

# 古典命題論理の 健全性と完全性

第8回すうがく徒のつとめ

2025年10月12日

いことんど

# どんな分野の話？

・分野名：数理論理学, 数学基礎論.

・何する分野？：人間の数学での営みの数学的なモデルを作り,  
それを分析することで, 人間の数学での営みについて  
示唆を得ようとする分野.

・人間の数学での営み：推論, 証明, 計算,...

↑ この話

数学と哲学の  
両方に関連！

|   |    |   |                                 |
|---|----|---|---------------------------------|
| { | 哲学 | → | 1. 人間の数学での営みを分析                 |
|   | 数学 | → | 2. 1. を元にその数学的モデルを作り, それを分析     |
|   | 哲学 | → | 3. 1. と 2. から, 数学での営みについて示唆を得る. |

# どんな話？

## 講演の流れ

1. 人間の数学での営み（特に命題と証明）を観察。
  - ・ 数学的な話ではない。
2. 1.を元に、命題と言証明の数学的モデルを作り、それを分析。
  - ・ 数学的な話

- ・ 数学の講演なので、2. がメイン。
- ・ 1. に深くは踏み込まない。

# 命題

数学に登場する文章の観察から始める。

- ・ 真偽が決まっている文章を「命題」と呼ぶ。

- ・  $1 + 1 = 2$  … 真の命題。

- ・  $a^2 = -1$  となる実数  $a$  が存在する。… 偽の命題。

- ・ 変数を含み、それに入る値に応じて真偽が決まる文章を「条件」という。

- ・  $x$  は有理数である

今回は、命題に注目する。

# 複雑な命題

## 命題結合子

- 命題同士を「かつ」「または」「ならば」「でない」で繋げて、より複雑な命題を作ることができる。
- そうして作られた命題の真偽は、元の命題の真偽によって決まる。
- 例えば、 $P$ と $Q$ を命題とすると、 $P$ かつ $Q$ の真偽は...

$P$ かつ $Q$ の真理値表

| $P$ | $Q$ | $P$ かつ $Q$ |
|-----|-----|------------|
| T   | T   | T          |
| T   | F   | F          |
| F   | T   | F          |
| F   | F   | F          |

・ T: 真 (True), F: 偽 (False)

・  $P$ も $Q$ も真なら、 $P$ かつ $Q$ も真

・  $P$ と $Q$ のどちらか片方でも偽なら、 $P$ かつ $Q$ も偽。

# 恒真命題

- ・真理値表において、全て T (真) になる命題を恒真命題という。
- ・恒真命題は、「それを構成する命題の真理値が何であっても、常に真になる命題」のこと。

↑ 恒真!

| P | Pでない | Pまたは(Pでない) |
|---|------|------------|
| T | F    | T          |
| F | T    | T          |

↑ Pの真理値が何であっても必ず T に!

# 証明

我々は、真理値表を書く以外に、証明をすることでも、命題の正しさを言明べらる。

- ・証明…「これは認める」という命題から出発し、  
「自明な」推論を繰り返して、目的の命題に辿り着く作業。
- ・何を「自明な」推論とするかは、様々な立場がある。
- ・ここでは、数学で最も広く受け入れられるであろう立場を採る。

# 真偽と証明の関係

- ・真偽と証明の関係は？

- ・我々は、「証明できるなら正しい」と思っている。

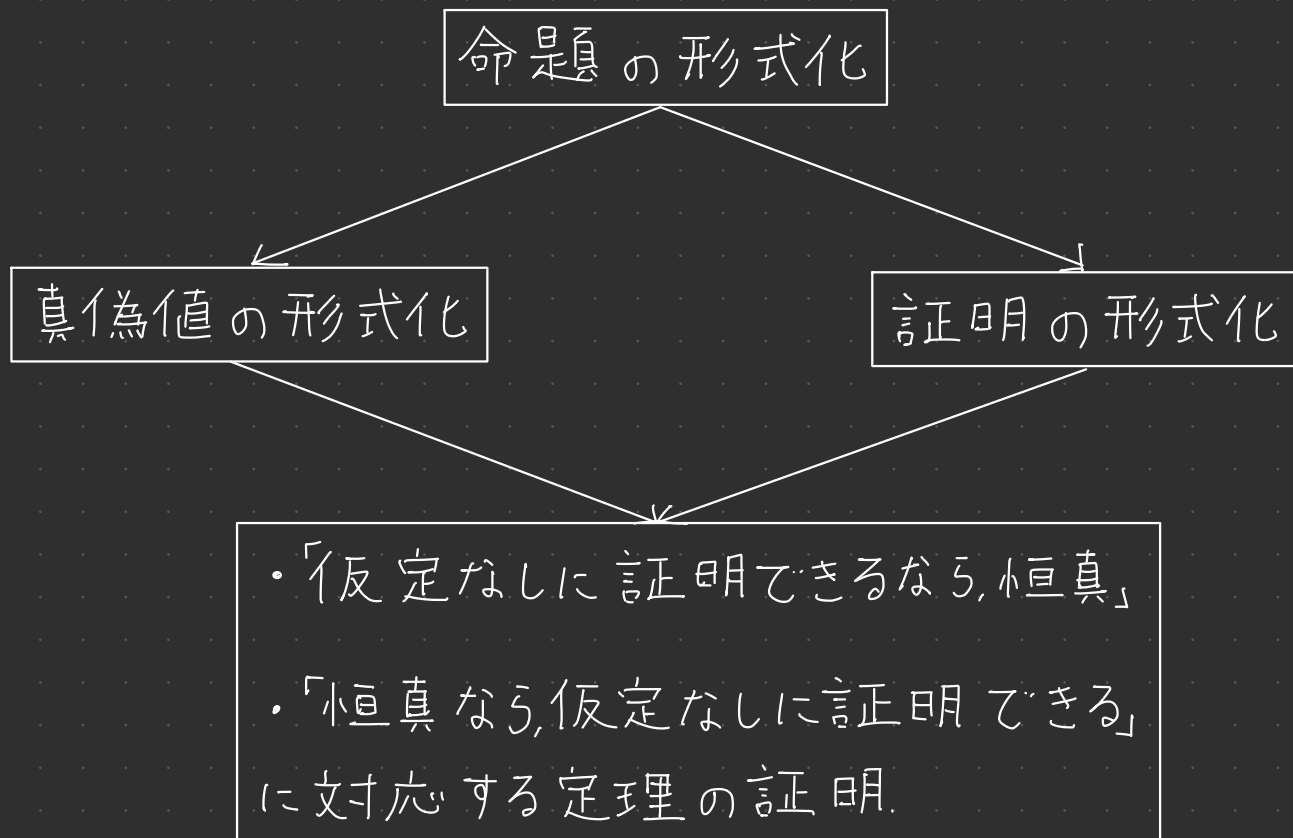
→ 仮定なしに証明できる命題は恒真命題だろうか？  
(何も仮定しない証明 = いつでも使える証明)

- ・我々は「恒真命題はいつでも証明で使って良い」とも思っている。

→ 恒真命題は仮定なしで証明できるだろうか？

これらを数学的に分析してみよう！

いまからすること



## 命題の形式化 (1/4) : 準備

- ・命題の数学的なモデルを作る.

- ・記号列として形式化する

- ・再掲: 命題同士を命題結合子で繋(づ)て、より複雑な命題を作ることができる.

- ・次を準備する:

- ・可算無限個の記号  $p_0, p_1, p_2, \dots$  と  $\perp$ .

- ・「それ以上分解できない命題」の形式化に使う

- ・記号  $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, (, )$

- ・これらはそれぞれ、「かつ」「または」「ならば」「でない」の形式化に使う.

↙ 「矛盾」の形式化.

# 命題の形式化 (2/4) : 定義

命題の形式化を、次のように再帰的に定義する

- ・再帰的な定義 … 高校数学 では、漸下式の定義等で用いる方法.

## 定義 (論理式)

1.  $p_0, p_1, p_2, \dots, \perp$  は論理式である.

これらを原子論理式という.

2.  $\varphi$  と  $\psi$  が論理式の時,

$$(\varphi) \wedge (\psi), \quad (\varphi) \vee (\psi), \quad (\varphi) \rightarrow (\psi), \quad \neg(\varphi)$$

は論理式である.

3. 1. と 2. で作られる記号列のみが論理式である.

## 命題の形式化(3/4): 例

例

次の記号列は論理式:

$$p_0, p_1, \neg(p_0), (\neg(p_0)) \wedge (p_1), ((\neg(p_0)) \wedge (p_1)) \rightarrow (p_2)$$

次の記号列は論理式でない:

$$p_0 p_1, (p_0) \wedge \vee (p_1), \neg \vee (p_0), (()) p_0$$

## 命題の形式化(4/4): 略記

- ・論理式が複雑になると、括弧が多くて煩雑!

$$\text{e.g. } (((\neg(p_0)) \wedge (p_1)) \rightarrow (p_2)) \vee (p_3)$$

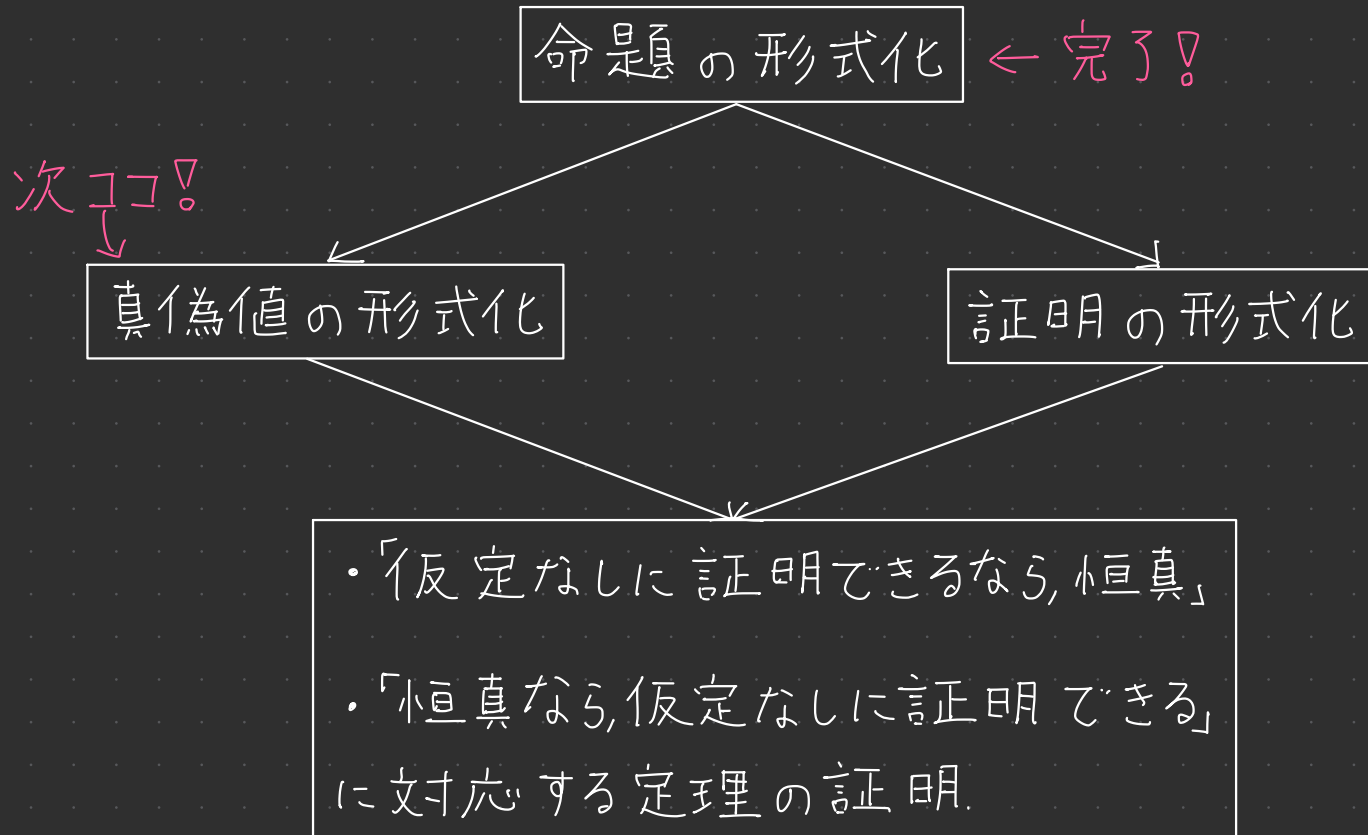
→ 次の約束に基づいて、括弧を省略する:

- ・一番内側の括弧は省略する
- ・ $\neg$  の適用範囲は直後のみ
- ・ $\wedge$  と  $\vee$  が論理式を結ぶ力は、 $\rightarrow$  より強い

すると上の論理式は次のように書ける: (デモ)

$$(\neg p_0 \wedge p_1 \rightarrow p_2) \vee p_3$$

再掲：いまからすること



# 真偽の形式化 (1/5) : 定義

「これ以上分解できない命題」の真偽を次のように形式化する。

- ・ 集合  $Atom := \{p_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{\perp\}$  とする。
- ・ 記号  $0, 1$  を準備する。

定義 (真理値割り当て)

$\varphi(\perp) = 0$  なる関数  $\varphi: Atom \rightarrow \{0, 1\}$  を真理値割り当てという。

真理値割り当て  $\varphi$  の  $p \in Atom$  における値  $\varphi(p)$  を  $p$  の真理値という。

この形式化

(再掲)  $P$  か  $Q$  の真理値表

| P | Q | $P$ か $Q$ |
|---|---|-----------|
| T | T | T         |
| T | F | F         |
| F | T | F         |
| F | F | F         |

## 真偽の形式化(2/5) : 定義の拡張(1)

再掲: 命題同士を命題結合子で繋げて作られた命題の真偽は,  
元の命題の真偽から定まる.

この分析を元に, 真理値割り当て

$$\models : \text{Atom} \rightarrow \{1, 0\}$$

の定義域を論理式全体に拡張したい!

定義

論理式の全体を  $\text{Fml}$  で表す.

(再掲)  $P$  か  $Q$  の真理値表

| $P$ | $Q$ | $P \text{ か } Q$ |
|-----|-----|------------------|
| T   | T   | T                |
| T   | F   | F                |
| F   | T   | F                |
| F   | F   | F                |

↑  
ここに文対応する  
ところまで拡張

## 真偽の形式化(3/5): 定義の拡張(2)

### 定理

任意の真理値割り当て  $\models$  に対し, 次をみたす関数

$\models^* : \text{Fml} \rightarrow \{1, 0\}$  が 唯一 存在する. 以降,  $\models^*$  と  $\models$  を同一視する.

・ 全ての原子論理式  $p \in \text{Atom}$  に対して,  $\models^*(p) = \models(p)$ .

・ 論理式  $\varphi, \psi$  に対して,

$$\cdot \models^*(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff \models^*(\varphi) = 1 \text{ かつ } \models^*(\psi) = 1.$$

$$\cdot \models^*(\varphi \vee \psi) = 1 \iff \models^*(\varphi) = 1 \text{ または } \models^*(\psi) = 1.$$

$$\cdot \models^*(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \iff \models^*(\varphi) = 1 \text{ ならば } \models^*(\psi) = 1.$$

$$\cdot \models^*(\neg \varphi) = 1 \iff \models^*(\varphi) \neq 1 \text{ (i.e. } \models^*(\varphi) = 0 \text{)}$$

## 真偽の形式化(4/5) : お気持ち

・各真理値割り当ては、真理値表の各段の形式化、

・ $\mathcal{P}_0$  と  $\mathcal{P}_1$  がそれぞれ命題  $P, Q$  の形式化だとすると、

$\#(\mathcal{P}_0) = \#(\mathcal{P}_1) = 1$  となる

真理値割り当ては ココ

の形式化、

(こんな真理値割り当ては)  
無限個存在する！

(再掲)  $P$  か  $Q$  の真理値表

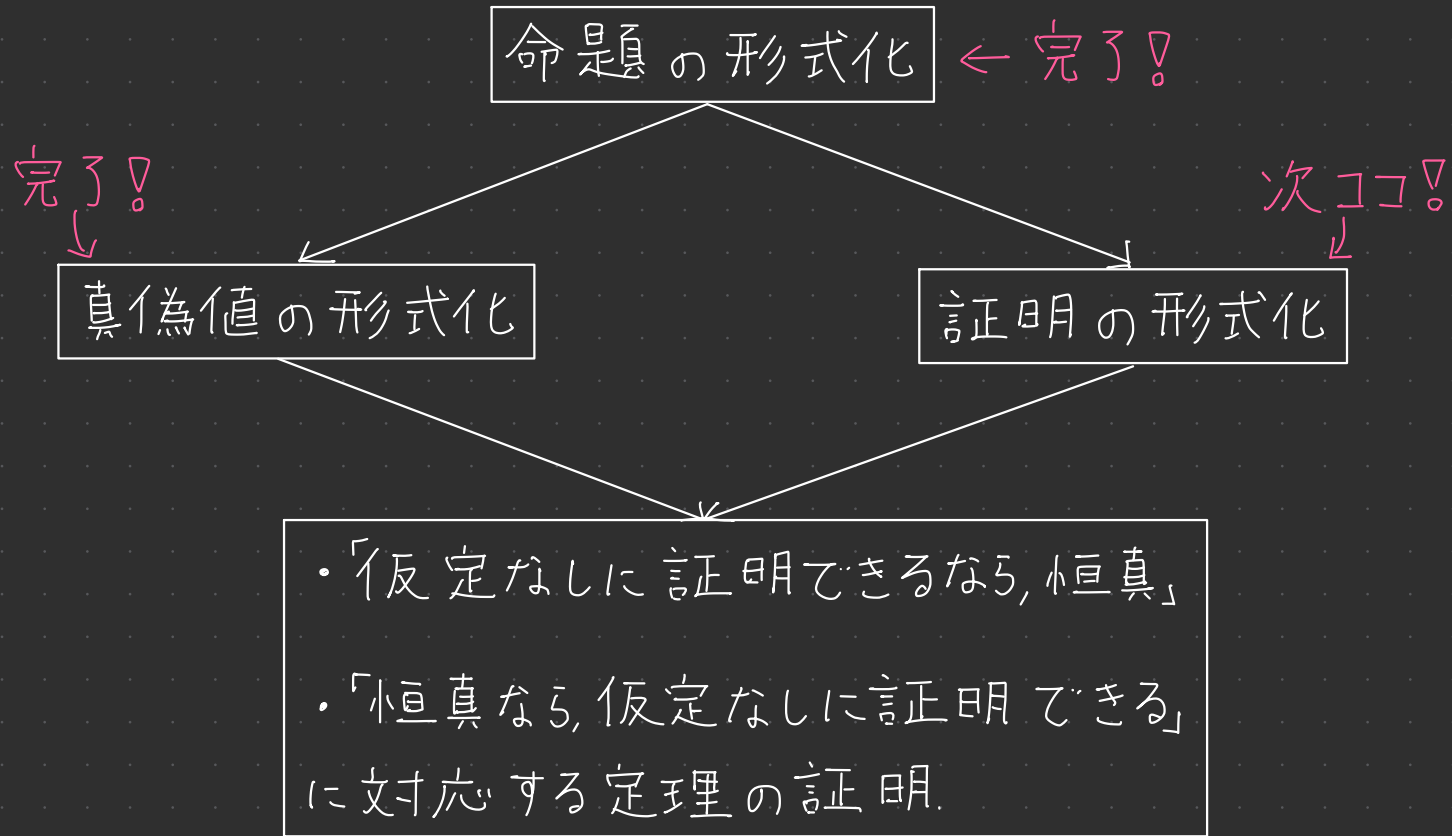
| $P$ | $Q$ | $P \text{ か } Q$ |
|-----|-----|------------------|
| T   | T   | T                |
| T   | F   | F                |
| F   | T   | F                |
| F   | F   | F                |

# 真偽の形式化(5/5) : 記号法

## 定義

- ・ 真理値割り当て  $\models$  と論理式  $\varphi$  に対して,  
$$\models \varphi \iff \models(\varphi) = 1.$$
- ・ 真理値割り当て  $\models$  と論理式の集合  $\Gamma$  に対して,  
$$\models \Gamma \iff \forall \varphi \in \Gamma (\models \varphi).$$
- ・ 論理式の集合  $\Gamma$  と論理式  $\varphi$  に対して,  
$$\Gamma \models \varphi \iff \forall \models : \text{真理値割り当て} (\models \Gamma \Rightarrow \models \varphi).$$
- ・  $\Gamma = \emptyset$  のとき,  $\emptyset \models \varphi$  を  $\models \varphi$  と書く.
- ・  $\models \varphi \iff \forall \models : \text{真理値割り当て} (\models \models \varphi)$   
 $\rightsquigarrow$  恒真命題の形式化!

再掲：いまからすること



# 証明の形式化 (1/11)

- ・再掲：証明とは、「これは認める」という命題から出発し、  
「自明な」推論を繰り返して、目的の命題に辿り着く作業。

## 定義(証明木)

$\Gamma$  を論理式の集合,  $\varphi$  を論理式とする.

$\Gamma$  を仮定に持つ  $\varphi$  の証明とは,

- ・葉が  $\Gamma$  の要素から閉じた仮定 (後述)

- ・辺が推論規則 (後述) ← 自明な推論の

- ・根が  $\varphi$

なる有限木のこと.

形式化.

# 証明の形式化 (2/11) : 推論規則

- ・どんな推論規則を採用するかは、複数考えられる。
- ・ここでは、<sup>みね</sup> <sup>しま</sup> <sup>こう</sup> <sup>じ</sup> 峯島宏次『一歩ずつマスターする 論理学入門』に拠る。

## 定義(推論規則)

$\varphi$  と  $\psi$  を論理式とする。

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I), \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge E_l), \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge E_r)$$

- ・ I は Introduction.
- ・ E は Elimination.

# 証明の形式化 (3/11) : 推論規則

定義(推論規則, 続き)

$\varphi$  と  $\psi$ ,  $\theta$  を論理式とする

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_l),$$

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_r),$$

$$\frac{\begin{array}{cc} [\varphi]^n & [\psi]^n \\ \vdots & \vdots \\ \varphi \vee \psi & \theta \end{array}}{\theta} (\vee E, n)$$

・  $(\vee E, n)$  の  $[\varphi]^n$  と  $[\psi]^n$  は,

$\theta$  を導く証明木の葉に  $\varphi$  や  $\psi$  があれば, それを「閉じて」,  
1つ仮定として扱わない。

ということ。

・ 「閉じた仮定」という。

↑  
なくてもいいし, 複数個でもいい。  
複数個あれば, 全部閉じる。

# 証明の形式化 (4/11): 推論規則

定義 (推論規則, 続き)

$\varphi$  と  $\psi$  を論理式とする.

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I, n)$$

$$\frac{\varphi, \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow E)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \varphi} (\neg I, n)$$

$$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} (\neg E)$$

# 証明の形式化 (5/11) : 推論規則

定義 (推論規則, 続き)

$\varphi$  を論理式とする

$$\frac{\perp}{\varphi} \text{ (Exp)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg \varphi]^n \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi} \text{ (RAA, n)}$$

・ Exp は爆発律 (Explosion).

・ 「矛盾からは何でも導いて良い」の形式化.

・ RAA は背理法 (Reductio ad absurdum) の形式化.

# 証明の形式化 (6/11) : まとめ

## 定義 (証明木, 一部再掲)

$\Gamma$ : 論理式の集合,  $\varphi$ : 論理式

$\Gamma$  を仮定に持つ  $\varphi$  の証明木とは,

・ 葉が  $\Gamma$  の要素か閉じた仮定

・ 辺が推論規則

・ 根が  $\varphi$

なる有限木のこと.

$\Gamma$  を仮定に持つ  $\varphi$  の証明木が存在するとき,  $\Gamma \vdash \varphi$  と書く.

$\Gamma = \emptyset$  のときは  $\vdash \varphi$  と書く

## 推論規則のリスト

$\varphi, \psi, \theta$ : 論理式

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I), \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge E_L), \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge E_R)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_L), \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_R), \quad \frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \vdots \\ \varphi \vee \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^n \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\psi} (\vee E, n)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \vdots \\ \varphi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I, n) \quad \frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow E)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \varphi} (\neg I, n) \quad \frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} (\neg E)$$

$$\frac{\perp}{\varphi} (EX \wp) \quad \frac{\begin{array}{c} [\neg \varphi]^n \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi} (RAA, n)$$

## 証明の形式化 (7/11): 例

・  $\vdash \neg \varphi \vee \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$  の証明木を作ってみる.

### 考え方

1.  $\neg \varphi \vee \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$  を推論したいので, 証明木は

$$\frac{\frac{\frac{[\neg \varphi \vee \varphi]'}{\vdots}}{\varphi \rightarrow \varphi}}{\neg \varphi \vee \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)} (\rightarrow I, 1)$$


2.  $\Box \Box$  (i.e.  $\neg \varphi \vee \varphi \vdash \varphi \rightarrow \varphi$ ) を考える

## 証明の形式化 (7/11): 例

- ・  $\vdash \neg \varphi \vee \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$  の証明木を作ってみる.

### 考え方

1.  $\neg \varphi \vee \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$  を推論したいので, 証明木は

$$\frac{\frac{\left\{ \begin{array}{c} \frac{[\neg \varphi \vee \varphi]'}{\vdots} \\ \hline \varphi \rightarrow \varphi \end{array} \right\}}{\neg \varphi \vee \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)} (\rightarrow I, 1)}{\vdash \neg \varphi \vee \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)}$$

2.  $\exists \exists$  (i.e.  $\neg \varphi \vee \varphi \vdash \varphi \rightarrow \varphi$ ) を考える

# 証明の形式化 (8/11): 例

考え方(続き)

2.  $\neg \varphi \vee \varphi \vdash \varphi \rightarrow \varphi$  の証明木を作る

$\varphi \rightarrow \varphi$  を導きたいので, この証明木は

$$\frac{\frac{\neg \varphi \vee \varphi \quad [\varphi]^2}{\vdots} \quad \varphi}{\varphi \rightarrow \varphi} (\rightarrow I, 2)$$


3.  $\exists \exists$  (i.e.  $\neg \varphi \vee \varphi, \varphi \vdash \varphi$ ) を考える

全体図

$$\frac{\frac{\frac{[\neg \varphi \vee \varphi]^1 \quad [\varphi]^2}{\vdots} \quad \varphi}{\varphi \rightarrow \varphi}}{\neg \varphi \vee \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)} (\rightarrow I, 1)$$

# 証明の形式化 (8/11): 例

考え方 (続き)

2.  $\neg \varphi \vee \varphi \vdash \varphi \rightarrow \varphi$  の証明木を作る

$\varphi \rightarrow \varphi$  を導きたいので, この証明木は

$$\frac{\frac{\neg \varphi \vee \varphi \quad [\varphi]^2}{\vdots} \quad \varphi}{\varphi \rightarrow \varphi} (\rightarrow I, 2)$$

3.  $\exists \exists$  (i.e.  $\neg \varphi \vee \varphi, \varphi \vdash \varphi$ ) を考える

全体図

$$\frac{\frac{\frac{[\neg \varphi \vee \varphi]^1 \quad [\varphi]^2}{\vdots} \quad \varphi}{\varphi \rightarrow \varphi}}{\neg \varphi \vee \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)} (\rightarrow I, 1)$$

# 証明の形式化 (9/11): 例

考え方(続き)

3.  $\neg\varphi \vee \varphi, \varphi \vdash \varphi$  の証明木を作る.

仮定に  $\neg\varphi \vee \varphi$  があるので,  $(\vee E)$  が使える.

$$\frac{\neg\varphi \vee \varphi \left\{ \begin{array}{l} \frac{[\neg\varphi]^3 \quad \varphi}{\vdots} \\ \varphi \end{array} \right. \quad [\varphi]^3}{\varphi} (\vee E, 3)$$

4.  $\Box\Box$  (i.e.  $\neg\varphi, \varphi \vdash \varphi$ ) を考える

全体図

$$\frac{\frac{\frac{[\neg\varphi]^3 \quad [\varphi]^2}{\vdots} \quad \varphi \quad [\varphi]}{[\neg\varphi \vee \varphi]^1} (\vee E, 3)}{\varphi \rightarrow \varphi} (\rightarrow I, 2)$$
$$\frac{\varphi \rightarrow \varphi}{\neg\varphi \vee \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)} (\rightarrow I, 1)$$

# 証明の形式化 (9/11): 例

考え方(続き)

3.  $\neg\varphi \vee \varphi, \varphi \vdash \varphi$  の証明木を作る.

仮定に  $\neg\varphi \vee \varphi$  があるので,  $(\vee E)$  が使える.

$$\frac{\neg\varphi \vee \varphi \left\{ \begin{array}{l} \frac{[\neg\varphi]^1 \quad \varphi}{\vdots} \\ \frac{\varphi \quad [\varphi]^1}{\varphi} \end{array} \right.}{\varphi} (\vee E, 1)$$

4.  $\Box\Box$  (i.e.  $\neg\varphi, \varphi \vdash \varphi$ ) を考える.

全体図

$$\frac{\frac{\frac{[\neg\varphi]^3 \quad [\varphi]^2}{\vdots} \quad \frac{[\neg\varphi \vee \varphi]^1 \quad \varphi \quad [\varphi]}{(\vee E, 3)}}{\varphi \rightarrow \varphi} (\rightarrow I, 2)}{\neg\varphi \vee \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)} (\rightarrow I, 1)$$

# 証明の形式化 (10/11): 例

## 考え方(続き)

4.  $\neg \varphi$ ,  $\varphi \vdash \psi$  を作る.

・仮定から  $(\neg E)$  が使える.

・(Exp) により,  $\perp$  から  $\psi$  が導ける.

$$\frac{\neg \varphi \quad \varphi}{\perp} (\neg E)$$
$$\frac{\perp}{\psi} (Exp)$$

## 全体図

$$\frac{\frac{\frac{[\neg \varphi]^3 \quad [\varphi]^2}{\perp} (\neg E)}{[\neg \varphi \vee \psi]^1} (Exp)}{\frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I, 2)} (\vee E, 3)$$
$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\neg \varphi \vee \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} (\rightarrow I, 1)$$

## 証明の形式化 (11/11): 例

・ 完成 ~~~!

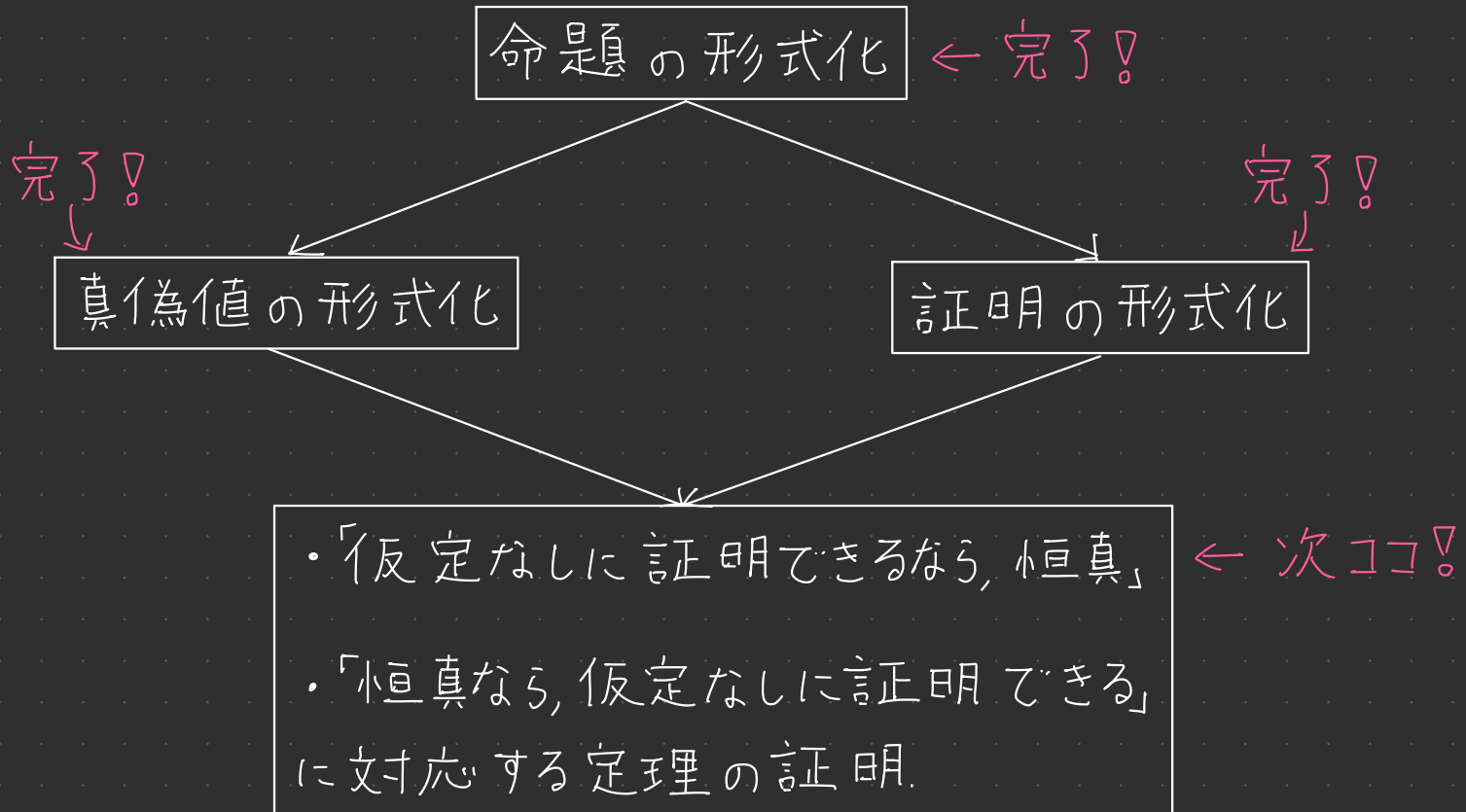
$$\frac{\frac{\frac{[\neg \varphi]^3 \quad [\varphi]^2}{\perp} (\neg E)}{\psi} (Exp) \quad [\varphi]^3}{\psi} (\vee E, 3)$$
$$\frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I, 2)$$
$$\frac{}{\neg \varphi \vee \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} (\rightarrow I, 1)$$

演習 (難)

$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg \varphi \vee \psi$  の証明木を描け.

解答例は付録に

再掲：いまからすること



## 定義のおさらい (1/2)

定義 (真理値割り当て, 再掲)

$\models$ : 真理値割り当て,  $\varphi$ : 論理式,  $\Gamma$ : 論理式の集合

$$\cdot \models \varphi : \Leftrightarrow \models(\varphi) = 1.$$

$$\cdot \models \Gamma : \Leftrightarrow \forall \varphi \in \Gamma (\models \varphi).$$

$$\cdot \Gamma \models \varphi : \Leftrightarrow \forall \models: \text{真理値割り当て} (\models \Gamma \Rightarrow \models \varphi).$$

## 定義のおさらい (2/2)

### 定義(証明, 再掲)

$\Gamma$ : 論理式の集合,  $\varphi$ : 論理式

$\Gamma$  を仮定に持つ  $\varphi$  の証明とは,

・ 葉が  $\Gamma$  の要素か閉じた仮定

・ 辺が推論規則

・ 根が  $\varphi$

なる有限木のこと.

$\Gamma$  を仮定に持つ  $\varphi$  の証明が存在するとき,  $\Gamma \vdash \varphi$  と書く.

$\Gamma = \emptyset$  のときは  $\vdash \varphi$  と書く

### 推論規則のリスト

$\varphi, \psi, \theta$ : 論理式

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I), \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge E_L), \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge E_R)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_L), \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_R), \quad \frac{[\varphi]^n \quad [\psi]^n}{\varphi \vee \psi \quad \theta} (\vee E, n)$$

$$\frac{[\varphi]^n}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I, n) \quad \frac{\varphi, \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow E)$$

$$\frac{[\varphi]^n}{\frac{\perp}{\neg \varphi}} (\neg I, n) \quad \frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} (\neg E)$$

$$\frac{\perp}{\varphi} (EX_P) \quad \frac{[\neg \varphi]^n}{\perp} (\neg \varphi)^n, \quad \frac{\perp}{\varphi} (RAA, n)$$

# 健全性定理

## 定理 (健全性定理)

任意の論理式の集合  $\Gamma$  と任意の論理式  $\varphi$  について、  
 $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

## 系

任意の論理式  $\varphi$  に対して  
 $\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$

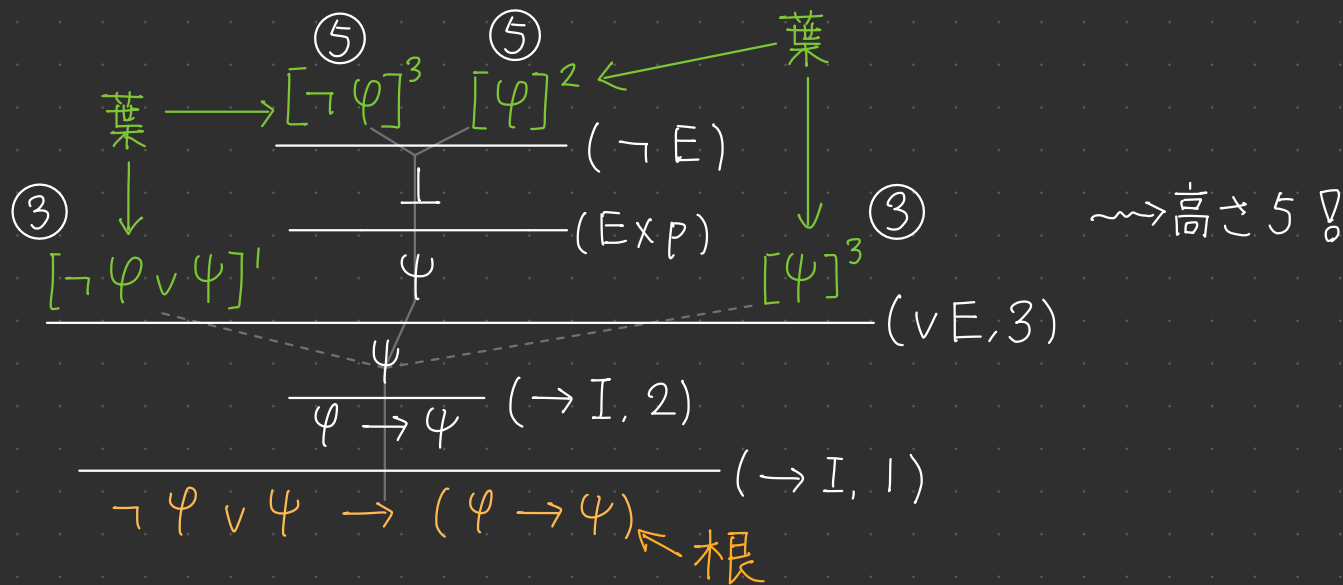
$\Gamma = \emptyset$  の場合



・「仮定なしで証明できるなら、いつでも正しい」の形式化

# 健全性定理の証明 (1/6)

- ・言証明木の根から葉までの経路で最長のものの長さを、  
証明木の 高さ という。

 $\vdash \neg \varphi \vee \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$  の証明木の場合

## 健全性定理の証明 (2/6)

- ・ 証明木の高さに関する累積帰納法で示す

累積帰納法とは —

$P(x)$  を自然数についての条件とする.

このとき,

- ・  $P(1)$

- ・ すべての  $n > 1$  に対して,

(すべての  $m < n$  に対して  $P(m)$ )  $\Rightarrow P(n)$

が成立するなら,

すべての  $n$  に対して  $P(n)$  が成立する.

# 健全性定理の証明 (3/6)

目標の定理:

定理 (健全性定理)

任意の論理式の集合  $\Gamma$  と任意の論理式  $\varphi$  について,  
 $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

累積帰納法を適用する条件  $P(n)$  は

任意の論理式の集合  $\Gamma$  と任意の論理式  $\varphi$  について,  
 $\left( \begin{array}{l} \Gamma \text{ から } \varphi \text{ の高さ } n \text{ の証明木が存在する} \\ \Rightarrow \Gamma \models \varphi \end{array} \right)$

# 健全性定理の証明 (4/6)

(i) 証明木の高さが1のとき.

$\nexists \vdash \Gamma$  とする.

例えば次のような場合が考えられる. (他の場合も同様)

・  $\varphi, \psi \in \Gamma$  で証明木が

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I)$$

のとき.

$\nexists \vdash \Gamma$  より  $\nexists \vdash \varphi$  か  $\nexists \vdash \psi$ .

従って  $\nexists \vdash \varphi \wedge \psi$ .

・  $\psi \in \Gamma$  で証明木が

$$\frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I)$$

のとき.

$\nexists \vdash \Gamma$  より  $\nexists \vdash \varphi$ .

従って  $\nexists \vdash \varphi \rightarrow \psi$ .

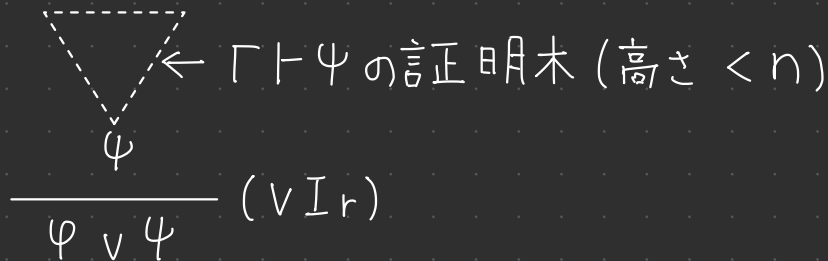
## 健全性定理の証明 (5/6)

(ii) 証明木の高さが  $n$  ( $>1$ ) のとき.

高さ  $m < n$  の証明木については, 成立しているとする.

$\nexists \vdash \Gamma$  とする.

例えば次のような場合が考えられる. (他の場合も同様)



$\Gamma \vdash \psi$  と帰納法の仮定から,  $\nexists \vdash \psi$ .

従って  $\nexists \vdash \psi \vee \psi$ .

### 演習

仮定を閉じる推論規則

$(\vee E), (\rightarrow I), (\neg I), (RAA)$

の場合について証明せよ.

## 健全性定理の証明 (b/b)

累積帰納法により,

任意の  $n \in \mathbb{N}$  と論理式の集合  $\Gamma$ , 論理式  $\varphi$  について,

$\Gamma$  から  $\varphi$  への高さ  $n$  の証明木が存在する

$$\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

が分かる.

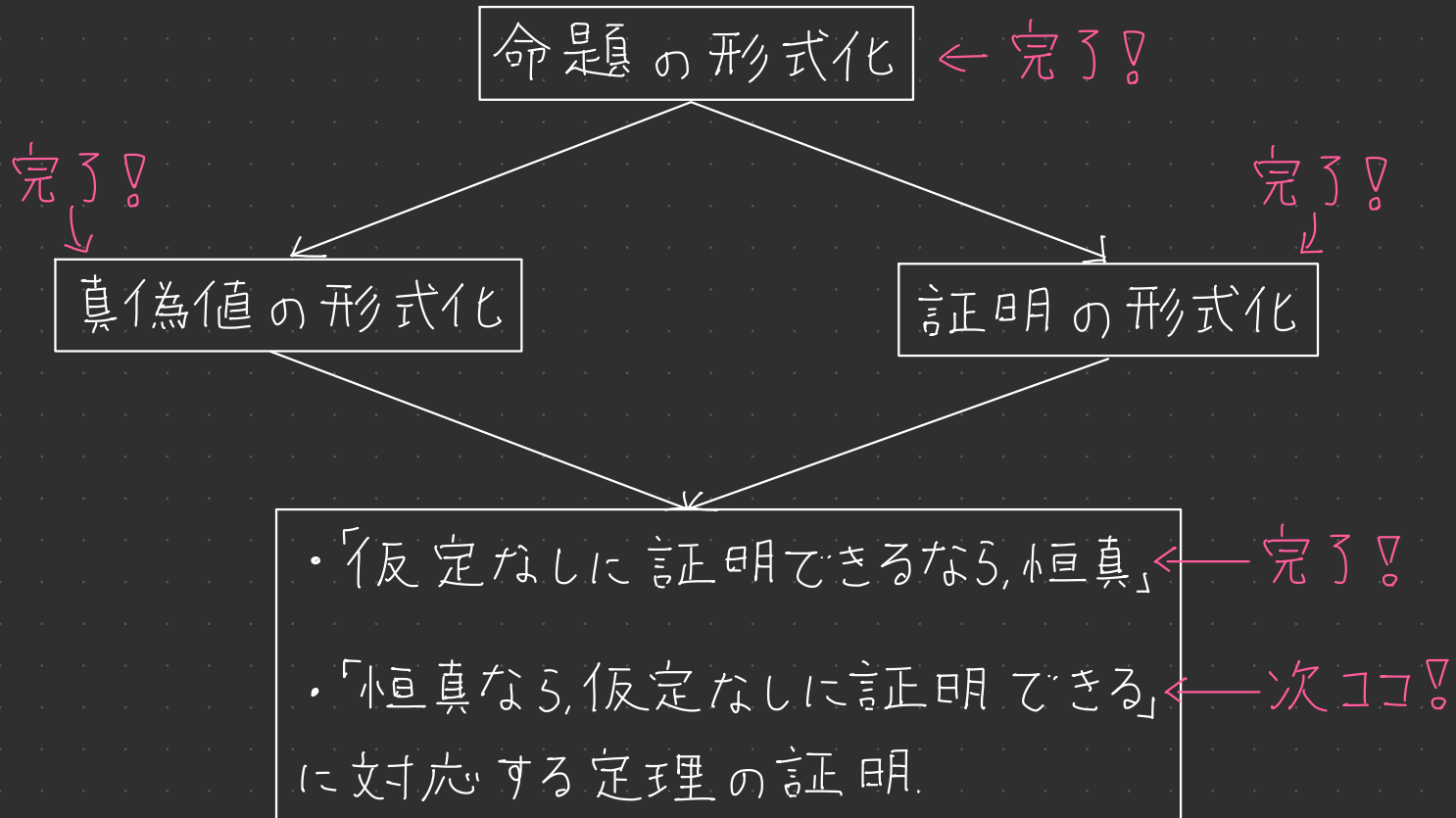
従って

任意の論理式の集合  $\Gamma$  と任意の論理式  $\varphi$  について,

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

□

再掲：いまからすること



# 完全性定理

## 定理 (完全性定理)

任意の論理式の集合  $\Gamma$  と任意の論理式  $\varphi$  について、  
 $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

## 系

任意の論理式  $\varphi$  に対して  
 $\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$

$\Gamma = \emptyset$  の場合



・「いつでも正しいなら、仮定なしで証明できる」の形式化

# 完全性定理の証明

## 定理 (完全性定理)

任意の論理式の集合  $\Gamma$  と任意の論理式  $\varphi$  について、  
 $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

・  $\Gamma \models \varphi$  から、 $\Gamma$  から  $\varphi$  の証明木を作るのは大変。

→ 対偶：

$$\Gamma \not\models \varphi \Rightarrow \Gamma \not\vdash \varphi$$

を示そう！ ↑

コレを言い換えることから始める。

# 完全性定理の証明 (1/12)

定義 (矛盾, 無矛盾)

$\Gamma$ : 論理式の集合.

・  $\Gamma$  は矛盾している  $\Leftrightarrow \Gamma \vdash \perp$ .

・  $\Gamma$  は無矛盾である  $\Leftrightarrow \Gamma \not\vdash \perp$ .

補題

$\Gamma$ : 論理式の集合,  $\varphi$ : 論理式

$\Gamma \not\vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg \varphi\}$  は無矛盾.

目標

$\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$  は無矛盾  $\Rightarrow \Gamma \not\vdash \varphi$

# 完全性定理の証明 (2/12)

定義 (再掲)

$$\cdot \varphi \models \neg \psi : \Leftrightarrow \varphi(\psi) = 0 \Leftrightarrow \varphi \not\models \psi$$

$$\cdot \Gamma \models \varphi : \Leftrightarrow \forall \varphi : \text{真理値割り当て} (\varphi \models \Gamma \Rightarrow \varphi \models \varphi)$$

補題

$$\Gamma \not\models \varphi \Leftrightarrow \exists \varphi : \text{真理値割り当て s.t. } \varphi \models \Gamma \cup \{\neg \varphi\}$$

(証明) やればできる!

目標

$$\Gamma \cup \{\neg \varphi\} \text{ は無矛盾} \Rightarrow \exists \varphi : \text{真理値割り当て s.t. } \varphi \models \Gamma \cup \{\neg \varphi\}$$

## 完全性定理の証明 (3/12)

・ 論理式は可算無限個の記号からなる有限列

→ 論理式は全部で可算無限個

・ 論理式を

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$

と並べておく

目標 (再掲)

$\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$  は 無矛盾  $\Rightarrow \exists \mathcal{A}$ : 真理値割り当て s.t.  $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\neg \varphi\}$

$\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$  が 無矛盾 とする

# 完全性定理の証明 (4/12)

$$\Gamma_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n \quad \text{---} \rightarrow \quad \not\vdash \psi \iff \psi \in \Gamma_\infty$$

$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \leftarrow \text{が無矛盾} \\ \Gamma_n \cup \{\neg \varphi_n\} \text{ 除此以外} \end{cases}$$

$$\Gamma \cup \{\neg \varphi\} \subseteq \Gamma_\infty$$

$$\Gamma_0 := \Gamma \cup \{\neg \varphi\}$$

無矛盾とする.

$$\implies \exists \not\vdash \Gamma \cup \{\neg \varphi\}$$

## 完全性定理の証明 (5/12)

論理式の集合の列  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \dots$  を次のように再帰的に定める.

$$\cdot \Gamma_0 := \Gamma \cup \{\neg \varphi\}$$

$$\cdot \Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ が無矛盾 のとき.} \\ \Gamma_n \cup \{\neg \varphi_n\} & \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ が矛盾 するとき.} \end{cases}$$

このとき, 次が成立する.

補題

任意の  $n \in \mathbb{N}$  について,  $\Gamma_n$  は無矛盾.

(証明) 数学的帰納法による.

# 完全性定理の証明 (6/12)

$$\Gamma_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n \quad \text{---} \rightarrow \quad \not\vdash \psi \iff \psi \in \Gamma_\infty$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \leftarrow \text{が無矛盾} \\ \Gamma_n \cup \{\neg \varphi_n\} \text{その他} \end{cases}$$

$$\Gamma \cup \{\neg \varphi\} \subseteq \Gamma_\infty$$

$$\Gamma_0 = \begin{matrix} \nearrow \\ \Gamma \cup \{\neg \varphi\} \end{matrix}$$

無矛盾とする.

$$\implies \exists \not\vdash \Gamma \cup \{\neg \varphi\}$$

# 完全性定理の証明 (7/12)

・  $\Gamma_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$  と定める.

## 補題

1.  $\Gamma_\infty$  は無矛盾である.
2. 任意の論理式  $\psi$  について,  $\Gamma_\infty \vdash \psi \iff \psi \in \Gamma_\infty$ .
3. 従って特に,  $\perp \notin \Gamma_\infty$ .
4. 論理式  $\psi, \theta$  に対して,
  - ・  $\psi \wedge \theta \in \Gamma_\infty \iff \psi \in \Gamma_\infty \text{ かつ } \theta \in \Gamma_\infty$ .
  - ・  $\psi \vee \theta \in \Gamma_\infty \iff \psi \in \Gamma_\infty \text{ または } \theta \in \Gamma_\infty$ .
  - ・  $\psi \rightarrow \theta \in \Gamma_\infty \iff \psi \in \Gamma_\infty \text{ ならば } \theta \in \Gamma_\infty$ .
  - ・  $\neg \psi \in \Gamma_\infty \iff \psi \notin \Gamma_\infty$ .

# 完全性定理の証明 (8/12)

$$\Gamma_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

$$\nexists \models \psi \iff \psi \in \Gamma_\infty$$

$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\psi_n\} \leftarrow \text{が無矛盾} \\ \Gamma_n \cup \{\neg \psi_n\} \text{その他} \end{cases}$$

$$\Gamma \cup \{\neg \psi\} \subseteq \Gamma_\infty$$

$$\Gamma_0 := \begin{matrix} \nearrow \\ \Gamma \cup \{\neg \psi\} \end{matrix}$$

無矛盾とする.

$$\implies \exists \models \Gamma \cup \{\neg \psi\}$$

# 完全性定理の証明 (9/12)

関数  $\models : A+m \rightarrow \{0, 1\}$  を次のように定める.

$$\models(p) := \begin{cases} 1 & p \in \Gamma_\infty \\ 0 & p \notin \Gamma_\infty \end{cases}$$

補題

$\models$  は真理値割り当てである.

(証明) 前の補題 3. と 4. の  $\neg$  の場合による.

$\models$  の定義域を Fml に拡張した関数  $\models^*$  と  $\models$  を同一視する.

補題

任意の論理式  $\psi$  に対して,

$$\models \vdash \psi \iff \psi \in \Gamma_\infty$$

(証明)

2つ前の補題の 4. より.  $\square$ .

# 完全性定理の証明 (9/12)

$$\Gamma_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n \quad \text{---} \rightarrow \quad \nexists \models \psi \iff \psi \in \Gamma_\infty$$

$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \leftarrow \text{が無矛盾} \\ \Gamma_n \cup \{\neg \varphi_n\} \text{ それ以外.} \end{cases}$$

$$\Gamma \cup \{\neg \varphi\} \subseteq \Gamma_\infty$$

$$\Gamma_0 := \begin{matrix} \nearrow \\ \Gamma \cup \{\neg \varphi\} \end{matrix}$$

無矛盾とする.

$$\implies \exists \not\models \Gamma \cup \{\neg \varphi\}$$

# 完全性定理の証明 (11/12)

$$\Gamma \cup \{\neg \varphi\} = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_n \subseteq \dots \subseteq \Gamma_\infty$$

なので, 任意の論理式  $\varphi$  に対して

$$\varphi \in \Gamma \cup \{\neg \varphi\} \Rightarrow \varphi \in \Gamma_\infty \Leftrightarrow \not\vdash \varphi$$

従って  $\not\vdash \Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ .

以上より,

$\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$  は無矛盾.

$\Rightarrow \exists \models$ : 真理値割り当て s.t.  $\models \Gamma \cup \{\neg \varphi\}$

すなわち

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

□.

# 完全性定理の証明 (12/12)

$$\Gamma_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n \quad \text{---} \rightarrow \quad \nexists \models \psi \iff \psi \in \Gamma_\infty$$

$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \leftarrow \text{が無矛盾} \\ \Gamma_n \cup \{\neg \varphi_n\} \text{ 以外} \end{cases}$$

$$\Gamma \cup \{\neg \varphi\} \subseteq \Gamma_\infty$$

$$\Gamma_0 := \begin{matrix} \nearrow \\ \Gamma \cup \{\neg \varphi\} \end{matrix}$$

無矛盾とする.

$$\implies \exists \nexists \models \Gamma \cup \{\neg \varphi\}$$

## まとめ

### 定理

任意の論理式の集合  $\Gamma$  と任意の論理式  $\varphi$  について、  
 $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi$

### 系

任意の論理式  $\varphi$  について、  
 $\vdash \varphi \iff \models \varphi$

「反定なしに証明できる命題は、恒真命題に一致」  
に対応する定理が成立！

# 附錄

「ありの定理の気持ち

## 「あり」の定理の気持ち (1/6)

系

任意の論理式  $\varphi$  について、  
 $\vdash \varphi \iff \models \varphi$

この系は「仮定なしに証明できる  $\iff$  恒真」の形式化.

じゃあ、我々が証明したこれ $\hookrightarrow$ は?

定理

任意の論理式の集合  $\Gamma$  と任意の論理式  $\varphi$  について、  
 $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi$

## 「ありの定理の気持ち (2/6)」

「推論」に注目してみる.

推論とは… 仮定から、何かしらの結論を得ること.

- ・ 仮定となる命題は複数個あって良い.
- ・ 結論となる命題は 1つ.

例

仮定 :  $\triangle ABC$  は正三角形である.

結論 :  $\triangle ABC$  は二等辺三角形である.

# 「あり」の定理の気持ち (3/6)

先程の例

例

仮定 :  $\triangle ABC$  は正三角形である.

結論 :  $\triangle ABC$  は二等辺三角形である.

は「正しい」推論である.

正しい推論は, 「妥当な」推論と呼ばれる.

では, 推論が妥当か否かを判断する基準は何か?

## 「ありの定理」の気持ち (4/6)

・妥当な推論 … 仮定が全て真なら、結論も必ず真になる推論.

例

仮定 :  $\triangle ABC$  は正三角形である.

結論 :  $\triangle ABC$  は二等辺三角形である.

・妥当でない推論 … 仮定が全て真でも、結論が真とは限らない推論

例

仮定 :  $\triangle ABC$  は二等辺三角形である.

結論 :  $\triangle ABC$  は正三角形である.



二等辺だが  
正でない.

## 「あり」の定理の気持ち (5/6)

妥当な推論 ... 仮定が全て真なら、結論も必ず真になる推論.

定義 (再掲)

$$\vdash \varphi : \iff \forall \varphi : \text{真理値割り当て} (\not\vdash \varphi \Rightarrow \not\vdash \varphi)$$

$\rightsquigarrow \vdash \varphi$  は妥当な推論の形式化!

## 「あり」の定理の気持ち (6/6)

$\Gamma \vdash \varphi$  が妥当な推論の形式化ということは...

定理

任意の論理式の集合  $\Gamma$  と任意の論理式  $\varphi$  について、  
 $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi$

↖  
これは、

- ・ 自明な推論の組み合わせで得られる推論は妥当、
- ・ 妥当な推論は自明な推論の組み合わせで得られる  
の形式化！

## 参考文献

・<sup>みね</sup>嶋<sup>しま</sup>宏<sup>こう</sup>次<sup>じ</sup>『一歩ずつマスターする 論理学入門』

2025年, 慶應義塾大学出版会株式会社

この先の話①

## 他の証明の形式化 (1/5)

今回紹介した証明の形式化は、「自然演繹」と呼ばれる。

自然演繹にはいくつかの弱点がある。

1. 健全性定理では、証明木の高さについての帰納法を用いたが、推論規則が沢山あるせいで大変だった

2. 完全性定理では、 $\Gamma \vdash \varphi$  から  $\Gamma \models \varphi$  の証明木が具体的に得られた言尺ではない

- ・「非構成的な証明」という

- ・原因は対偶を用いたこと

## 他の証明の形式化 (2/5)

1. 帰納法を楽に回したい!

「ヒルベルト流証明体系」と呼ばれる体系を紹介する.

定義 (ヒルベルト流の証明)

$\Gamma$  を仮定とする  $\varphi$  のヒルベルト流の証明木とは,

- ・ 葉が論理公理 (後述) か  $\Gamma$  の要素
- ・ 辺が  $(\rightarrow E)$  ... *Modus Ponens (MP)* と呼ばれる
- ・ 根が  $\varphi$

なる木のこと.

(大抵は有限列として定義される.)

## 他の証明の形式化 (3/5)

### 定義(論理公理)

$\varphi, \psi, \theta$  を論理式 のとき, 次を論理公理という.

- $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
- $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta)).$
- $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi, \quad \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi.$
- $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$
- $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi, \quad \psi \rightarrow \varphi \vee \psi.$
- $(\varphi \rightarrow \theta) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \theta) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \theta))$
- $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow \neg \varphi)$
- $\perp \rightarrow \varphi, \quad \varphi \wedge \neg \varphi \rightarrow \perp$
- $\varphi \vee \neg \varphi.$

## 他の証明の形式化 (4/5)

ヒルベルト流のうれしさ:

- ・推論規則が ( $\rightarrow E$ ) のみなので、帰納法が回しやすい。

ヒルベルト流の弱点:

- ・証明木を書くのが難しい。
  - ・  $\varphi \rightarrow \varphi$  の証明木すら直観的な方法で見つけれない
- ・自然演繹と同様、完全性定理の証明で  $\Gamma \vdash \varphi$  から  $\Gamma \vdash \varphi$  の証明木を具体的に構成するのが難しい。

## 他の証明の形式化 (5/5)

2. 完全性定理で,  $\Gamma \vdash \varphi$  から  $\Gamma \models \varphi$  の証明木を構成したい!

「シーケント計算」と呼ばれる体形を紹介... したかった...

参考文献

- ・ <sup>ベッキ</sup>戸次 <sup>タスケ</sup>大介, 『数理論理学』, 2012年, 東京大学出版会.

この先の話②

# 非古典命題論理 (1/6)

今回は、「かつ」「または」「ならば」「でない」に注目して形式化した体系を扱った。

そのような体系の内、今回扱った体系と同等の推論能力を持つ体系を「古典命題論理」と呼ぶ。

そうでない体系も沢山あり、それらを「非古典命題論理」と総称する。

非古典命題論理をいくつか紹介する。

まずはごめんなさい。

- ・ 導入のしやすさを重視したので、一般的でない定式化になっています。
- ・ 哲学的側面も面白い言語題ですが、不勉強のため紹介できません...

# 非古典命題論理 (2/6)

## 古典命題論理の推論規則

$\varphi, \psi, \theta$  : 論理式

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge I), \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge E_L), \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge E_R)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_L), \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee I_R), \quad \frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \quad [\psi]^n \\ \vdots \\ \varphi \vee \psi \quad \theta \end{array}}{\theta} (\vee E, n)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \vdots \\ \varphi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I, n) \quad \frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow E)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \varphi} (\neg I, n) \quad \frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} (\neg E)$$

$$\frac{\perp}{\varphi} (Exp) \quad \frac{\begin{array}{c} [\neg \varphi]^n \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi} (RAA, n)$$

(Exp) と (RAA) 以外の規則  
からなる体系 (と同等のもの) を  
「最小論理」と呼ぶ。

(RAA) 以外の規則 からなる体系  
(と同等のもの) を「直観主義論理」  
と呼ぶ。

# 非古典命題論理 (3/6)

数学における推論だけではなく、より日常的な推論を考えてみる。

古典命題論理では、命題  $P$  に対して

- ・  $P$  は必ず真である。
- ・  $P$  は真であると信じている
- ・  $P$  はこの先ずっと真である。

などといったことを形式的に表現できない。

→  $\Box$  という新しい論理演算子を入れて表現しよう!

「様相命題論理」

# 非古典命題論理 (4/6)

## 定義 (様相命題論理の論理式)

1.  $p_0, p_1, p_2, \dots, \perp$  は論理式である。

これらを原子論理式という。

2.  $\varphi$  と  $\psi$  が論理式の時、

$(\varphi) \wedge (\psi), (\varphi) \vee (\psi), (\varphi) \rightarrow (\psi), \neg(\varphi), \underline{\Box(\varphi)}$

は論理式である。

3. 1. と 2. で作られる記号列のみが論理式である。

$\Box$  は直後の論理式にのみ作用するとして、混乱の無い範囲で省略する。

# 非古典命題論理 (5/6)

様相論理は,  $\Box(\varphi)$  で何を表したいかによって, 公理や推論規則が変わる

代表的な例として,  $K$  と呼ばれる様相論理を紹介する

定義 ( $K$  の証明)

$K$  における  $\varphi$  の証明木とは,

- ・ 葉が様相論理の論理式についての論理公理
  - ・ 辺が  $(\rightarrow E)$  か  $(NEC)$  と  $K$  公理:  $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
  - ・ 根が  $\varphi$
- なる木のこと.

$$\frac{\varphi}{\Box\varphi} (NEC)$$

# 非古典命題論理 (6/6)

参考文献:

・ 笑西 琢朗, 『論理学』, 2021年, 昭和堂

・ 菊池 誠 (編),

『数学における言証明と真理 様相論理と数学基礎論』

2016年, 共立出版株式会社

この先の話③

# 述語論理

今回は、「かつ」「または」「ならば」「でない」に注目した。

数学には、これらに加えて「任意の～に対して」や「ある～が存在して」も用いる。(これらは「量化」と呼ばれる)。

それらも含めて形式化した体系が「述語論理」。

・ 量化は、「要素に対する 量化」「部分集合に対する 量化」,... という階層がある。

・ 「要素に対する 量化」を扱う体系が「一階述語論理」。

# 述語論理

「一階古典述語論理」を紹介する... いくつか... ね...



数理論理学について.

# 再掲：どんな分野の話？

・分野名：数理論理学, 数学基礎論.

・何する分野？：人間の数学での営みの数学的なモデルを作り,  
それを分析することで, 人間の数学での営みについて  
示唆を得ようとする分野.

・人間の数学での営み：推論, 証明, 計算, ...

数学と哲学の  
両方に関連！

|   |    |                                   |
|---|----|-----------------------------------|
| { | 哲学 | → 1. 人間の数学での営みを分析                 |
|   | 数学 | → 2. 1. を元にその数学的モデルを作り, それを分析     |
|   | 哲学 | → 3. 1. と 2. から, 数学での営みについて示唆を得る. |

# 推論, 証明, 計算を考察する小分野

考察対象

分野名

・推論

論理学

・証明

証明の構造を分析したり,

・証明論

証明可能性を分析したり,

・不完全性定理, 公理的集合論

・計算

計算論

計算に必要なリソースを分析したり,

・計算複雑性理論

計算可能性を分析したり,

・計算可能性理論

## それ以外の小分野

「人間の数学での営みを形式化して分析しよう!」以外の動機を持つ分野もある.

- ・モデル理論 ... 群や環のような「構造」の一般的性質を分析する.
- ・公理的集合論 ... 「集合に対して認められる原理たち」を用いて無限集合を分析する.  $\hookrightarrow$  ZFC とか.
- ・逆数学 ... 数学ではいくつかの認められる原理から、定理を作る.  
逆に、「特定の定理を証明するために必要な原理は何か?」を分析する.

etc...

# 補題の証明

## 定理

任意の真理値割り当て  $\models$  に対し、次をみたす関数  $\models^* : \text{Fmdl} \rightarrow \{1, 0\}$  が唯一つ存在する。

・全ての原子論理式  $p \in \text{Atom}$  に対して、 $\models^*(p) = \models(p)$ 。

・論理式  $\varphi, \psi$  に対して、

$$\cdot \models^*(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff \models^*(\varphi) = 1 \text{ かつ } \models^*(\psi) = 1.$$

$$\cdot \models^*(\varphi \vee \psi) = 1 \iff \models^*(\varphi) = 1 \text{ または } \models^*(\psi) = 1.$$

$$\cdot \models^*(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \iff \models^*(\varphi) = 1 \text{ ならば } \models^*(\psi) = 1.$$

$$\cdot \models^*(\neg \varphi) = 1 \iff \models^*(\varphi) = 1 \text{ でない. (i.e. } \models^*(\varphi) = 0)$$

(証明)

真理値割り当て  $\models$  を任意に取る.

(1)  $\models^*$  の構成

$\models^*$  を次のように再帰的に定義する.

・全ての原子論理式  $p \in \text{Atom}$  に対して,  $\models^*(p) := \models(p)$ .

・論理式  $\varphi, \psi$  に対して,

$$\cdot \models^*(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff \models^*(\varphi) = 1 \text{ かつ } \models^*(\psi) = 1.$$

$$\cdot \models^*(\varphi \vee \psi) = 1 \iff \models^*(\varphi) = 1 \text{ または } \models^*(\psi) = 1.$$

$$\cdot \models^*(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \iff \models^*(\varphi) = 1 \text{ ならば } \models^*(\psi) = 1.$$

$$\cdot \models^*(\neg \varphi) = 1 \iff \models^*(\varphi) \neq 1 \text{ (i.e. } \models^*(\varphi) = 0 \text{)}$$

$\models^*$  は明らかに条件をみたす.

(2)  $\#^*$  の一意性.

$\#$  に対して条件をみたす関数  $\#_0, \#_1$  を取る.

$\#_0 = \#_1$ , すなわち全ての論理式  $\varphi$  について

$$\#_0(\varphi) = \#_1(\varphi)$$

となることを, 論理式の構成に関する帰納法で示す.

(Base)

$\varphi$  が原子論理式の時.

条件より  $\#_0(\varphi) = \#(\varphi) = \#_1(\varphi)$  なので良い.

(Induction)

・  $\varphi \equiv \psi \wedge \theta$  のとき.

$\#_0^*$  の条件から,

$$\#_0^*(\varphi) = 1 \iff \#_0^*(\psi) = 1 \text{ かつ } \#_0^*(\theta) = 1$$

帰系内法の仮定から

$$\iff \#_1^*(\psi) = 1 \text{ かつ } \#_1^*(\theta) = 1$$

$\#_1^*$  の条件から,

$$\iff \#_1^*(\varphi) = 1.$$

従って  $\#_0^*(\varphi) = 1 \iff \#_1^*(\varphi) = 1.$

故に  $\#_0^*(\varphi) = \#_1^*(\varphi).$

・  $\vee, \rightarrow, \neg$  のときも同様.  $\square$

## 補題

$\Gamma$ : 論理式の集合,  $\varphi$ : 論理式

$\Gamma \not\vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  は無矛盾.

(証明)

対偶:

$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  は矛盾する.

を示す.

( $\Leftarrow$ )

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  が矛盾するなら,  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$ .

その証明図の根に (RAA) を適用すると  $\Gamma \vdash \varphi$  の証明図になる.

( $\Rightarrow$ )

$\Gamma \vdash \varphi$  とする. この証明図の根に ( $\neg E$ ) を適用すると,

$\Gamma \cup \{\neg \varphi\} \vdash \perp$  の証明図が得られる.

従って  $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$  は矛盾する.  $\square$ .

## 補題

1.  $\Gamma_\infty$  は無矛盾である.
2. 任意の論理式  $\psi$  について,  $\Gamma_\infty \vdash \psi \iff \psi \in \Gamma_\infty$ .
3. 従って特に,  $\perp \notin \Gamma_\infty$ .
4. 論理式  $\psi, \theta$  に対して,
  - $\psi \wedge \theta \in \Gamma_\infty \iff \psi \in \Gamma_\infty \text{ かつ } \theta \in \Gamma_\infty$ .
  - $\psi \vee \theta \in \Gamma_\infty \iff \psi \in \Gamma_\infty \text{ または } \theta \in \Gamma_\infty$ .
  - $\psi \rightarrow \theta \in \Gamma_\infty \iff \psi \in \Gamma_\infty \text{ ならば } \theta \in \Gamma_\infty$ .
  - $\neg \psi \in \Gamma_\infty \iff \psi \notin \Gamma_\infty$ .

(証明)

1.  $\Gamma_\infty$  が矛盾しているとする.

このとき,  $\Gamma_\infty \vdash \perp$  であり, この証明図の開いた仮定の全体  $\Delta$  は  $\Gamma_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$  の有限部分集合である.

従って, ある  $n \in \mathbb{N}$  が存在して  $\Delta \subseteq \Gamma_n$ .

今  $\Delta \vdash \perp$  であり,  $\Delta \subseteq \Gamma_n$  よりこの証明図は  $\Gamma_n \vdash \perp$  の証明図でもある.

これは  $\Gamma_n$  が無矛盾であることに反する. (1)  $\square$ .

2. 任意の論理式  $\psi$  について,  $\Gamma_\infty \vdash \psi \iff \psi \in \Gamma_\infty$ :

( $\Leftarrow$ ) は明らか.

( $\Rightarrow$ ).

$\Gamma_\infty \vdash \psi$  だが  $\psi \notin \Gamma_\infty$  とする.

$\psi \notin \Gamma_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$  より, 全ての  $n \in \mathbb{N}$  について  $\psi \notin \Gamma_n$ .

また,  $\psi$  に対して, ある  $m \in \mathbb{N}$  があって  $\psi \equiv \varphi_m$ .

$\varphi_m \equiv \psi \notin \Gamma_{m+1}$  なので,  $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\neg \varphi_m\}$  であり, 従って  $\Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$  は矛盾する.

$\Gamma_m \cup \{\varphi_m\} \vdash \perp$  の証明図の根に ( $\neg I$ ) を適用すると,  $\Gamma_m \vdash \neg \varphi_m$ .

$\Gamma_m \subseteq \Gamma_\infty$  なので  $\Gamma_\infty \vdash \neg \varphi_m$ . すなわち  $\Gamma_\infty \vdash \neg \psi$ .

この証明図と  $\Gamma_\infty \vdash \psi$  の証明図を合わせて ( $\neg E$ ) を用いると,

$\Gamma_\infty \vdash \perp$ . これは 1. に反する.

3.  $\perp \notin \Gamma_\infty$  :

1. より  $\Gamma_\infty \not\vdash \perp$ .

これと 2. より  $\perp \notin \Gamma_\infty$

4.  $\psi \wedge \theta \in \Gamma_\infty \iff \psi \in \Gamma_\infty \text{ かつ } \theta \in \Gamma_\infty$  について.

2. より  $\psi \wedge \theta \in \Gamma_\infty \iff \Gamma_\infty \vdash \psi \wedge \theta$ .

証明図の根に  $(\wedge I)$  や  $(\wedge E)$  を適用することで,

$$\iff \Gamma_\infty \vdash \psi \text{ かつ } \Gamma_\infty \vdash \theta.$$

再び 2. より,

$$\iff \psi \in \Gamma_\infty \text{ かつ } \theta \in \Gamma_\infty.$$

・先に  $\neg \psi \in \Gamma_\infty \Leftrightarrow \psi \notin \Gamma_\infty$  について示す.

$\neg \psi \in \Gamma_\infty \Rightarrow \psi \notin \Gamma_\infty$  は 1. よりすぐに分かる.

逆を示す.

$\psi \notin \Gamma_\infty$  とする.

$\Gamma_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$  より, 全ての  $n \in \mathbb{N}$  について  $\psi \notin \Gamma_n$ .

また, ある  $m$  が存在して  $\psi \equiv \varphi_m$ .

今  $\varphi_m \equiv \psi \notin \Gamma_{m+1}$  なので,  $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\neg \varphi_m\}$ .

$\Gamma_{m+1} \subseteq \Gamma_\infty$  なので,  $\neg \psi \equiv \neg \varphi_m \in \Gamma_\infty$ .

これによって特に, 全ての論理式  $\psi$  に対して,

$\psi \in \Gamma_\infty$  または  $\neg \psi \in \Gamma_\infty$

が分かる.

・  $\psi \vee \theta \in \Gamma_\infty \iff \psi \in \Gamma_\infty$  または  $\theta \in \Gamma_\infty$  について.

$\wedge$  の場合の  $(\Leftarrow)$  と同様の議論で,

$$\psi \vee \theta \in \Gamma_\infty \Leftarrow \psi \in \Gamma_\infty \text{ または } \theta \in \Gamma_\infty$$

は分かる.

(一般に論理式の集合  $\Gamma$  について,  
 $\Gamma \vdash \psi$  または  $\Gamma \vdash \theta \implies \Gamma \vdash \psi \vee \theta$   
は成立するが, 逆は常には成立しない.)

$(\implies)$  について.

対偶:

$$\psi \notin \Gamma_\infty \text{ かつ } \theta \notin \Gamma_\infty \implies \psi \vee \theta \notin \Gamma_\infty$$

を示す

$\psi \notin \Gamma_\infty$  か  $\theta \notin \Gamma_\infty$  とすると,  $\neg$  の場合から  $\neg\psi \in \Gamma_\infty$  か  $\neg\theta \in \Gamma_\infty$ .

すると  $\wedge$  の場合から  $\neg\psi \wedge \neg\theta \in \Gamma_\infty$ .

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\psi \vee \theta]'}{\quad} \quad \frac{\frac{\neg\psi \wedge \neg\theta}{[\psi]^2 \neg\psi} (\wedge E_l)}{\perp} (\neg E) \quad \frac{\frac{\neg\psi \wedge \neg\theta}{[\theta]^2 \neg\theta} (\wedge E_r)}{\perp} (\neg E) \\
 \hline
 \perp \quad (\vee E, 2) \\
 \hline
 \neg(\psi \vee \theta) \quad (\neg I, 1)
 \end{array}$$

によって  $\Gamma_\infty \vdash \neg(\psi \vee \theta)$  が分かり, 2.によって  $\neg(\psi \vee \theta) \in \Gamma_\infty$ .

すると  $\neg$  の場合の系により,  $\psi \vee \theta \notin \Gamma_\infty$  となる.

・  $\psi \rightarrow \theta \in \Gamma_\infty \iff \psi \in \Gamma_\infty$  ならば  $\theta \in \Gamma_\infty$  について.

( $\Rightarrow$ )

$\psi \rightarrow \theta \in \Gamma_\infty$  かつ  $\psi \in \Gamma_\infty$  とすると,

$$\frac{\psi \quad \psi \rightarrow \theta}{\theta} (\rightarrow E)$$

により  $\Gamma_\infty \vdash \theta$  となるので, 2. より  $\theta \in \Gamma_\infty$ .

( $\Leftarrow$ )

$\psi \in \Gamma_\infty$  ならば  $\theta \in \Gamma_\infty$  とする.

・  $\psi \in \Gamma_\infty$  のとき

仮定より  $\theta \in \Gamma_\infty$  なので, 右の証明木より

$\Gamma_\infty \vdash \psi \rightarrow \theta$ .

2. より  $\psi \rightarrow \theta \in \Gamma_\infty$ .

$$\frac{\theta}{\psi \rightarrow \theta} (\rightarrow I)$$

・  $\psi \notin \Gamma_\infty$  のとき

$\neg$  の場合の系より  $\neg\psi \in \Gamma_\infty$ .

すると

$$\frac{[\psi]^1 \quad \neg\psi}{\perp} (\neg E)$$
$$\frac{\perp}{\theta} (Exp)$$
$$\frac{\theta}{\psi \rightarrow \theta} (\rightarrow I, 1)$$

により  $\Gamma_\infty \vdash \psi \rightarrow \theta$

従って 2 より  $\psi \rightarrow \theta \in \Gamma_\infty$   $\square$ .

# 演習の解答例

$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg \varphi \vee \psi$  の証明木

$$\begin{array}{c} \frac{[\varphi \rightarrow \psi]^1 \quad [\varphi]^3}{\psi} (\rightarrow E) \\ \frac{\psi}{\neg \varphi \vee \psi} (\vee I_r) \quad \frac{[\neg(\neg \varphi \vee \psi)]^2}{\neg \varphi \vee \psi} (\neg E) \\ \frac{\perp}{\neg \varphi} (\neg I, 3) \\ \frac{[\neg(\neg \varphi \vee \psi)]^2}{\neg \varphi \vee \psi} (\neg E) \\ \frac{\perp}{\neg \varphi \vee \psi} (RAA, 2) \\ \frac{\neg \varphi \vee \psi}{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg \varphi \vee \psi} (\rightarrow I, 1) \end{array}$$



# 真理値表の書き方(1/6)

・右のような真理値表の書き方は、

メリット：真理値 (T と F) がどのように  
定まっていくか分かりやすい。

デメリット：「かつ」「または」「でない」「ならば」  
が増えると横長になる。

という特徴がある。

| P | Q | P かつ Q |
|---|---|--------|
| T | T | T      |
| T | F | F      |
| F | T | F      |
| F | F | F      |

| P | <sup>なか</sup> P かつ P | P でない | (P かつ P) <sup>なか</sup> ならば (P でない) |
|---|----------------------|-------|------------------------------------|
| T | T                    | F     | F                                  |
| F | F                    | T     | T                                  |

## 真理値表の書き方(2/6)

- ・そこで、次のような書き方を用いる.
- ・ $P$ と $Q$ を命題とする.
- ・ $(P \text{ かつ } Q) \text{ ならば } ((P \text{ でない}) \text{ または } Q)$  の真理値は

$(P \text{ かつ } Q) \text{ ならば } ((P \text{ でない}) \text{ または } Q)$     1.  $P$  の真理値を書いて...

T

T

T

T

F

F

F

F

## 真理値表の書き方(3/6)

- ・そこで、次のような書き方を用いる.
- ・ $P$ と $Q$ を命題とする.
- ・ $(P \text{ かつ } Q) \text{ ならば } ((P \text{ でない}) \text{ または } Q)$  の真理値は

$(P \text{ かつ } Q) \text{ ならば } ((P \text{ でない}) \text{ または } Q)$     1.  $P$  の真理値を書いて...

|   |   |   |   |                    |
|---|---|---|---|--------------------|
| T | T | T | T | 2. $Q$ の真理値も書いて... |
| T | F | T | F |                    |
| F | T | F | T |                    |
| F | F | F | F |                    |

## 真理値表の書き方(4/6)

- ・そこで、次のような書き方を用いる.
- ・ $P$ と $Q$ を命題とする.
- ・ $(P \text{ かつ } Q) \text{ ならば } ((P \text{ でない}) \text{ または } Q)$  の真理値は

$(P \text{ かつ } Q) \text{ ならば } ((P \text{ でない}) \text{ または } Q)$

T T T

T F F

F F T

F F F

T F

T F

F T

F T

T

F

T

F

1.  $P$  の真理値を書いて...

2.  $Q$  の真理値も書いて...

3. カッコが深い所にある

論理結合子から順に

真理値を書いていく!

# 真理値表の書き方 (5/6)

- ・そこで、次のような書き方を用いる。
- ・ $P$ と $Q$ を命題とする。
- ・ $(P \text{ かつ } Q) \text{ ならば } ((P \text{ でない}) \text{ または } Q)$  の真理値は

$(P \text{ かつ } Q) \text{ ならば } ((P \text{ でない}) \text{ または } Q)$

T T T

T F F

F F T

F F F

T F

T F

F T

F T

T

F

T

T

T

F

T

F

1.  $P$  の真理値を書いて...

2.  $Q$  の真理値も書いて...

3. カッコが深い所にある

論理結合子から順に

真理値を書いていく...



もう使わない所は灰色にしておいて...

# 真理値表の書き方(6/6)

- ・そこで、次のような書き方を用いる.
- ・ $P$ と $Q$ を命題とする.
- ・ $(P \text{ かつ } Q) \text{ ならば } ((P \text{ でない}) \text{ または } Q)$  の真理値は

コンパクト!

$(P \text{ かつ } Q) \text{ ならば } ((P \text{ でない}) \text{ または } Q)$

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | F | T | T |
| T | F | F | T | T | F | F | F |
| F | F | T | T | F | T | T | T |
| F | F | F | T | F | T | T | F |

1.  $P$  の真理値を書いて...

2.  $Q$  の真理値も書いて...

3. カッコが深い所にある

論理結合子から順に

真理値を書いていく...

4. 完成〜!