

平行切断の可積分性と Poincaré の補題

～ 主束とその同伴ベクトル束の接続 ～

一人セミナー数理物理

October 12, 2025

自己紹介と発表の動機

発表の動機

- 微分幾何の布教
- 自分の知識の整理
- 久々に対面セミナーしたかった

私の数学的な興味 (主に微分幾何)

- 擬 Riemann 幾何 (特に Lorentz 幾何)
- スピン構造を含む多様体の G -構造
- 等質空間や Lie 群

今日の目標: B4 くらいの自分の疑問への回答

- なぜ主束なのか？
- 主束の接続の意味は？

自己紹介と発表の動機

発表の動機

- 微分幾何の布教
- 自分の知識の整理
- 久々に対面セミナーしたかった

私の数学的な興味 (主に微分幾何)

- 擬 Riemann 幾何 (特に Lorentz 幾何)
- スピン構造を含む多様体の G -構造
- 等質空間や Lie 群

今日の目標: B4 くらいの自分の疑問への回答

- なぜ主束なのか？
- 主束の接続の意味は？

自己紹介と発表の動機

発表の動機

- 微分幾何の布教
- 自分の知識の整理
- 久々に対面セミナーしたかった

私の数学的な興味 (主に微分幾何)

- 擬 Riemann 幾何 (特に Lorentz 幾何)
- スピン構造を含む多様体の G -構造
- 等質空間や Lie 群

今日の目標: B4 くらいの自分の疑問への回答

- なぜ主束なのか？
- 主束の接続の意味は？

自己紹介と発表の動機

発表の動機

- 微分幾何の布教
- 自分の知識の整理
- 久々に対面セミナーしたかった

私の数学的な興味 (主に微分幾何)

- 擬 Riemann 幾何 (特に Lorentz 幾何)
- スピン構造を含む多様体の G -構造
- 等質空間や Lie 群

今日の目標: B4 くらいの自分の疑問への回答

- なぜ主束なのか？
- 主束の接続の意味は？

自己紹介と発表の動機

発表の動機

- 微分幾何の布教
- 自分の知識の整理
- 久々に対面セミナーしたかった

私の数学的な興味 (主に微分幾何)

- 擬 Riemann 幾何 (特に Lorentz 幾何)
- スピン構造を含む多様体の G -構造
- 等質空間や Lie 群

今日の目標: B4 くらいの自分の疑問への回答

- なぜ主束なのか？
- 主束の接続の意味は？

目次

平行切断の可積分性と Poincaré の補題

- 1 主束とベクトル束の接続の対応
- 2 可積分条件と Poincaré の補題
- 3 ファイバー束の復習
- 4 Ambrose-Singer の定理と “非可換” Poincaré の補題
- 5 主束の水平切断と同伴ベクトル束の平行切断
- 6 具体例

目次

平行切断の可積分性と Poincaré の補題

- 1 主束とベクトル束の接続の対応
- 2 可積分条件と Poincaré の補題
- 3 ファイバー束の復習
- 4 Ambrose-Singer の定理と “非可換” Poincaré の補題
- 5 主束の水平切断と同伴ベクトル束の平行切断
- 6 具体例

主束とベクトル束の接続の対応

主束の接続は何が嬉しいか？

ベクトル束は接束の接続が平行移動を与えるという意味でわかりやすい一方で、主束の接続ではそれが Lie 環値微分形式などを考えていて少しわかりづらい。

ベクトル束の接続と主束の接続には以下の対応がある。

- ① ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ の平行切断 $s \in \Gamma(E)$, $(\nabla s = 0)$
- ② 主束 $\pi: P \rightarrow M$ の水平切断 $\sigma \in \Gamma(P)$. $(\sigma^*\omega = 0)$

平坦性

ベクトル束に平行切断が存在する十分条件として平坦性がある。この平坦性とは束の平坦性と接続の平坦性の2種類ある。(実は同値)

- ① ベクトル束 (或いは主束) の平坦性とは変換関数が定数行列になることである。
- ② 接続の平坦性とは曲率が消えることである。

主束とベクトル束の接続の対応

主束の接続は何が嬉しいか？

ベクトル束は接束の接続が平行移動を与えるという意味でわかりやすい一方で、主束の接続ではそれが Lie 環値微分形式などを考えていて少しわかりづらい。

ベクトル束の接続と主束の接続には以下の対応がある。

- ① ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ の平行切断 $s \in \Gamma(E)$, $(\nabla s = 0)$
- ② 主束 $\pi: P \rightarrow M$ の水平切断 $\sigma \in \Gamma(P)$. $(\sigma^*\omega = 0)$

平坦性

ベクトル束に平行切断が存在する十分条件として平坦性がある。この平坦性とは束の平坦性と接続の平坦性の2種類ある。(実は同値)

- ① ベクトル束 (或いは主束) の平坦性とは変換関数が定数行列になることである。
- ② 接続の平坦性とは曲率が消えることである。

主束とベクトル束の接続の対応

主束の接続は何が嬉しいか？

ベクトル束は接束の接続が平行移動を与えるという意味でわかりやすい一方で、主束の接続ではそれが Lie 環値微分形式などを考えていて少しわかりづらい。

ベクトル束の接続と主束の接続には以下の対応がある。

- ① ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ の平行切断 $s \in \Gamma(E)$, $(\nabla s = 0)$
- ② 主束 $\pi: P \rightarrow M$ の水平切断 $\sigma \in \Gamma(P)$. $(\sigma^*\omega = 0)$

平坦性

ベクトル束に平行切断が存在する十分条件として平坦性がある。この平坦性とは束の平坦性と接続の平坦性の2種類ある。(実は同値)

- ① ベクトル束 (或いは主束) の平坦性とは変換関数が定数行列になることである。
- ② 接続の平坦性とは曲率が消えることである。

主束とベクトル束の接続の対応

主束の接続は何が嬉しいか？

ベクトル束は接束の接続が平行移動を与えるという意味でわかりやすい一方で、主束の接続ではそれが Lie 環値微分形式などを考えていて少しわかりづらい。

ベクトル束の接続と主束の接続には以下の対応がある。

- ① ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ の平行切断 $s \in \Gamma(E)$, $(\nabla s = 0)$
- ② 主束 $\pi: P \rightarrow M$ の水平切断 $\sigma \in \Gamma(P)$. $(\sigma^*\omega = 0)$

平坦性

ベクトル束に平行切断が存在する十分条件として平坦性がある。この平坦性とは束の平坦性と接続の平坦性の2種類ある。(実は同値)

- ① ベクトル束 (或いは主束) の平坦性とは変換関数が定数行列になることである。
- ② 接続の平坦性とは曲率が消えることである。

主束とベクトル束の接続の対応

命題 (水平切断と平行切断の同値性)

∇ を主束の接続 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ から誘導される同伴ベクトル束の接続とする。水平切断 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, P)$ と $v \in V$ によって定まる同伴ベクトル束の切断 $\sigma \times_{\rho} v \in \Gamma(\mathcal{U}, E)$ は平行である。

平行切断の存在条件

ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ 上の接続 ∇ が平坦であるなら ∇ -平行切断が存在する。(可積分条件)

目次

平行切断の可積分性と Poincaré の補題

- 1 主束とベクトル束の接続の対応
- 2 可積分条件と Poincaré の補題
- 3 ファイバー束の復習
- 4 Ambrose-Singer の定理と “非可換” Poincaré の補題
- 5 主束の水平切断と同伴ベクトル束の平行切断
- 6 具体例

可積分条件と Poincaré の補題

定理 (1 次元 Poincaré の補題)

微分 1 形式 $\alpha \in \Omega^1(M)$ が閉形式すなわち $d\alpha = 0$ なら任意の点 $p \in M$ に対して p の任意の連結かつ単連結な開近傍 $\mathcal{U}$ 上に関数 $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ が存在して $\alpha|_{\mathcal{U}} = df$ となる。

定理 (1 次元 “非可換” Poincaré の補題)

主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ 上の接続 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が連結かつ単連結な開集合上の局所切断 $\sigma: \mathcal{U} \rightarrow P$ に対して平坦すなわちゲージポテンシャル $\mathcal{A} := \sigma^*\omega \in \Omega^1(\mathcal{U}; \mathfrak{g})$ の定めるゲージ場 $\mathcal{F} = D\mathcal{A} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$ が消えるときある $g: \mathcal{U} \rightarrow G$ が存在して $\mathcal{A} = g^{-1}dg$ となる。

対応

- ① $d\alpha|_{\mathcal{U}} = 0 \Leftrightarrow D\mathcal{A} = 0, (\text{可積分条件})$
- ② $\alpha|_{\mathcal{U}} = df \in \Omega^1(\mathcal{U}) \Leftrightarrow \mathcal{A} = g^{-1}dg \in \Omega^1(\mathcal{U}; \mathfrak{g}).$

可積分条件と Poincaré の補題

定理 (1 次元 Poincaré の補題)

微分 1 形式 $\alpha \in \Omega^1(M)$ が閉形式すなわち $d\alpha = 0$ なら任意の点 $p \in M$ に対して p の任意の連結かつ単連結な開近傍 $\mathcal{U}$ 上に関数 $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ が存在して $\alpha|_{\mathcal{U}} = df$ となる。

命題

多様体の開集合上の 1 形式 $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ に対して以下は同値である。

- ① $d\alpha = 0$,
- ② 任意の閉曲線 $c: I \rightarrow \mathcal{U}$ に対して $\int_c \alpha = 0$,
- ③ ある関数 $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $\alpha = df$.

1 次元 Poincaré の補題の例

$\alpha = F_i dx^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ に対して $\mathbf{F} = \alpha^\sharp = \delta^{ij} F_i \partial_j$ を保存力 ($\text{rot } \mathbf{F} = 0$) とするときあるポテンシャル関数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ が存在して $\mathbf{F} = -\text{grad } f$ となる。
($df = \text{grad } f^\flat$ つまり $df = g(\text{grad } f, \bullet)$)

可積分条件と Poincaré の補題

定理 (1 次元 Poincaré の補題)

微分 1 形式 $\alpha \in \Omega^1(M)$ が閉形式すなわち $d\alpha = 0$ なら任意の点 $p \in M$ に対して p の任意の連結かつ単連結な開近傍 $\mathcal{U}$ 上に関数 $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ が存在して $\alpha|_{\mathcal{U}} = df$ となる。

命題

多様体の開集合上の 1 形式 $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ に対して以下は同値である。

- ① $d\alpha = 0$,
- ② 任意の閉曲線 $c: I \rightarrow \mathcal{U}$ に対して $\int_c \alpha = 0$,
- ③ ある関数 $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $\alpha = df$.

1 次元 Poincaré の補題の例

$\alpha = F_i dx^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ に対して $\mathbf{F} = \alpha^\sharp = \delta^{ij} F_i \partial_j$ を保存力 ($\text{rot } \mathbf{F} = 0$) とするときあるポテンシャル関数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ が存在して $\mathbf{F} = -\text{grad } f$ となる。
($df = \text{grad } f^\flat$ つまり $df = g(\text{grad } f, \bullet)$)

可積分条件と Poincaré の補題

定理 (1 次元 Poincaré の補題)

微分 1 形式 $\alpha \in \Omega^1(M)$ が閉形式すなわち $d\alpha = 0$ なら任意の点 $p \in M$ に対して p の任意の連結かつ単連結な開近傍 $\mathcal{U}$ 上に関数 $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ が存在して $\alpha|_{\mathcal{U}} = df$ となる。

命題

多様体の開集合上の 1 形式 $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ に対して以下は同値である。

- ① $d\alpha = 0$,
- ② 任意の閉曲線 $c: I \rightarrow \mathcal{U}$ に対して $\int_c \alpha = 0$,
- ③ ある関数 $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $\alpha = df$.

1 次元 Poincaré の補題の例

$\alpha = F_i dx^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ に対して $\mathbf{F} = \alpha^\sharp = \delta^{ij} F_i \partial_j$ を保存力 ($\text{rot } \mathbf{F} = 0$) とするときあるポテンシャル関数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ が存在して $\mathbf{F} = -\text{grad } f$ となる。
($df = \text{grad } f^\flat$ つまり $df = g(\text{grad } f, \bullet)$)

可積分条件と Poincaré の補題

定理 (1 次元 “非可換” Poincaré の補題)

主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ 上の接続 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が連結かつ単連結な開集合上の局所切断 $\sigma: \mathcal{U} \rightarrow P$ に対して平坦すなわちゲージポテンシャル $\mathcal{A} := \sigma^* \omega \in \Omega^1(\mathcal{U}; \mathfrak{g})$ の定めるゲージ場 $\mathcal{F} = D\mathcal{A} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$ が消えるときある $g: \mathcal{U} \rightarrow G$ が存在して $\mathcal{A} = g^{-1}dg$ となる。

命題

ゲージポテンシャル $\mathcal{A} \in \Omega^1(\mathcal{U}; \mathfrak{g})$ に対して以下は同値である。

- ① $D\mathcal{A} = 0$,
- ② 基点を $p \in \mathcal{U}$ にもつ任意の閉曲線 $c: I \rightarrow \mathcal{U}$ と $u \in \pi^{-1}(p)$ に対して定まるホロノミー群 $\text{Hol}_\omega(\omega)$ が自明になる。つまり始点を u に持つ c の水平持ち上げ $\bar{c}: I \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ が $u = \bar{c}(1)$ 。
- ③ ある関数 $g: \mathcal{U} \rightarrow G$ が存在して $\mathcal{A} = g^{-1}dg$ 。

可積分条件と Poincaré の補題

定理 (1 次元 “非可換” Poincaré の補題)

主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ 上の接続 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が連結かつ単連結な開集合上の局所切断 $\sigma: \mathcal{U} \rightarrow P$ に対して平坦すなわちゲージポテンシャル $A := \sigma^* \omega \in \Omega^1(\mathcal{U}; \mathfrak{g})$ の定めるゲージ場 $\mathcal{F} = DA = dA + A \wedge A$ が消えるときある $g: \mathcal{U} \rightarrow G$ が存在して $A = g^{-1}dg$ となる。

命題

ゲージポテンシャル $A \in \Omega^1(\mathcal{U}; \mathfrak{g})$ に対して以下は同値である。

- ① $DA = 0$,
- ② 基点を $p \in \mathcal{U}$ にもつ任意の閉曲線 $c: I \rightarrow \mathcal{U}$ と $u \in \pi^{-1}(p)$ に対して定まるホロノミー群 $\text{Hol}_\omega(\omega)$ が自明になる。つまり始点を u に持つ c の水平持ち上げ $\bar{c}: I \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ が $u = \bar{c}(1)$ 。
- ③ ある関数 $g: \mathcal{U} \rightarrow G$ が存在して $A = g^{-1}dg$ 。

可積分条件と Poincaré の補題

定理 (1 次元 “非可換” Poincaré の補題)

主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ 上の接続 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が連結かつ単連結な開集合上の局所切断 $\sigma: \mathcal{U} \rightarrow P$ に対して平坦すなわちゲージポテンシャル $A := \sigma^* \omega \in \Omega^1(\mathcal{U}; \mathfrak{g})$ の定めるゲージ場 $\mathcal{F} = D\mathcal{A} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$ が消えるときある $g: \mathcal{U} \rightarrow G$ が存在して $\mathcal{A} = g^{-1}dg$ となる。

命題

ゲージポテンシャル $\mathcal{A} \in \Omega^1(\mathcal{U}; \mathfrak{g})$ に対して以下は同値である。

- ① $D\mathcal{A} = 0$,
- ② 基点を $p \in \mathcal{U}$ にもつ任意の閉曲線 $c: I \rightarrow \mathcal{U}$ と $u \in \pi^{-1}(p)$ に対して定まるホロノミー群 $\text{Hol}_\omega(\omega)$ が自明になる。つまり始点を u に持つ c の水平持ち上げ $\bar{c}: I \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ が $u = \bar{c}(1)$ 。
- ③ ある関数 $g: \mathcal{U} \rightarrow G$ が存在して $\mathcal{A} = g^{-1}dg$ 。

目次

平行切断の可積分性と Poincaré の補題

- 1 主束とベクトル束の接続の対応
- 2 可積分条件と Poincaré の補題
- 3 ファイバー束の復習
- 4 Ambrose-Singer の定理と “非可換” Poincaré の補題
- 5 主束の水平切断と同伴ベクトル束の平行切断
- 6 具体例

ファイバー束の復習

定義 (局所自明なファイブレーション)

位相空間 F, E, X と全射 $\pi: E \rightarrow X$ の組 (π, E, X, F) が局所自明なファイブレーションとは任意の点 $x \in X$ に対してある開近傍 $\mathcal{U}$ と同相写像 $\phi: \pi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U} \times F$ が存在して以下の図式を可換にする。

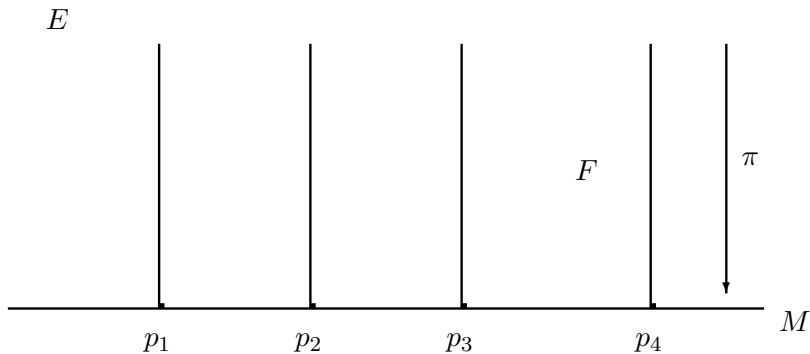
$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{U} \times F \\ \pi \downarrow & \nearrow \pi_1 & \\ \mathcal{U} & & \end{array}$$

命題

局所自明なファイブレーション (π, E, X, F) において底空間とファイバー X, F が位相的な条件 ---^a を満たすと全空間 E においても --- は満たされる。

^a多様体や第二可算、連結、コンパクトなど

ファイバー束の復習



ファイバー束の復習

定義 (ファイバー束)

局所自明なファイブレーション (π, E, M, F) がファイバー束であるとはファイバー F に左から作用する構造群と呼ばれる Lie 群 G と局所自明化と呼ばれる微分同相写像 $\{\phi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F\}_{i \in \mathbb{N}}$ で以下を満たす。

- ① E, M, F がそれぞれ全空間、底空間、ファイバーとよばれる微分可能多様体である。
- ② 局所自明化は変換関数と呼ばれる $\phi_i \circ \phi_j^{-1}(p, f) = (p, t_{ij}(p)f)$ で定まるファイバーの座標変換 $t_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$ を定義する。

局所自明なファイブレーションの具体例

- ① Mobius の輪 $S^1 \times [-1, 1] / \sim \rightarrow S^1$ (ファイバーが $[-1, 1]$ 捩れあり)
- ② 接ベクトル束 $TM \rightarrow M$ 及びその枠束 $LM \rightarrow M$
- ③ 被覆空間 $X \rightarrow B$ ($\text{Spin}(3) = \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$)
- ④ 等質空間 $G \rightarrow G/H$ ($\text{SU}(2) = S^3 \rightarrow S^2 = S^3/S^1$)

ファイバー束の復習

定義 (ファイバー束)

局所自明なファイブレーション (π, E, M, F) がファイバー束であるとはファイバー F に左から作用する構造群と呼ばれる Lie 群 G と局所自明化と呼ばれる微分同相写像 $\{\phi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F\}_{i \in \mathbb{N}}$ で以下を満たす。

- ① E, M, F がそれぞれ全空間、底空間、ファイバーとよばれる微分可能多様体である。
- ② 局所自明化は変換関数と呼ばれる $\phi_i \circ \phi_j^{-1}(p, f) = (p, t_{ij}(p)f)$ で定まるファイバーの座標変換 $t_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$ を定義する。

局所自明なファイブレーションの具体例

- ① Mobius の輪 $S^1 \times [-1, 1] / \sim \rightarrow S^1$ (ファイバーが $[-1, 1]$ 捩れあり)
- ② 接ベクトル束 $TM \rightarrow M$ 及びその枠束 $LM \rightarrow M$
- ③ 被覆空間 $X \rightarrow B$ ($\text{Spin}(3) = \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$)
- ④ 等質空間 $G \rightarrow G/H$ ($\text{SU}(2) = S^3 \rightarrow S^2 = S^3/S^1$)

ファイバー束の復習

定義 (ファイバー束)

局所自明なファイブレーション (π, E, M, F) がファイバー束であるとはファイバー F に左から作用する構造群と呼ばれる Lie 群 G と局所自明化と呼ばれる微分同相写像 $\{\phi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F\}_{i \in \mathbb{N}}$ で以下を満たす。

- ① E, M, F がそれぞれ全空間、底空間、ファイバーとよばれる微分可能多様体である。
- ② 局所自明化は変換関数と呼ばれる $\phi_i \circ \phi_j^{-1}(p, f) = (p, t_{ij}(p)f)$ で定まるファイバーの座標変換 $t_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$ を定義する。

局所自明なファイブレーションの具体例

- ① Mobius の輪 $S^1 \times [-1, 1] / \sim \rightarrow S^1$ (ファイバーが $[-1, 1]$ 捩れあり)
- ② 接ベクトル束 $TM \rightarrow M$ 及びその枠束 $LM \rightarrow M$
- ③ 被覆空間 $X \rightarrow B$ ($\text{Spin}(3) = \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$)
- ④ 等質空間 $G \rightarrow G/H$ ($\text{SU}(2) = S^3 \rightarrow S^2 = S^3/S^1$)

ファイバー束の復習

定義 (ファイバー束)

局所自明なファイブレーション (π, E, M, F) がファイバー束であるとはファイバー F に左から作用する構造群と呼ばれる Lie 群 G と局所自明化と呼ばれる微分同相写像 $\{\phi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F\}_{i \in \mathbb{N}}$ で以下を満たす。

- ① E, M, F がそれぞれ全空間、底空間、ファイバーとよばれる微分可能多様体である。
- ② 局所自明化は変換関数と呼ばれる $\phi_i \circ \phi_j^{-1}(p, f) = (p, t_{ij}(p)f)$ で定まるファイバーの座標変換 $t_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$ を定義する。

局所自明なファイブレーションの具体例

- ① Mobius の輪 $S^1 \times [-1, 1] / \sim \rightarrow S^1$ (ファイバーが $[-1, 1]$ 捩れあり)
- ② 接ベクトル束 $TM \rightarrow M$ 及びその枠束 $LM \rightarrow M$
- ③ 被覆空間 $X \rightarrow B$ ($\text{Spin}(3) = \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$)
- ④ 等質空間 $G \rightarrow G/H$ ($\text{SU}(2) = S^3 \rightarrow S^2 = S^3/S^1$)

ファイバー束の復習

定義 (ファイバー束)

局所自明なファイブレーション (π, E, M, F) がファイバー束であるとはファイバー F に左から作用する構造群と呼ばれる Lie 群 G と局所自明化と呼ばれる微分同相写像 $\{\phi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F\}_{i \in \mathbb{N}}$ で以下を満たす。

- ① E, M, F がそれぞれ全空間、底空間、ファイバーとよばれる微分可能多様体である。
- ② 局所自明化は変換関数と呼ばれる $\phi_i \circ \phi_j^{-1}(p, f) = (p, t_{ij}(p)f)$ で定まるファイバーの座標変換 $t_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$ を定義する。

局所自明なファイブレーションの具体例

- ① Mobius の輪 $S^1 \times [-1, 1] / \sim \rightarrow S^1$ (ファイバーが $[-1, 1]$ 捩れあり)
- ② 接ベクトル束 $TM \rightarrow M$ 及びその枠束 $LM \rightarrow M$
- ③ 被覆空間 $X \rightarrow B$ ($\text{Spin}(3) = \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$)
- ④ 等質空間 $G \rightarrow G/H$ ($\text{SU}(2) = S^3 \rightarrow S^2 = S^3/S^1$)

ファイバー束の復習

定義 (ファイバー束)

局所自明なファイブレーション (π, E, M, F) がファイバー束であるとはファイバー F に左から作用する構造群と呼ばれる Lie 群 G と局所自明化と呼ばれる微分同相写像 $\{\phi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F\}_{i \in \mathbb{N}}$ で以下を満たす。

- ① E, M, F がそれぞれ全空間、底空間、ファイバーとよばれる微分可能多様体である。
- ② 局所自明化は変換関数と呼ばれる $\phi_i \circ \phi_j^{-1}(p, f) = (p, t_{ij}(p)f)$ で定まるファイバーの座標変換 $t_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$ を定義する。

局所自明なファイブレーションの具体例

- ① Mobius の輪 $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1] / \sim \rightarrow \mathbb{S}^1$ (ファイバーが $[-1, 1]$ 捩れあり)
- ② 接ベクトル束 $TM \rightarrow M$ 及びその枠束 $LM \rightarrow M$
- ③ 被覆空間 $X \rightarrow B$ ($\text{Spin}(3) = \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$)
- ④ 等質空間 $G \rightarrow G/H$ ($\text{SU}(2) = \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$)

ファイバー束の復習

定義 (切断)

$\Gamma(\pi^{-1}(\mathcal{U})) = \Gamma(\mathcal{U}, E) = \{s: \mathcal{U} \rightarrow E \mid \pi \circ s = \text{id}\}$ をファイバー束 $\pi: E \rightarrow M$ の切断という。

関数のグラフ

$E = M \times \mathbb{R}$ のとき

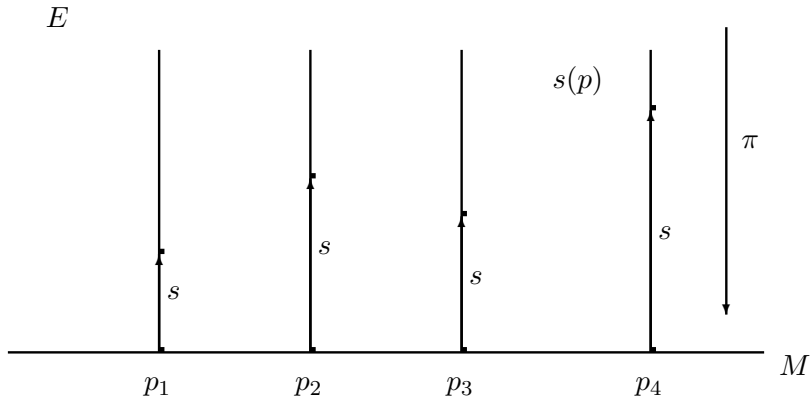
$\Gamma(E) = \{\Gamma_f: M \ni p \mapsto (p, f(p)) \in M \times \mathbb{R}\} \simeq C^\infty(M)$ なので切断はしばしば関数の一般化とも言われる。

定義 (主 G 束)

ファイバーと構造群がともに Lie 群 G であるファイバー束 $\pi: P \rightarrow M$ が主 G 束であるとは G が P に右から作用し、局所自明化の族 $\{\phi_i: \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \rightarrow \mathcal{U}_i \times G\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して以下が成り立つ。

$$\phi_i(u) = (p, g) \Rightarrow \phi_i(ua) = (p, ga). \quad (a, g \in G, u \in \pi^{-1}(p), p \in \mathcal{U}_i) \quad (3.1)$$

ファイバー束の復習



$$\pi \circ s = \text{id}_M$$

ファイバー束の復習

定義 (基本ベクトル場)

G の P への右作用が生成する基本ベクトル場 $X^\# \in \Gamma(TP)$ を以下で与える。

$$\left. \frac{d}{dt} u \exp(tX) \right|_{t=0} = X^\#|_u \in T_u P, \quad (X \in \mathfrak{g}, u \in P) \quad (3.2)$$

定義 (主 G 束の接続)

主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ の Ehressman 接続とは以下を満たす接束 TP の直和分解 $TP = \mathcal{H}P \oplus \mathcal{V}P$ である。

- ① $\mathcal{V}P = \ker d\pi,$
- ② $R_{a*} \mathcal{H}_u P = \mathcal{H}_{ua} P. \quad (\forall a \in G, \forall u \in P)$

接続 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ とは以下を満たす G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ 値 1 形式である。

- ① $\omega(A^\#) = A, \quad (\forall A \in \mathfrak{g})$
- ② $R_a^* \omega = \text{Ad}_{a^{-1}} \omega. \quad (\forall a \in G)$

両者の対応は $\ker \omega = \mathcal{H}P$ で与えられる。(水平性は ω で測る)

ファイバー束の復習

定義 (基本ベクトル場)

G の P への右作用が生成する基本ベクトル場 $X^\# \in \Gamma(TP)$ を以下で与える。

$$\left. \frac{d}{dt} u \exp(tX) \right|_{t=0} = X^\#|_u \in T_u P, \quad (X \in \mathfrak{g}, u \in P) \quad (3.2)$$

定義 (主 G 束の接続)

主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ の Ehressman 接続とは以下を満たす接束 TP の直和分解 $TP = \mathcal{H}P \oplus \mathcal{V}P$ である。

- ① $\mathcal{V}P = \ker d\pi$,
- ② $R_{a*} \mathcal{H}_u P = \mathcal{H}_{ua} P. \quad (\forall a \in G, \forall u \in P)$

接続 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ とは以下を満たす G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ 値 1 形式である。

- ① $\omega(A^\#) = A, \quad (\forall A \in \mathfrak{g})$
- ② $R_a^* \omega = \text{Ad}_{a^{-1}} \omega. \quad (\forall a \in G)$

両者の対応は $\ker \omega = \mathcal{H}P$ で与えられる。(水平性は ω で測る)

ファイバー束の復習

定義 (基本ベクトル場)

G の P への右作用が生成する基本ベクトル場 $X^\# \in \Gamma(TP)$ を以下で与える。

$$\left. \frac{d}{dt} u \exp(tX) \right|_{t=0} = X^\#|_u \in T_u P, \quad (X \in \mathfrak{g}, u \in P) \quad (3.2)$$

定義 (主 G 束の接続)

主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ の Ehressman 接続とは以下を満たす接束 TP の直和分解 $TP = \mathcal{H}P \oplus \mathcal{V}P$ である。

- ① $\mathcal{V}P = \ker d\pi,$
- ② $R_{a*} \mathcal{H}_u P = \mathcal{H}_{ua} P. \quad (\forall a \in G, \forall u \in P)$

接続 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ とは以下を満たす G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ 値 1 形式である。

- ① $\omega(A^\#) = A, \quad (\forall A \in \mathfrak{g})$
- ② $R_a^* \omega = \text{Ad}_{a^{-1}} \omega. \quad (\forall a \in G)$

両者の対応は $\ker \omega = \mathcal{H}P$ で与えられる。(水平性は ω で測る)

ファイバー束の復習

定義 (基本ベクトル場)

G の P への右作用が生成する基本ベクトル場 $X^\# \in \Gamma(TP)$ を以下で与える。

$$\left. \frac{d}{dt} u \exp(tX) \right|_{t=0} = X^\#|_u \in T_u P, \quad (X \in \mathfrak{g}, u \in P) \quad (3.2)$$

定義 (主 G 束の接続)

主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ の Ehressman 接続とは以下を満たす接束 TP の直和分解 $TP = \mathcal{H}P \oplus \mathcal{V}P$ である。

- ① $\mathcal{V}P = \ker d\pi,$
- ② $R_{a*} \mathcal{H}_u P = \mathcal{H}_{ua} P. \quad (\forall a \in G, \forall u \in P)$

接続 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ とは以下を満たす G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ 値 1 形式である。

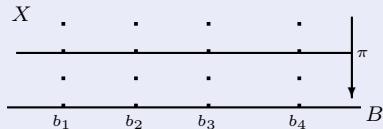
- ① $\omega(A^\#) = A, \quad (\forall A \in \mathfrak{g})$
- ② $R_a^* \omega = \text{Ad}_{a^{-1}} \omega. \quad (\forall a \in G)$

両者の対応は $\ker \omega = \mathcal{H}P$ で与えられる。(水平性は ω で測る)

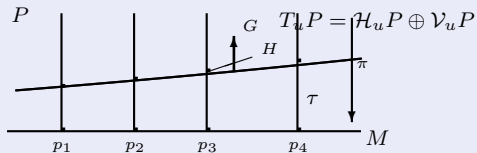
ファイバー束の復習

接続とは水平とは何かを定義すること！

イメージ (被覆空間)



イメージ (主 G 束)



ファイバー束の復習

定義 (水平切断)

局所切断 $\tau: \mathcal{U} \rightarrow P$ が水平であるとは $\tau^*\omega = 0$ となることである。

命題

以下は同値である。

- ① $\tau \in \Gamma(\pi^{-1}(\mathcal{U}))$ は水平である。
- ② 微分写像 $\tau_*: T_p\mathcal{U} \rightarrow T_uP$ の像は水平部分空間 $\mathcal{H}_uP$ に入る。
- ③ 任意の曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathcal{U}$ に対して $\tau \circ \gamma: I \rightarrow P$ は水平すなわち $\bar{\gamma} := \tau \circ \gamma$ に対して $\omega(\dot{\bar{\gamma}}) = 0$ 。

ファイバー束の復習

定義 (水平切断)

局所切断 $\tau: \mathcal{U} \rightarrow P$ が水平であるとは $\tau^*\omega = 0$ となることである。

命題

以下は同値である。

- ① $\tau \in \Gamma(\pi^{-1}(\mathcal{U}))$ は水平である。
- ② 微分写像 $\tau_*: T_p\mathcal{U} \rightarrow T_uP$ の像は水平部分空間 $\mathcal{H}_uP$ に入る。
- ③ 任意の曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathcal{U}$ に対して $\tau \circ \gamma: I \rightarrow P$ は水平すなわち $\bar{\gamma} := \tau \circ \gamma$ に対して $\omega(\dot{\bar{\gamma}}) = 0$ 。

ファイバー束の復習

定義 (水平切断)

局所切断 $\tau: \mathcal{U} \rightarrow P$ が水平であるとは $\tau^*\omega = 0$ となることである。

命題

以下は同値である。

- ① $\tau \in \Gamma(\pi^{-1}(\mathcal{U}))$ は水平である。
- ② 微分写像 $\tau_*: T_p\mathcal{U} \rightarrow T_uP$ の像は水平部分空間 $\mathcal{H}_uP$ に入る。
- ③ 任意の曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathcal{U}$ に対して $\tau \circ \gamma: I \rightarrow P$ は水平すなわち $\bar{\gamma} := \tau \circ \gamma$ に対して $\omega(\dot{\bar{\gamma}}) = 0$ 。

ファイバー束の復習

定義 (平行移動)

曲線 $c: I \rightarrow M$ が $x_0 = c(0)$ から $x_1 = c(1)$ への道であるとき c に沿った平行移動

$$\mathcal{P}_c: \pi^{-1}(x_0) \ni u_0 \mapsto \bar{c}(1) \in \pi^{-1}(x_1) \quad (3.3)$$

とは、始点 $u_0 = \bar{c}(0) \in \pi^{-1}(x_0)$ に対して一意的存在する c の水平持ち上げ $\bar{c}: I \rightarrow P$ によって定まる $\mathcal{P}_c(u_0) = \bar{c}(1)$ である。

定義 (ホロノミー群)

$\Omega_p(M) = \{c: I \rightarrow M \mid c(0) = c(1) = p\}$, $u \in \pi^{-1}(p)$ としたとき

$$\Psi_u: \Omega_p(M) \ni c \mapsto g_c \in G \quad (3.4)$$

が水平持ち上げで $\bar{c}(1) = ug_c$ によって定まる。このとき $\text{Hol}_\omega(u) = \Psi_u(\Omega_p(M))$ を基点を u にもつホロノミー群という。

ファイバー束の復習

定義 (曲率)

主 G 束の接続 1 形式が定める曲率 2 形式 $\Omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$ とは ω の共変外微分 $\Omega = D\omega = d\omega|_{\mathcal{H}P}$ のことである。曲率 2 形式が消えている接続のことを平坦接続という。

定義 (ゲージポテンシャルとゲージ場)

局所切断 $\sigma: \mathcal{U} \rightarrow P$ による接続 1 形式の引き戻しをゲージポテンシャルあるいは局所接続形式 $\mathcal{A} = \sigma^*\omega$ という。また局所曲率形式 $\mathcal{F} = \sigma^*\Omega$ のことをゲージ場あるいは場の強さともいう。

電磁場

$M = \mathbb{R}^{1,3}$ を底空間とする主 $U(1)$ 束は電磁場と呼ばれるがゲージポテンシャル $\mathcal{A} = (\rho, \mathbf{A})$ は 4 元ベクトルポテンシャルという。また $\mathcal{F} = D\mathcal{A} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = d\mathcal{A}$ を電磁場という。

目次

平行切断の可積分性と Poincaré の補題

- 1 主束とベクトル束の接続の対応
- 2 可積分条件と Poincaré の補題
- 3 ファイバー束の復習
- 4 Ambrose-Singer の定理と “非可換” Poincaré の補題
- 5 主束の水平切断と同伴ベクトル束の平行切断
- 6 具体例

Ambrose-Singer の定理と “非可換” Poincaré の補題

定理 (Ambrose-Singer)

主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ 上の接続 1 形式を $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ とする。このときホロノミー Lie 代数 $\mathfrak{hol}_\omega(u)$ は以下で与えられる。

$$\mathfrak{hol}_\omega(u) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\Omega_u(W_1, W_2) \in \mathfrak{g} \mid W_1, W_2 \in \Gamma(\mathcal{H}P)\}. \quad (4.1)$$

定理 (1 次元 “非可換” Poincaré の補題)

主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ 上の接続 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が連結かつ単連結な開集合上の局所切断 $\sigma: \mathcal{U} \rightarrow P$ に対して平坦すなわちゲージポテンシャル $A := \sigma^*\omega \in \Omega^1(\mathcal{U}; \mathfrak{g})$ の定めるゲージ場 $\mathcal{F} = D\mathcal{A} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$ が消えるときある $g: \mathcal{U} \rightarrow G$ が存在して $\mathcal{A} = g^{-1}dg$ となる。

$p_0 \in \mathcal{U}, u_0 \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ を固定する。 p_0 から任意の点 p への道 γ が存在し、その u_0 を始点とする水平持ち上げ $\bar{\gamma}: I \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ に対して局所切断を $\tau: \mathcal{U} \ni p \mapsto \bar{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ で定める。 $\gamma': I \rightarrow \mathcal{U}$ を p_0 から p への別の道とすると $\text{id} = \mathcal{P}_{\gamma*\gamma'^{-1}} = \mathcal{P}_{\gamma'}^{-1} \circ \mathcal{P}_{\gamma}$ から $\bar{\gamma}(1) = \bar{\gamma}'(1)$ となるので τ は well-defined である。このとき定義から τ は水平切断であり、ある $g: \mathcal{U} \rightarrow G$ が存在し $\sigma = \tau g$ が存在する。任意の曲線 $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ に対して $\bar{\gamma} = \tau \circ \gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ は水平持ち上げになる。
 $u = \bar{\gamma}(0) \in P, \bar{v} = \dot{\bar{\gamma}}(0) \in \mathcal{H}_u P$ とすると

$$\bar{v} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \{ [\sigma(\epsilon) - \sigma(0)]g(\epsilon)^{-1} + \sigma(0)[g(\epsilon)^{-1} - g(0)^{-1}] \} \quad (4.2)$$

$$= R_{g(\pi(u))}^{-1} \sigma_*(\dot{\gamma}(0)) + \left(g(\pi(u)) \frac{d}{dt} g(\gamma(t))^{-1} \Big|_{t=0} \right)_u^\# \quad (4.3)$$

$$0 = \omega(\bar{v}) = \{ \text{Ad}_{g(\pi(u))} \mathcal{A}_{\pi(u)} + g(\pi(u)) dg(\pi(u))^{-1} \} (\pi_* \bar{v}). \quad (4.4)$$

これより $\tau^* \omega = g \mathcal{A} g^{-1} + g dg^{-1} = 0$ となる。また $0 = d(g^{-1}g) = dg^{-1}g + g^{-1}dg$ から $\mathcal{A} = -dg^{-1}g = g^{-1}dg$.

Ambrose-Singer の定理と “非可換” Poincaré の補題

命題

多様体の開集合上の 1 形式 $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ に対して以下は同値である。

- ① $D\mathcal{A} = 0$,
- ② 基点を $p \in \mathcal{U}$ にもつ任意の閉曲線 $c: I \rightarrow \mathcal{U}$ と $u \in \pi^{-1}(p)$ に対して定まるホロノミー群 $\text{Hol}_\omega(\omega)$ が自明になる。つまり始点を u に持つ c の水平持ち上げ $\bar{c}: I \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ が $u = \bar{c}(1)$ 。
- ③ ある関数 $g: \mathcal{U} \rightarrow G$ が存在して $\mathcal{A} = g^{-1}dg$ 。

証明.

まず “非可換” Poincaré の補題の証明を順に辿ることで $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ が順に示される。 $(3) \Rightarrow (1)$ も $\sigma^*\omega = \mathcal{A}$ に対して $\tau = \sigma g^{-1}$ で定める切断が “非可換” Poincaré の補題の証明より

$$\tau^*\omega = \text{Ad}_g \mathcal{A} + g dg^{-1} = 0 \quad (4.5)$$

となることよりこれは水平切断である。つまり $D\tau^*\omega = 0$ 。

目次

平行切断の可積分性と Poincaré の補題

- 1 主束とベクトル束の接続の対応
- 2 可積分条件と Poincaré の補題
- 3 ファイバー束の復習
- 4 Ambrose-Singer の定理と “非可換” Poincaré の補題
- 5 主束の水平切断と同伴ベクトル束の平行切断
- 6 具体例

主束の水平切断と同伴ベクトル束の平行切断

定義 (同伴ベクトル束)

実または複素ベクトル空間 V への表現 $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ と主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ に対して $E := P \times_{\rho} V = P \times V / \sim \rightarrow M$ を同伴ベクトル束という。ここで以下の同値関係を与える。

$$(u, v) \sim (u', v') \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists g \in G, (u', v') = (ug, \rho(g)^{-1}v). \quad (5.1)$$

定義 (同伴ベクトル束の接続)

主 G 束上の接続 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が定める同伴ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ 上の接続 $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M; E)$ は以下で与えられる。

$$\nabla(\sigma_i \times_{\rho} v) = \sigma_i \times_{\rho} \rho_*(\mathcal{A}_i)v, (v \in V) \quad (5.2)$$

ここで $\{\sigma_i: \mathcal{U} \rightarrow P\}_{i \in \mathbb{N}}$ は標準切断すなわち $\phi_i(\sigma_i(p)) = (p, 1_G) (\forall p \in \mathcal{U}_i)$ とした。また $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$ はゲージポテンシャルである。また $\nabla s = 0$ となる切断 $s \in \Gamma(\mathcal{U}, E)$ を平行切断という。

主束の水平切断と同伴ベクトル束の平行切断

命題 (水平切断と平行切断の同値性)

∇ を主束の接続 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ から誘導される同伴ベクトル束の接続とする。水平切断 $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, P)$ と $v \in V$ によって定まる同伴ベクトル束の切断 $\sigma \times_{\rho} v \in \Gamma(\mathcal{U}, E)$ は平行である。

証明.

定義より $\sigma^* \omega = A = 0$ なので

$$\nabla(\sigma \times_{\rho} v) = \sigma \times_{\rho} \rho_*(A)v = 0. \quad (5.3)$$



主束の水平切断と同伴ベクトル束の平行切断

定義 (曲率)

ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ 上の接続を $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M; E)$ とするとき $D: \Omega^k(M; E) \rightarrow \Omega^{k+1}(M; E)$ が共変外微分であるとは $s \in \Gamma(E), \theta \in \Omega^k(M), \eta = s \otimes \theta$ に対して $D\eta = \nabla s \wedge \theta + s \otimes d\theta$ が成り立つことである。また $R = D \circ \nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Omega^2(M; E)$ を曲率という。曲率が消える接続のことを平坦接続という。

定義 (ベクトル束の平坦構造)

実または複素ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ の平坦構造とは定数行列からなる変換関数 $\{t_{ij}: \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \rightarrow \mathrm{GL}(V)\}_{ij}$ のことである。

主束の水平切断と同伴ベクトル束の平行切断

命題 (平行切断の可積分条件)

階数 r の (実でも複素でも良い) ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ 上の接続を ∇ とする。 M の開集合 $\mathcal{U}$ と $1 \leq k \leq r$ に対して以下は同値である

- ① $\mathcal{U}$ 上一次独立な平行切断 $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(\mathcal{U}, E)$ が存在する。
- ② 階数 k の部分束 $E' \subset E|_{\mathcal{U}}$ で、 ∇ が E' を保ちその誘導接続 $\nabla^{E'}$ で平坦なものが存在する。すなわち任意の $s \in \Gamma(E')$ に対して $\nabla s \in \Omega^1(\mathcal{U}; E')$ であり $R^{\nabla^{E'}} = 0$ となる。

主束の水平切断と同伴ベクトル束の平行切断

命題 (平行切断の可積分条件)

階数 r の (実でも複素でも良い) ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ 上の接続を ∇ とする。 M の開集合 $\mathcal{U}$ と $1 \leq k \leq r$ に対して以下は同値である

- ① $\mathcal{U}$ 上一次独立な平行切断 $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(\mathcal{U}, E)$ が存在する。
- ② 階数 k の部分束 $E' \subset E|_{\mathcal{U}}$ で、 ∇ が E' を保ちその誘導接続 $\nabla^{E'}$ で平坦なものが存在する。すなわち任意の $s \in \Gamma(E')$ に対して $\nabla s \in \Omega^1(\mathcal{U}; E')$ であり $R^{\nabla^{E'}} = 0$ となる。

主束の水平切断と同伴ベクトル束の平行切断

命題 (平行切断の可積分条件)

階数 r の (実でも複素でも良い) ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ 上の接続を ∇ とする。 M の開集合 $\mathcal{U}$ と $1 \leq k \leq r$ に対して以下は同値である

- ① $\mathcal{U}$ 上一次独立な平行切断 $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(\mathcal{U}, E)$ が存在する。
- ② 階数 k の部分束 $E' \subset E|_{\mathcal{U}}$ で、 ∇ が E' を保ちその誘導接続 $\nabla^{E'}$ で平坦なものが存在する。すなわち任意の $s \in \Gamma(E')$ に対して $\nabla s \in \Omega^1(\mathcal{U}; E')$ であり $R^{\nabla^{E'}} = 0$ となる。

証明.

(1) $\Rightarrow$ (2) $E' \subset \pi^{-1}(\mathcal{U})$ の自明化を切断 $\{s_i\}_{i=1}^k$ で与えるとこれは明らかに平坦構造である。任意の E' の切断は $f^i s_i \in \Gamma(E')$ ここで $f^i \in C^\infty(\mathcal{U})$, $(i = 1, \dots, k)$ である。 $\nabla(f^i s_i) = df^i \otimes s_i \in \Gamma(E')$ なので接続 $\nabla^{E'}$ は E' を保つ。(2) $\Rightarrow$ (1) E' の局所接続形式 $\tau^* \omega = \mathcal{A} \in \Omega^1(\mathcal{U}; \mathfrak{g}')$ に対して $R^{\nabla^{E'}} = 0$ は $d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = 0$ と同値である。

$\tau = (t_1, \dots, t_k) \in \Gamma(LE')$ に “非可換” Poincare の補題を適用すればある $q: \mathcal{U} \rightarrow G$ が存在して $\sigma = \tau q = (s_1, \dots, s_k)$ は平行切断になる。

目次

平行切断の可積分性と Poincaré の補題

- 1 主束とベクトル束の接続の対応
- 2 可積分条件と Poincaré の補題
- 3 ファイバー束の復習
- 4 Ambrose-Singer の定理と “非可換” Poincaré の補題
- 5 主束の水平切断と同伴ベクトル束の平行切断
- 6 具体例

具体例その 1

定義 (一般化された Killing スピノル)

擬 Riemann スピン多様体 (M, g, ∇) 上の一般化された Killing スピノル $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ とは対称テンソル $A \in \Gamma(\text{End}(TM))$ に対して以下を満たすスピノルである。

$$\nabla_X \psi = A(X) \cdot \psi. \quad (X \in \Gamma(TM)) \quad (6.1)$$

特に $A = \lambda \text{id} (\lambda \in \mathbb{C})$ のとき ψ は Killing 数 λ の Killing スピノルという。

→一般化された Killing スピノルの存在は接続 $\bar{\nabla} = \nabla - A(\cdot)$ の平坦性にかかっている。

※これは十分条件なのでこのような接続に関する部分束の平坦性が Killing スピノルの存在に必ずしも必要なわけではない！

具体例その 2

定義 (reductive 等質空間)

等質空間とは Lie 群 G が推移的に作用する多様体 M のことで任意の点 $o \in M$ に対して $\text{Stab}(o) = H \subset G$ は閉部分群になり $M \simeq G/H$ である。等質空間 M が reductive 等質空間であるとは $\text{Ad}|_H$ -不変部分空間 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ に関する直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ すなわち

$$\text{Ad}_h(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m} (h \in H) \quad (6.2)$$

が成り立つことである。

定義 (擬 Riemann 等質多様体)

擬 Riemann 多様体 (M, g, ∇) が reductive 等質空間であるとはその等長変換群の Lie 部分群 $G \subset \text{Isom}(M, g)$ による推移的な作用がある多様体で reductive 条件 (6.2) を満たすものである。

具体例その 2

定理 (Ambrose-Singer)

連結かつ単連結かつ完備擬 Riemann 多様体 (M, g, ∇) が reductive 等質空間になる必要十分条件はある $(1, 2)$ -型テンソル場 S が存在し接続 $\tilde{\nabla} = \nabla - S$ が以下の平行条件を満たすことである。

$$\tilde{\nabla} g = 0, \quad \tilde{\nabla} R = 0, \quad \tilde{\nabla} S = 0. \quad (6.3)$$

定理 (Ambrose-Singer-Kirichenko)

連結かつ単連結かつ完備擬 Riemann 多様体 (M, g, ∇) が K 構造 $\{\kappa_i\}_{i=1}^k$ を保つ reductive 等質空間になる必要十分条件はある $(1, 2)$ -型テンソル場 S が存在し接続 $\tilde{\nabla} = \nabla - S$ が以下の平行条件を満たすことである。

$$\tilde{\nabla} g = 0, \quad \tilde{\nabla} R = 0, \quad \tilde{\nabla} S = 0, \quad \tilde{\nabla} \kappa_i = 0. \quad (i = 1, \dots, k). \quad (6.4)$$

具体例その 2

定義

連結な Lie 群 G のスピン多様体 (M, g) への作用を $\phi: G \times M \rightarrow M$ とする。任意の $a \in G$ に対して向きを保つ等長変換

$d\phi_a: \text{SO}(M, g) \rightarrow \text{SO}(M, g)$ が (M, g) のスピン構造 $(\overline{\xi_g}, \Phi)$ に対して以下の図式を可換にする持ち上げ $\overline{d\phi_a}: P \rightarrow P$ を持つとき $(\overline{\xi_g}, \Phi)$ は G 不変なスピン構造であるという。

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Phi} & \text{SO}(M, g) \\ \overline{d\phi_a} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow d\phi_a \\ P & \xrightarrow{\Phi} & \text{SO}(M, g) \end{array}$$

定理

reductive な擬 Riemann 等質スピン多様体 $(G/H, g)$ が K 不変なスピン構造を持つとき $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ が G 不変なスピノルである必要十分条件は $\nabla - S$ 平行スピノルである。