})}$ であることが示せる. (f の球面調和関数分解を用いる.) よって F は単射ではなく, 矛盾してしまう.

S^3 の一般の変形

3次元球面: $S^3 = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \}$

標準的 CR 構造: $T^{1,0}S^3 = \text{Span} \{ Z \}$, $Z = \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial w}$

$0 < |\varphi| < 1$ なる $\varphi \in C^\infty(S^3)$ に対して,

$$Z_\varphi := Z + \varphi \bar{Z},$$

$$T_\varphi^{1,0}S^3 := \text{Span} \{ Z_\varphi \}$$

と定める. このとき $T_\varphi^{1,0}S^3$ もまた強擬凸 CR 構造になる.

このとき φ を変形テンソルとよぶ.

Remark

逆に, 標準的 CR 構造 $T^{1,0}S^3$ の “小さい” 変形となる強擬凸 CR 構造は $T_\varphi^{1,0}S^3 = \text{Span} \{ Z_\varphi \}$ で書けることも示すことができる.

S^3 の一般の変形

Theorem (Burns–Epstein 1990)

“generic” な $\varphi \in C^\infty(S^3)$ ($0 < |\varphi| < 1$) に対して, φ で変形した CR 構造 $T_\varphi^{1,0}S^3$ は埋め込み不可能である.

コメント

一般に, CR 構造が埋め込み可能であることと, “Kohn ラプラシアン” のスペクトルが 0 を孤立点としてもつことが同値である. (Burns 1979, Kohn 1986) ここで Kohn ラプラシアンとは, 複素多様体の $\bar{\partial}$ ラプラシアンの CR バージョンである. (定義は省略)

Burns–Epstein は, Kohn ラプラシアンのスペクトルが 0 を孤立点にもたない (i.e, スペクトルが 0 に集積する) ことを示すために, 固有関数空間への射影作用素族に対して作用素の摂動論を用いて証明した.

埋め込み可能な変形

$\mathcal{D} = \{\varphi \in C^\infty(S^3) \mid |\varphi| < 1\}$ とおき、変形テンソルの空間と呼ぼう。
変形テンソル $\varphi \in \mathcal{D}$ は、 S^3 上の関数なので、球面調和関数を用いて調べることができる。つまり、 φ を次のように分解することができる：

$$\varphi = \sum_{p=0, q=0}^{\infty} \varphi_{p,q}, \quad \varphi_{p,q} \in \mathcal{H}_{p,q},$$

ただし、

$$\mathcal{P}_{p,q} = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ z^a w^b \bar{z}^c \bar{w}^d \mid a+b=p, c+d=q \},$$

$$\mathcal{H}_{p,q} = \{ f \in \mathcal{P}_{p,q} \mid \Delta_{\mathbb{R}^4} f = 0 \}.$$

Theorem (Burns–Epstein (1990))

$\mathcal{D}_{BE} = \{ \varphi \in \mathcal{D} \mid \varphi_{p,q} = 0 \text{ if } q < p+4 \}$ とおく。このとき、
 $\varphi \in \mathcal{D}_{BE}$ with $\|\varphi\|_{C^4} \ll 1 \implies T_\varphi^{1,0} S^3$ は埋め込み可能。

CR 変形空間の局所スライス定理 (発展)

Cheng-Lee の局所スライス定理 (S^3 バージョン)

Recall $\mathcal{D} = \{\varphi \in C^\infty(S^3) \mid |\varphi| < 1\}$.

ここで $\mathcal{C}$ を (S^3, HS^3) の接触微分同相群とする. $\mathcal{C}$ は pull-back $(F, \varphi) \mapsto F^*\varphi$ によって $\mathcal{D}$ に作用する. この作用によって移り合う変形テンソルで定まる CR 構造は “同じ” であると考える.

$\leadsto$ CR 構造の変形空間のモジュライは $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ である.

Cheng-Lee による “局所スライス定理” は, モジュライ $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ の局所構造を記述する.

S^3 の CR 同型群は “とても大きい” ため, **marked 変形空間**

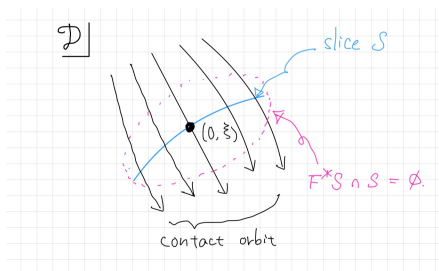
$$\mathcal{D}^{mark} = \mathcal{D} \times \underline{\mathcal{G}},$$

を考えることにする. ただし, $\underline{\mathcal{G}}$ は 標準的 CR 球面 $(S^3, T^{1,0}S^3)$ 上の “CR Cartan バンドル” とする.

Theorem (Cheng–Lee (1995))

$\xi \in \underline{\mathcal{G}}$ に対して, *tame Fréchet* 部分多様体 $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}^{\text{mark}}$ が存在して, 次を満たす:

- 作用 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}^{\text{mark}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{mark}}$ を制限すると, $(\text{id}, (0, \xi))$ の近傍で滑らかな *tame* 微分同相 $\mathcal{P}: \mathcal{C} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{mark}}$ である.
- 十分 id に近い $F \in \mathcal{C} \setminus \{\text{id}\}$ に対して, $F(\mathcal{S}) \cap \mathcal{S} = \emptyset$.



Rem. この定理は一般の3次元コンパクト強擬凸CR多様体でも成り立つ.

Curry–Ebenfelt の埋め込み可能局所スライス定理

球面 S^3 の場合には、埋め込み可能な変形空間の中でもスライスが取れる。 $\mathcal{D}'_{BE} = \{\varphi \in \mathcal{D}_{BE} \mid \text{Im}((\bar{Z})^2 \varphi_{p,p+4}) = 0 \ (\forall p \geq 0)\}$ とおく。

Curry–Ebenfelt は、 $\mathcal{D}'_{BE}$ が **埋め込み可能** 変形空間 $\mathcal{D}_{emb}^{mark}$ の中でスライスになっていることを示した。

Theorem (Curry–Ebenfelt (2024))

$\xi \in \underline{\mathcal{G}}$ とする。このとき

- 作用 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}^{mark} \longrightarrow \mathcal{D}^{mark}$ を制限すると $(\text{id}, (0, \xi))$ の近傍から $(0, \text{id}) \in \mathcal{D}_{emb}^{mark}$ の近傍への滑らかな *tame* はめ込み $\mathcal{P}_{emb}: \mathcal{C} \times \mathcal{D}'_{BE} \times \{\xi\} \longrightarrow \mathcal{D}^{mark}$ となる。
- $F \in \mathcal{C} \setminus \{\text{id}\}$ が id に十分近いとき、~~the image of~~ $F(\mathcal{D}'_{BE} \times \{\xi\}) \cap (\mathcal{D}'_{BE} \times \{\xi\}) = \emptyset$ 。

Question: より一般の CR 多様体で成り立つ??

ありがとうございました！