

八元数体で遊ぼう

すてふ

2025 10/11

リーマン多様体のホロノミー群

- ▶ (M, g) を (向き付き) リーマン多様体とすると、 M の曲線 $\gamma(t)$ に沿った接ベクトル場 $X_t \in T_{\gamma(t)}M$ が平行であることを次で定める：

$$\begin{aligned} & \text{ベクトル場 } X \text{ が } \gamma \text{ に沿って平行である} \\ & :\Leftrightarrow \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X_t = 0, \forall t \end{aligned} \tag{1}$$

特に（これは一階の ODE なので）初期値 X_0 を指定すれば γ に沿った平行ベクトル場 $\{X_{\gamma(t)}\}_t$ が一意に定められる。これを X_0 の γ に沿った平行移動と呼ぶことにする。

ホロノミー群 2

平行移動を使うと、曲線 γ ごとにリーマン計量を保つ線形写像

$$\begin{aligned} T_{\gamma(0)}M &\rightarrow T_{\gamma(t)}M \\ X &\mapsto X_{\gamma(t)} \end{aligned} \tag{2}$$

が定義できる。これを Π_γ と書くことにする。

特に基点 $p \in M$ をとって、 p から出発して p に戻ってくる（区分的に滑らかな）閉曲線 $\gamma(t)$ を考えると、 Π_γ は $SO(T_pM)$ の元になる。

いよいよホロノミー群の定義

$$\mathrm{Hol}(M, g) = \{u \in SO(T_p M) \mid u = \Pi_\gamma\} \quad (3)$$

Bergers による分類定理

リーマン多様体のホロノミー群には次のような分類定理がある:

Theorem (Berger)

M が単連結かつ連結であり、さらに M より低い次元のリーマン多様体の直積として書けないものとする。このとき、いずれかの内一つが成り立つ:

- ▶ (M, g) はリーマン対称空間である $\Rightarrow$ リー群論によるホロノミー群の分類が知られている (らしい。私はよく知らないので訊かないでください)
- ▶ $\text{Hol} = \text{SO}(n)$. これは一般の場合
- ▶ $n = 2m$ かつ $\text{Hol} = \text{U}(m) \Rightarrow$ ケーラー多様体
- ▶ $n = 2m$ かつ $\text{Hol} = \text{SU}(m) \Rightarrow$ カラビヤウ
- ▶ $n = 4m$ かつ $\text{Hol} = \text{Sp}(m) \Rightarrow$ 超ケーラー多様体
- ▶ $n = 4m$ かつ $\text{Hol} = (\text{Sp}(m) \times \text{Sp}(1))/\{\pm 1\} \Rightarrow$ 四元数ケーラー多様体
- ▶ $n = 7$ かつ $\text{Hol} = G_2 \Rightarrow G_2$ 多様体 (G_2 は所謂例外型単純リー群)
- ▶ $n = 8$ かつ $\text{Hol} = \text{Spin}(7) \Rightarrow \text{Spin}(7)$ 多様体

例外型リー群こと G_2

Definition

コンパクトリー群 G_2 を次で定義する:

$$G_2 := \{g \in \mathrm{GL}_7(\mathbb{R}) \mid g^* \varphi = \varphi\}, \quad (4)$$

ここで、 φ は次で定義される 3-形式である:

$$\varphi := dx^{123} + dx^{145} + dx^{167} + dx^{246} - dx^{257} - dx^{347} - dx^{356}. \quad (5)$$

φ どっからでてきてん？

φ は次のようにも特徴づけられる:

- ▶ $\mathbb{R}^7$ の向き Vol を一つ固定する。3-形式 φ が次を満たすとき、正値形式と呼ぶ:

$$(u, v)_\varphi := \frac{(u \lrcorner \varphi) \wedge (v \lrcorner \varphi) \wedge \varphi}{6\text{Vol}} \text{ が正定値} \quad (6)$$
$$\|\varphi\|^2 = 7$$

- ▶ $(\cdot, \cdot)_\varphi$ に関する正規直交基底を適当にとると式 (5) が復元できる。したがって特に $G_2 \subset \text{SO}(\mathbb{R}^7)$ がわかるので、特に G_2 のコンパクト性がわかる。

八元数体を使っても定義できる

八元数体は~~Cayley~~数とも呼ばれているので ~~$\mathbb{C}$ とかくことにする~~。英語で Octonion と呼ばれているので、頭文字をとって $\mathbb{O}$ と書くことにする。

$$\mathbb{O} := \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^7 a_j e_j \mid a_j \in \mathbb{R} \right\} \quad (7)$$

ただし、ここで e_j たちは適当な乗数表を満たしている（覚える必要はない。私も覚えていない）。

$a = a_0 + \sum a_j e_j \in \mathbb{O}$ の虚部 $\text{Im}(a)$ を $\sum a_j e_j$ で定め、外積形式を

$$a \times b := \text{Im}(ab) \quad (8)$$

で定める。

手を動かせばわかる事実

- ▶ 交換子 $[a, b] := ab - ba$ を用いると、 φ は次のように書ける:

$$\varphi(a, b, c) = \frac{1}{2}(a, [b, c]) \quad (9)$$

ここで、 $(\cdot, \cdot)$ は $1, e_1, \dots, e_7$ を正規直交基底にする内積。

- ▶ 正規直交系 $e_1, e_2, e_4 \in \mathbb{R}^7$ が $e_4 \perp e_1 \times e_2$ を満たしているとする。
このとき

$$e_3 := e_1 \times e_2, e_5 := e_1 \times e_4, e_7 := e_4 \times e_3, e_6 := e_7 \times e_1 \quad (10)$$

と定めると、 $\{e_j\}$ は $\mathbb{R}^7$ の正規直交基底となり、 φ が (5) の表示になる。

Remark

上の事実から $\dim G_2 = 14$ がわかる。

頭が良いとわかる事実

- ▶ $G_2 = \text{Aut}(\mathbb{O})$
- ▶ $\mathfrak{g}_2 = \text{Lie}(G_2)$ は単純リー環の一つ

G_2 多様体の定義

Definition

- ▶ 向き付き 7 次元多様体 M の上の 3-形式 φ が各接空間 $T_p M$ 上で正值形式であるとき、 M 上の正值形式であるという。
- ▶ 正值形式 φ が各点で定める内積 $(\cdot, \cdot)_\varphi$ を束ねて得られるリーマン計量を g_φ と書くことにする。
- ▶ 正值形式 φ が閉かつ (g_φ に関して) 余閉であるときに φ を G_2 構造であるという。
- ▶ それはそれとしてホロノミー群が G_2 であるようなリーマン多様体を G_2 多様体と呼ぶ。

定義に関する諸注意

- ▶ M 上に G_2 構造が存在するとき、ホロノミー群は G_2 に含まれることがわかる。さらにコンパクトであれば、基本群が有限群であることとホロノミー群が G_2 であることと同値である。
- ▶ 向き付き多様体 M とその上の G_2 構造の組のことを G_2 多様体と呼び、ホロノミー群が G_2 に一致するときに既約 G_2 多様体とか呼んでいる人もいる。
- ▶ 単に正值 3-形式のことを G_2 構造と呼んで、閉かつ余閉なときに捻じれなし G_2 形式と呼んでいる人もいた

自明な例

$\mathbb{R}^7$ 上に (5) の正値形式を乗せれば OK

お手軽な例

ホロノミー群が SU であるようなコンパクト多様体を考える。四次元の場合は $K3$ 曲面と呼ばれ、六次元の場合はカラビヤウ 3-様体と呼ばれている。このとき、次の事実が知られている:

- ▶ X をカラビヤウ多様体とすると、リッチ平坦計量に対応するケーラー形式 ω と、正則シンプレクティック形式 Ω が存在している。
- ▶ X が $K3$ 曲面の時、 $X \times \mathbb{R}^3$ 上に G_2 構造を次で定められる

$$\varphi = dx^{123} + dx^1 \wedge \omega + dx^2 \wedge \operatorname{Re}(\Omega) - dx^3 \wedge \operatorname{Im}(\Omega) \quad (11)$$

- ▶ X がカラビヤウ 3 様体のとき、 $X \times \mathbb{R}$ 上に G_2 構造を次で定められる

$$\varphi = dx \wedge \omega + \operatorname{Re}(\Omega) \quad (12)$$

非自明な例 1 (Kummer 構成)

- ▶ $\mathbb{R}^7$ の上に (5) の正值形式を乗せたものを適当に格子で割って、トーラス T^7 に (捻じれあり) G_2 構造を乗せる
- ▶ トーラスを有限群 $\Gamma \subset G_2$ で割ると、特異点付きの G_2 多様体を得られる
- ▶ (Topological な) 特異点解消の上に "ほぼ" 捻じれなし G_2 構造の族が定義できるが、ちょっと摂動すると捻じれなし G_2 構造が定義できる

Example: 適当な $\Gamma \subset G_2$ に対して T^7/Γ の特異点は局所的に “クレパント特異点” とトーラスの直積になる。このとき、“クレパント特異点解消” とトーラスの直積が特異点解消を与え、(11) or (12) の G_2 構造が局所的に載せられる。

非自明な例 2 (捻り連結和の方法)

三次元カラビヤウ多様体 M であって次を満たすものを作る (これはカラビヤウ多様体にありがとうと毎日言っていると作れる):

- ▶ M は非コンパクト完備
- ▶ 無限遠方で

$$\mathbb{R}_{>0} \times S^1 \times K3 \quad (13)$$

に漸近していく。

上を満たす M_1, M_2 を持ってきて、 $M_1 \times S^1$ と $M_2 \times S^1$ を各 M_i 無限遠方の S^1 と直積した S^1 を挿げ替えるようにして張り合わせると、"ほぼ" 捻じれなしの G_2 構造の族が作れるので、やっぱり適当な摂動をすれば捻じれなし G_2 構造を作れる。

Joyce による局所理論

コンパクト向き付き単連結 7 次元多様体 M を固定する。 $\mathcal{P} = \{\varphi \mid M \text{ 上の捻じれなし正值形式}\}$ とし、($\mathcal{P} \neq \emptyset$ と仮定しておく)
 $\mathcal{G} = \{f \in \text{Diff}(M) \mid f \sim \text{id}\}$ とおく。このとき、

$$\mathcal{M} := \mathcal{P}/\mathcal{G} \tag{14}$$

を M 上の G_2 構造のモジュライ空間という。

Theorem

$\mathcal{M}$ は有限次元多様体であり、 $\mathbb{H}_\varphi^3(M)$ と局所同相である。

Langlais による周期の理論

G_2 多様体にはカラビヤウ多様体などと同様に周期の理論を考えることができる：

G_2 の各ファイバー $T_p M$ への作用は、束への作用 $G_2 \curvearrowright TM$ を定め、特に $\wedge^k T^* M$ への作用を定める。このとき、ファイバーごとに既約表現への分解

$$\begin{aligned}\wedge^2 T_p^* M &= \wedge_{14}^2 T_p^* M \oplus \wedge_7^2 T_p^* M \\ \wedge^3 T_p^* M &= \wedge_{27}^3 T_p^* M \oplus \wedge_7^3 T_p^* M \oplus \wedge_1^3 T_p^* M\end{aligned}\tag{15}$$

が束としての直和分解を与えている（ここで、下付き添え字は既約表現の次元）。

Remark

$\wedge^1 T_p^* M = T_p^* M$ は既約である（(10) とかを使うとわかる）。

$\wedge^6 T_p^* M, \wedge^5 T_p^* M, \wedge^4 T_p^* M$ はそれぞれ $k = 1, 2, 3$ をホッジ作用素で移せば OK.

調和形式の分解

特に、 φ が捻じれなしであれば、(15) の分解は調和形式まで落ちる:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_{\varphi}^2(M) &= \mathbb{H}_{14}^2(M) \oplus \mathbb{H}_7^2(M) \\ \mathbb{H}_{\varphi}^3(M) &= \mathbb{H}_{27}^3(M) \oplus \mathbb{H}_7^3(M) \oplus \mathbb{H}_1^3(M)\end{aligned}\tag{16}$$

Fact: 実は $\text{Hol} = G_2$ なら $\mathbb{H}_7^3 = 0$ になっている。

周期の定義

G_2 多様体 (M, φ) に対して、 $H^3(M, \mathbb{R})$ の直和分解

$$H^3(M, \mathbb{R}) = H_\varphi^{(0)} \oplus H_\varphi^{(1)} \oplus H_\varphi^{(2)} \oplus H_\varphi^{(3)} \quad (17)$$

を (M, φ) の周期と呼ぶ。ただし、 $H_\varphi^{(i)}$ は以下のようにして定義する

$$\begin{aligned} H_\varphi^{(0)} &= \{[\eta] - [*_\varphi \eta] \mid \eta \in \mathbb{H}_1^3\} \\ H_\varphi^{(1)} &= \{[\eta] + [*_\varphi \eta] \mid \eta \in \mathbb{H}_{27}^3\} \\ H_\varphi^{(2)} &= \{[\eta] - [*_\varphi \eta] \mid \eta \in \mathbb{H}_{27}^3\} \\ H_\varphi^{(3)} &= \{[\eta] + [*_\varphi \eta] \mid \eta \in \mathbb{H}_1^3\}. \end{aligned} \quad (18)$$

周期領域の定義

周期領域 $\mathcal{D} \subset$

$\mathbb{P}(H^3(M, \mathbb{R})) \times \mathrm{Gr}(b_{27}^3; H^3(M, \mathbb{R})) \times \mathrm{Gr}(b_{27}^3; H^3(M, \mathbb{R})) \times \mathbb{P}(H^3(M, \mathbb{R}))$
を次で定める：

$$\mathcal{D} = \{(H^{(0)}, H^{(1)}, H^{(2)}, H^{(3)}) \mid \text{Hodge Riemann condition}\} \quad (19)$$

いい感じの結果

Theorem (Langlais 2024)

はめ込み

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D} \tag{20}$$

が存在して、適切な意味で計量の構造も復元できる。

参考文献

- ▶ D. Joyce, Compact manifolds with special holonomy: 大体全部書いてあるが高いし、大学の図書館や電子ブックにもしばしばないことがある。元論文を読めばよいという説もある。
- ▶ S. Karigiannis et.al., Lectures and surveys on G_2 manifolds and related topics : Karigiannis さんの書いた入門部分が arXiv に公開してある。本当はこれの最初の方をやるつもりだった。やるつもりだったのにどうして…
- ▶ T. Languais, Geometry and periods of G_2 moduli spaces (arXiv:2410.09987) : 最後の方の元論文。Karigiannis さんのノートを読めば大体読める。