

“悪い商”の非可換幾何学

@Esquisse1102

第 8 回すうがく徒のつどい

2025/10/12

Table of Contents

1. Introduction
2. C^* -Algebras and Gelfand Duality
3. K -Theory for C^* -Algebras
4. Bad Quotients
5. NC Boundary of Modular Curves
6. References

Introduction

環 = 和と差と積が定まった集合で、分配法則 $(a(b+c) = ab+bc)$ などを満たすもの

e.g. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{C})$ は (自然な演算で) 環

特に積が可換 ($ab = ba$) となる環を可換環という

e.g. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は可換環, $n \geq 2 \implies M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{C})$ は非可換環

関数環

X を “空間” とするとき, X 上の (複素数値) 関数全体

$F(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{C}\}$ を考える. このとき, $f, g \in F(X)$ に対して

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x), \quad x \in X$$

$$fg(x) := f(x)g(x), \quad x \in X$$

で和と差と積を定めると $F(X)$ は可換環. これを X 上の関数環という

基本原理

空間を調べる = 関数環を調べる

関数環を考える際には、空間が持つ構造に応じて関数の種類も制限する

e.g. 位相空間 $\rightarrow$ 連続関数, 可微分多様体 $\rightarrow$ 可微分関数

多項式で表される関数

$X \subset \mathbb{C}^2$ に対して,

$$P(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は多項式で表される}\}$$

と定める

e.g.

$$f(x, y) = x^3 - xy + y^2 \in P(X), \quad f(x, y) = e^x + \frac{1}{y} \notin P(X), \quad (x, y \in X)$$

イデアルと極大イデアル

イデアル

可換環 R の部分集合 I が以下の条件をみたすとき, I を R のイデアルという

- $a, b \in I \implies a + b \in I$
- $r \in R, a \in I \implies ra \in I$

e.g.

任意の環 R に対して, R や $\{0\}$ は R のイデアル

$R = \mathbb{Z} \implies n\mathbb{Z} := \{nm \mid m \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアル

極大イデアル

可換環 R の R 自身でないイデアルのうち, 包含関係 ($I \subset I'$) で極大なものを極大イデアルという

e.g. $p \in \mathbb{Z}$: 素数 $\implies p\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の極大イデアル

$P(X)$ の極大イデアル

複素係数二変数多項式 $g = g(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ を一つとり,

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid g(x, y) = 0\}$$

とする. このとき, $(x, y) \in X$ に対して,

$$M_{(x,y)} := \{f \in P(X) \mid f(x, y) = 0\}$$

とすると, $M_{(x,y)}$ は $P(X)$ の極大イデアルになる

可換環 A の極大イデアル全体を $\mathcal{M}(A)$ とかくとき, 以下が成り立つ:

極大イデアルと点の対応

$$X \ni (x, y) \xrightarrow{1:1} M_{(x,y)} \in \mathcal{M}(P(X))$$

⇔ 関数環 $P(X)$ から空間 X が復元できる!

非可換幾何学とは

空間と可換環（関数環）の対応には、考える空間や環のクラスに応じて様々なものが知られている：

- コンパクト Hausdorff 空間 $\leftrightarrow$ 可換 C^* 環 $\leftarrow$ この後紹介する
- アフィンスキーム $\leftrightarrow$ 可換環
- Stone 空間 $\leftrightarrow$ Bool 代数

$\rightsquigarrow$ 可換環 = (ある適当な構造の定まった) 空間上の関数環

一方で、環には積が可換でない非可換環もある (e.g. $M_n(\mathbb{C})$ ($n \geq 2$))

非可換幾何学の発想

「非可換環 = “非可換空間” 上の関数環」とみなす

そのような“非可換空間”上での幾何学の展開を目指すのが**非可換幾何学** (Noncommutative Geometry) と呼ばれる分野

注：数学的に定義された「非可換空間」という対象があるわけではない

非可換幾何学の流儀

対象となる空間の違いに応じて、その上で展開される幾何学は異なる

e.g. 可微分多様体 $\rightarrow$ 微分幾何学, 代数多様体 $\rightarrow$ 代数幾何学

Connes による非可換幾何学 (NCG à la Connes)

作用素環の理論を基礎とする

$\rightsquigarrow$ 非可換 C^* 環 = 非可換位相空間上の関数環

非可換代数幾何学

代数幾何学の手法を非可換環に対して展開

$\rightsquigarrow$ 非可換環 = 非可換代数多様体 (非可換スキーム) 上の関数環

非可換シンプレクティック幾何学

シンプレクティック多様体の変形量子化を背景とする

$\rightsquigarrow$ Poisson 代数の変形量子化 = 非可換シンプレクティック多様体上の関数環

注：ここでの分類や呼称はあくまで便宜的なもの

非可換幾何学という言葉は様々な文脈で幅広く用いられている

非可換幾何学を展開する動機

Connes, Noncommutative Geometry 冒頭より引用 ※ 強調は講演者によるもの

The theory, called noncommutative geometry, rests on two essential points:

1. The existence of many natural spaces for which the classical set-theoretic tools of analysis, such as measure theory, topology, calculus, and metric ideas lose their pertinence, but which correspond very naturally to a noncommutative algebra.

(中略)

2. The extension of the classical tools, such as measure theory, topology, differential calculus and Riemannian geometry, to the noncommutative situation.

⇒ 本講演では、それぞれ以下について紹介する：

1. “悪い商” (bad quotient)
2. K 理論

C^* -Algebras and Gelfand Duality

Banach 空間と Hilbert 空間

以下、ベクトル空間は全て複素数係数で考える

ノルム空間 = ベクトル空間 V とその上のノルム $\|\cdot\|$ のペア

内積空間 = ベクトル空間 V とその上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ のペア

Banach 空間

Banach 空間 = ノルムから定まる距離 $d(v, w) := \|v - w\|$ に関して完備となるノルム空間

e.g. $\mathbb{C}^n$ にノルム $\|x\| := (x_1\overline{x_1} + \cdots + x_n\overline{x_n})^{1/2}$ を定めたものは Banach 空間

Hilbert 空間

Hilbert 空間 = 内積から定まるノルム $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$ によって Banach 空間となる内積空間

e.g. $\mathbb{C}^n$ に内積 $\langle x, y \rangle := x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$ を定めたものは Hilbert 空間

定義から, Hilbert 空間 $\implies$ Banach 空間

例：二乗総和可能数列のなす空間 ℓ^2

複素数列 $(x_1, x_2, \dots)$ であって、各項の絶対値の二乗の和が収束するものの全体の集合を ℓ^2 とかく：

$$\ell^2 := \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$$

このとき、 ℓ^2 上の演算と内積を以下で定めると ℓ^2 は（無限次元の）Hilbert 空間になる

$$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$$

$$\langle (x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

ただしここで、 $(x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \in \ell^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ である

例：有界線型作用素のなす空間 $\mathcal{B}(V, W)$

V, W を Banach 空間とすると、線型写像 $T: V \rightarrow W$ のノルムを

$$\|T\| := \sup_{\|v\|=1} \|Tv\|$$

で定める。このとき、

$$\mathcal{B}(V, W) := \{T: V \rightarrow W \mid \|T\| < \infty\}$$

は Banach 空間となる ($\mathcal{B}(V, W)$ の元を有界線型作用素という)

※ 演算は $(T + S)(v) := Tv + Sv$, $(\lambda T)v := \lambda Tv$ ($v \in V, \lambda \in \mathbb{C}$) で定める

Banach 空間 V に対して、 $\mathcal{B}(V) := \mathcal{B}(V, V)$ と定める

※ $\dim V < \infty$ のとき、 V の基底を固定すると $\mathcal{B}(V)$ は $M_n(\mathbb{C})$ と同一視できる

$B(H)$ の性質

Hilbert 空間 H に対して, $B(H)$ は次の性質をもつ:

- Banach 空間
- $\mathbb{C}$ 代数 (= ベクトル空間 + 積構造 s.t. 分配法則 etc.)
- 対合: $B(H) \ni T \mapsto T^* \in B(H)$
- ノルムと積の条件: $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|, \forall T, S \in B(H)$
- C^* 条件: $\|T^*T\| = \|T\|^2, \forall T \in B(H)$

※ T^* は T の共役作用素

(条件 $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ で一意に定まる作用素)

e.g. $\dim H < \infty$ のとき, T^* は T の転置共役行列

※ 対合 = 共役線形写像で $T^{**} = T, (TS)^* = S^*T^*$ を満たすもの

⇨ 上記の性質を抽象化したものが C^* 環

C* 環

C* 環 = Banach 空間 + $\mathbb{C}$ 代数 + 対合 s.t. ノルムと積の条件 & C* 条件

e.g. $\mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{C})$, $B(H)$ は C* 環

コンパクト作用素のなす環 $\mathcal{K}(H)$

Hilbert 空間 H に対して,

$$\mathcal{K}(H) := \overline{\{T \in B(H) \mid \dim(\text{Im} T) < \infty\}}$$

とすると, 包含 $\mathcal{K}(H) \subset B(H)$ から定まる演算とノルムで $\mathcal{K}(H)$ は C* 環になる. $\mathcal{K}(H)$ の元をコンパクト作用素という

- $B(H)$ の単位元 I (= 恒等作用素) に対して $I \notin \mathcal{K}(H)$
- $\mathcal{K}(H)$ は $B(H)$ のイデアル

注: 以降, 特に断らない限り, 単位元を持つ C* 環を単に C* 環という

連続関数環 $C(X)$

コンパクト Hausdorff 空間 X に対して,

$$C(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は連続}\}$$

と定義すると, $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$, および
一様ノルム ($\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$) により $C(X)$ は Banach 空間
さらに

$$(fg)(x) := f(x)g(x), \quad f^*(x) := \overline{f(x)}$$

によって $\mathbb{C}$ 代数の構造と対合が定まり, $C(X)$ は C^* 環となる

$B(H)$ や $\mathcal{K}(H)$ は非可換 C^* 環の例であり, $C(X)$ は可換 C^* 環の例
⇨ 実は可換 C^* 環の例はこれしかない

Gelfand-Naimark の定理

Gelfand-Naimark の定理

任意の可換 C^* 環 A に対し，あるコンパクト Hausdorff 空間 $\hat{A}$ が存在して，

$$A \simeq C(\hat{A})$$

- ・ $\simeq$ は， $*$ 同型（全単射な $*$ 準同型）かつ等距離（＝ノルムを保つ）の意味
- ・ $*$ 準同型 = $\mathbb{C}$ 代数の構造と対合を保つ写像
- ・ 実は Gelfand-Naimark のから「 $*$ 同型 $\implies$ 等距離」が成り立つ
- ・ C^* 環の間の射としては， $*$ 準同型を用いる

以下の圏を考える：

$\text{CptHaus} :=$ コンパクト Hausdorff 空間と連続写像のなす圏

$\text{Comm}C^*\text{-Alg} :=$ 可換 C^* 環と単位元を保つ $*$ -準同型のなす圏

Gelfand 双対性

Gelfand-Naimark の定理から次の圏同値が得られる：

Gelfand 双対性

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CptHaus} & \simeq & (\mathbf{CommC^*-Alg})^{\mathrm{op}} \\ X & \longmapsto & C(X) \\ \widehat{A} & \longleftarrow & A \end{array}$$

CptHaus	CommC*-Alg
コンパクト Hausdorff 空間 X	可換 C^* 環 $C(X)$
開集合 $U \subset X$	閉イデアル $C_0(U) \subset C(X)$
閉集合 $X \setminus U$	商 C^* 環 $C(X)/C_0(U)$
直積 $X \times Y$	テンソル積 $C(X) \otimes C(Y)$
距離化可能	可分

↪ 非可換 C^* 環 = “非可換位相空間” 上の関数環

可換 C^* 環のスペクトル

Gelfand-Naimark の定理におけるコンパクト Hausdorff 空間は以下のようにして構成される：

可換 C^* 環のスペクトル

可換 C^* 環 A に対して、

$$\hat{A} := \{\chi \in \mathcal{B}(A, \mathbb{C}) \mid \chi(ab) = \chi(a)\chi(b), \forall a, b \in A, \chi \neq 0\}$$

を A の **スペクトル** といい、 $\hat{A}$ の元を A の **指標** という

- Banach 空間 A に対して、 $A^* := \mathcal{B}(A, \mathbb{C})$ をその **双対空間** という
- Banach 空間の双対空間には **弱*位相** と呼ばれる位相が定まる
(弱*位相で $\chi_i \rightarrow \chi \iff$ 任意の $a \in A$ に対して $\chi_i(a) \rightarrow \chi(a)$)
- $\hat{A} \subset A^*$ は相対位相でコンパクトかつ Hausdorff

⇨ このスペクトル $\hat{A}$ が Gelfand-Naimark の定理におけるコンパクト Hausdorff 空間

“スペクトル”の語源

$a \in A$ に対して $\hat{a} \in C(\hat{A})$ を $\hat{a}(\chi) := \chi(a)$ で定めると,
Gelfand-Naimark の定理における同型は

$$A \rightarrow C(\hat{A}) ; a \mapsto \hat{a}$$

で与えられる．また C^* 環 A と $a \in A$ に対して，

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - a: \text{可逆でない}\}$$

を a の A におけるスペクトルという

e.g. $A = \mathcal{B}(H)$, $T \in \mathcal{B}(H) \implies \sigma(T) = T$ の作用素としてのスペクトル

$\hat{A}$ をスペクトルという理由

任意の可換 C^* 環 A と $a \in A$ に対して

$$\sigma(a) = \hat{a}(\hat{A}) (= \{\chi(a) \in \mathbb{C} \mid \chi \in \hat{A}\})$$

e.g. $A = C(X)$, $f \in C(X) \implies \sigma(f) = f(X) \quad (X \ni x \xrightarrow{\sim} \text{ev}_x \in \widehat{C(X)})$

可換 C^* 環のスペクトルと極大イデアル

$\mathbb{C}$ 代数かつ Banach 空間であって、ノルムと積の条件を満たすものを ($\mathbb{C}$ 上の) Banach 環という

e.g. C^* 環は Banach 環

Gelfand-Mazur の定理

$\mathbb{C}$ 上の Banach 環 A に対して,

$$A : \text{体} \implies A \simeq \mathbb{C}$$

この定理より、可換 C^* 環 A と $\chi \in \widehat{A}$ に対して、 $\text{Ker} \chi$ は A の極大イデアル
逆に任意の極大イデアル $I \subset A$ に対して、商写像 $A \rightarrow A/I \simeq \mathbb{C}$ は A の指標となり、次が成り立つ：

$$\widehat{A} \ni \chi \xleftrightarrow{1:1} \ker \chi \in \mathcal{M}(A)$$

⇝ 可換環の素イデアル全体を “(素) スペクトル” と呼ぶ理由
(と思われる)

接合積 C^* 環

C^* 環 A に離散群 G が作用しているとする ($\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(A); g \mapsto \alpha_g$)

$C_c(G, A) := \{\sum_{g \in G} a_g g \text{ (有限和)} \mid a_g \in A\}$ に演算を以下で定める:

- $\cdot (\sum_g a_g g) + (\sum_g b_g g) := \sum_g (a_g + b_g) g$
- $\cdot \lambda(\sum_g a_g g) := \sum_g \lambda a_g g$
- $\cdot (\sum_g a_g g)(\sum_g b_g g) := \sum_{g,h} a_g \alpha_g(b_h) gh$
- $\cdot (\sum_g a_g g)^* := \sum_g \alpha_{g^{-1}}(a_g^*) g^{-1}$

接合積 C^* 環

$A \rtimes_{\alpha,r} G := \overline{C_c(G, A)}^{\|\cdot\|_r}$ を (被約) 接合積 C^* 環という

※ $\|\cdot\|_r$ は左正則表現から定まるノルム

$A = \mathbb{C}$ かつ α が自明のとき,

$$C_c(G, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[G]: \text{群環}, \quad C_r^*(G) := \mathbb{C} \rtimes_{\alpha,r} G: \text{(被約) 群 } C^* \text{ 環}$$

接合積 C^* 環に関する補足

接合積 C^* 環における積と対合は $gag^{-1} = \alpha_g(a)$, $g^* = g^{-1}$ となるようにして定めている:

$$\begin{aligned} \left(\sum_g a_g g\right) \left(\sum_g b_g g\right) &= \sum_{g,h} a_g g b_h h \\ &= \sum_{g,h} a_g (g b_h g^{-1}) gh \\ &= \sum_{g,h} a_g \alpha_g(b_h) gh \\ \left(\sum_g a_g g\right)^* &= \sum_g g^* a_g^* \\ &= g^{-1} a_g^* g g^{-1} \\ &= \sum_g \alpha_{g^{-1}}(a_g^*) g^{-1} \end{aligned}$$

K -Theory for C^* -Algebras

行列環と射影元

行列環

C^* 環 A に対して, A の元を成分とする $n \times n$ 行列 $M_n(A)$ を A の **行列環** という

$M_n(A)$ は行列の演算と適切なノルムで C^* 環となる (対合は転置共役)

射影元

$p \in A$ が **射影元** $\stackrel{\text{def}}{\iff} p = p^2 = p^*$

$\mathcal{P}_n(A) := \{p \in M_n(A) : \text{射影元}\}$, $\mathcal{P}_\infty(A) := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{P}_n(A)$ とする

$p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$ に対して, 同値関係を次で定める:

$$p \sim q \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists v \in M_{m,n}(A) ; p = v^*v, q = vv^*$$

※ $p, q \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{C})$ の場合, $p \sim q \iff \text{Im} p$ と $\text{Im} q$ がユニタリー同値

$\text{Proj}(A) := \mathcal{P}_\infty(A) / \sim$ と定義する (e.g. $\text{Proj}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{N}$)

K 群

$p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$ に対して, $p \oplus q := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ とすると, これは $\text{Proj}(A)$ に可換半群の構造を誘導する.

Grothendieck 群

可換半群 S に対して, $(s, t), (s', t') \in S \times S$ に次の同値関係を定める:

$$(s, t) \sim (s', t') \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists r \in S; s + t' + r = t + s' + r$$

アーベル群 $\mathcal{G}(S) := (S \times S) / \sim$ を S の Grothendieck 群という

※ (s, t) の同値類を $[s] - [t]$ とかく ($\mathcal{G}(S)$ の元は S の元の “形式的な差”)

C^* 環の K 群

C^* 環 A に対して, $K(A) := \mathcal{G}(\text{Proj}(A))$ を A の K 群という

e.g. $K(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$

K 群の性質

$\varphi: A \rightarrow B: *$ 準同型 $\implies \varphi_*: K(A) \rightarrow K(B); [p] \mapsto [\varphi(p)]:$ 群準同型
 $\rightsquigarrow K: C^*\text{-Alg} \rightarrow \text{Ab}: (\text{共変})$ 関手

C^* 環 A に対して, $SA := \{f: [0, 1] \rightarrow A: \text{連続} \mid f(0) = f(1) = 0\}$ を A の懸垂といい, $K_i(A) := K(\underbrace{SS \cdots SA}_{i \text{ 個}})$ ($i \geq 0$) を A の i 次 K 群という

- SA は単位元を持たない C^* 環
- 単位元を持たない C^* 環に対しても K 群は定義される
- $K_0(A) = K(A)$
- K_i も C^* 環の圏からアーベル群の圏への関手

短完全系列 $0 \rightarrow J \rightarrow A \rightarrow A/J \rightarrow 0$ に対して, 次の長完全系列が得られる:

$$\cdots \rightarrow K_{i+1}(A/J) \xrightarrow{\partial} K_i(J) \rightarrow K_i(A) \rightarrow K_i(A/J) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} K_0(J) \rightarrow K_0(A) \rightarrow K_0(A/J)$$

Bott 周期性: $K_2(A) \simeq K_0(A)$

位相的 K 群と Swan の定理

$X \in \text{CptHaus}$ とするとき, X 上のベクトル束の同型類全体 $\text{Vect}(X)$ はベクトル束の直和によって可換半群

コンパクト Hausdorff 空間の K 群

$X \in \text{CptHaus}$ に対して, $K(X) := \mathcal{G}(\text{Vect}(X))$ を X の K 群という

e.g. $\text{Vect}(\{*\}) \simeq \mathbb{N}$, $K(\{*\}) \simeq \mathbb{Z}$

Swan の定理

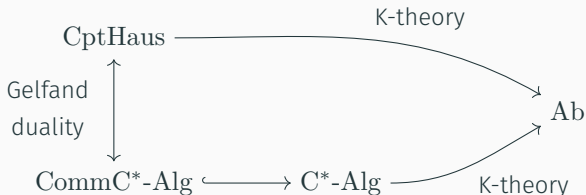
$X \in \text{CptHaus}$ に対して, $\text{Vect}(X) \simeq \text{Proj}(C(X))$ が成り立ち,

$$K(X) \simeq K(C(X))$$

$\rightsquigarrow$ C^* 環の K 群は位相空間に対する K 群を一般化したものと思える

C^* 環の K 理論 = “非可換空間” に対するコホモロジー

位相的 K 理論と C^* 環の K 理論は次のような関係にある：



⇒ C^* 環の K 理論は “非可換空間” に対する (コ) ホモロジー

※ C^* 環に対する K ホモロジー群 $K^0(A), K^1(A)$ もある
($K^i(C(X))$) を考えたときに, X に対して共変なので “ホモロジー”

C^* 環の K 理論の応用

C^* 環の K 理論は次のような応用をもつ：

C^* 環の分類

AF 環は K 理論的データで完全に分類される (Elliot)

Elliot program：なるべく広いクラスの可分核型単純 C^* 環を K 理論で分類する

指数定理の一般化

Fredholm 指数は境界準同型 $\partial: K_1(\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)) \rightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \simeq \mathbb{Z}$ と見なせる

$\rightsquigarrow$ 境界準同型 $\partial: K_1(A/J) \rightarrow K_0(J)$ を指数とする指数定理

Baum-Connes 予想

Baum-Connes 予想：群 C^* 環 $C_r^*(G)$ の K 群に関する予想

Novikov 予想や Gromov-Lawson 予想, Kadison-Kaplansky 予想が系として従う

その他

- ・ 物性物理への応用 (バルク-境界対応, 準結晶, 量子ホール効果)
- ・ 粗幾何学との関係 (Roe 代数の K 群, 粗 Baum-Connes 予想)
- ・ etc.

Swan の定理の補足

自然な同一視 $M_n(C(X)) = C(X, M_n(\mathbb{C}))$ に注意すると, $p \in \mathcal{P}_n(C(X))$ に対して $p(x) \in M_n(\mathbb{C})$ は射影行列

$\rightsquigarrow x \in X$ に対してベクトル空間 $\text{Im}(p(x))$ が定まり, $E_p := (\text{Im}(p(x)))_{x \in X}$ は X 上のベクトル束になる

このとき, Swan の定理における同型は

$$\text{Proj}(C(X)) \xrightarrow{\cong} \text{Vect}(X) ; [p] \mapsto [E_p]$$

で与えられる

なお, $p \in \mathcal{P}_n(A)$ に対して, pA^n は A 上の射影加群であり, 逆に A 上の任意の射影加群は $M_n(A)$ ($\exists n \in \mathbb{N}$) の射影を定める

$\rightsquigarrow C^*$ 環の K 群の定義は環に対する代数的 K 群 (K_0 群) と一致する

※ $A = C(X) \implies pC(X)^n \simeq \Gamma(E_p)$

Bad Quotients

商空間 = 空間を同値関係 $\sim$ で割ったもの : $X \rightsquigarrow X/\sim$

群作用による商空間

群 G が空間 X に作用しているとする (i.e. $G \curvearrowright X$). このとき,

$$x \sim_G y \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists g \in G \text{ s.t. } gx = y$$

で同値関係を定めることで得られる商空間 $X/\sim_G$ を $G \backslash X$ とかく
e.g.

$$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}; x \mapsto x + n, (n \in \mathbb{Z}) \implies \mathbb{Z} \backslash \mathbb{R} \simeq S^1$$

$$\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (x + n, y + m), ((n, m) \in \mathbb{Z}^2)$$

$$\implies \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2 \simeq S^1 \times S^1 =: \mathbb{T}^2$$

群の作用が“良い”ときには商空間は扱いやすいものになる

e.g. G : 離散群, $X \in \text{CptHaus}$ かつ G は固有不連続かつ自由に作用

$$\implies G \backslash X \in \text{CptHaus}$$

“悪い商”

作用が“悪い”ときには？

円周への無理数回転による作用

$\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \curvearrowright S^1$; $z \mapsto e^{in\theta}z$, ($n \in \mathbb{Z}$) (無理数回転)

$\implies \mathbb{Z} \backslash S^1$: NOT Hausdorff

さらに, $\forall z \in S^1$ に対して, その軌道 $\mathbb{Z}z \subset S^1$ は稠密

$\rightsquigarrow C(\mathbb{Z} \backslash S^1) = \mathbb{C} = C(\{*\})$

※ 商空間上の連続関数 = 軌道上で値が等しい連続関数

※ 稠密な部分集合上で値が等しい連続関数は定数関数

i.e. 連続関数環では $\mathbb{Z} \backslash S^1$ と一点集合 $\{*\}$ を区別できない！

$\rightsquigarrow$ このような商空間を“悪い商” (bad quotient) という

注：“悪い商”についての明確な数学的定義があるわけではない

無理数回転環

Connes の提案

接合積 C^* 環 $C(X) \rtimes_{\alpha,r} G$ を “悪い商” $G \backslash X$ の関数環とみなそう！

$\rightsquigarrow G \backslash X$ は非可換環 $C(X) \rtimes_{\alpha,r} G$ を関数環としてもつ “非可換空間”

無理数回転環

無理数回転 $\alpha_\theta: \mathbb{Z} \curvearrowright S^1; z \mapsto e^{in\theta}z, (n \in \mathbb{Z})$ に対して,

$$C(S^1) \rtimes_{\alpha_\theta,r} \mathbb{Z}$$

を無理数回転環という

Remark

$\theta \in \mathbb{Q} \implies C(\mathbb{Z} \backslash S^1) = C(S^1) \sim_M C(S^1) \rtimes_{\alpha_\theta,r} \mathbb{Z}$ ($\sim_M$: 強森田同値)

$\rightsquigarrow$ 接合積 C^* 環は商空間上の連続関数環の自然な拡張になっている

トーラス $\mathbb{T}^2$ の連続関数環

無理数回転環が豊かな数学的構造を持つことを説明するために、**非可換トーラス**と呼ばれる C^* 環について説明する

対応「直積 $\leftrightarrow$ テンソル積」より、トーラス $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ の関数環は

$$C(\mathbb{T}^2) \simeq C(S^1) \otimes C(S^1)$$

となる

$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とみなすと、 $C(S^1)$ は $\bar{x} \mapsto e^{2\pi i x}$ で生成される ($\bar{x} = x \bmod 1$)
そこで

$$u: \bar{x} \mapsto e^{2\pi i x}, \quad v: \bar{y} \mapsto e^{2\pi i y}$$

とすると、同型

$$C(S^1) \otimes C(S^1) \xrightarrow{\simeq} C(\mathbb{T}^2); u \otimes v \mapsto uv$$

を通じて、 $C(\mathbb{T}^2)$ は u と v で生成される ($uv(\bar{x}, \bar{y}) := u(\bar{x})v(\bar{y})$)

非可換トーラス

$C(\mathbb{T}^2)$ の生成元 u と v は次を満たす：

$$u^*u = uu^* = 1, v^*v = vv^* = 1, uv = vu$$

$\rightsquigarrow C(\mathbb{T}^2)$ は $uv = vu$ を満たすユニタリー u, v で生成される C^* 環

この関係式 $uv = vu$ を $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を使って**非可換化**する

非可換トーラス

二つのユニタリー U, V で生成され、関係式 $UV = e^{2\pi i\theta} VU$ を満たす C^* 環を**非可換トーラス**といい、 A_θ で表す

※ 非可換トーラスは存在し、同型を除いて一意に定まる

非可換トーラスと無理数回転環

非可換トーラスと無理数回転環には次の関係がある：

非可換トーラスと無理数回転環の関係

$\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対して,

$$A_\theta \simeq C(S^1) \rtimes_{\alpha_\theta, r} \mathbb{Z}$$

↪ この同型から無理数回転環のことを非可換トーラスともいう
(逆も然り)

非可換トーラスは作用素環論的にも興味深い対象であるが、実は物性物理（整数量子ホール効果）の文脈でも現れる

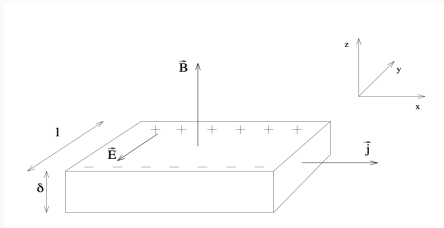
ホール効果

非常に薄い金属試料 (xy 平面) 上を電子が運動できる物質を考える
面と垂直な z 方向に磁場をかけ、 x 方向に電流を流すと、 $-y$ 方向にローレンツ力が働き、電流の向きと垂直な y 方向に電圧（ホール電圧）が生じる．これをホール効果という

N : 電子密度, e : 電気素量, δ : 試料の幅, B : 磁場の強さ, h : プランク定数とすると,

$$R_H := \frac{h}{e^2}, \nu := \frac{N\delta h}{Be}$$

をそれぞれホール抵抗, filling factor という

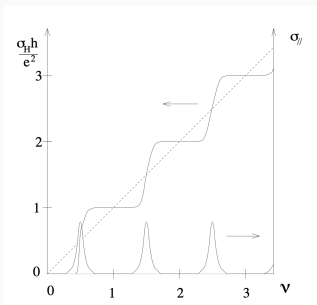


量子ホール効果

古典的なホール効果の場合，ホール伝導度 σ_H (y 方向のホール電圧と x 方向の電流 I の比率) は以下ようになる

$$\sigma_H = \frac{\nu}{R_H}$$

一方で，温度 1K 以下の環境下では，ホール伝導度と filling factor の間に整数値でプラトーが発生し，これを整数量子ホール効果という



Bellissard, et.al. , 1994 より引用

量子ホール効果と非可換トーラス

整数量子ホール効果の物理モデルを考えたい．以下の設定で考える：

- ・ 相互作用をしない一粒子で近似する
- ・ 離散的な格子で近似する
- ・ ハミルトニアンは有界とする
- ・ ハミルトニアンはフェルミ準位でスペクトルにギャップをもつ

$a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $f \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ として, $U, V \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ を

$$(Uf)(m, n) := e^{-ia_2 m} f(m, n+1), \quad (Vf)(m, n) := e^{-ia_1 n} f(m+1, n)$$

で定め, ハミルトニアン H_a を以下で定める：

$$H_a := U + V + U^* + V^*$$

このとき, $\theta := a_2 - a_1$ とすれば, U, V は以下の関係式を満たす：

$$VU = e^{2\pi i \theta} UV$$

$\rightsquigarrow$ ハミルトニアンは非可換トーラス A_θ の元とみなせる

稠密部分環上の巡回コサイクル

非可換トーラスの稠密部分環 $\mathcal{A}_\theta$ を以下で定義する：

$$\mathcal{A}_\theta := \{b = \sum_{n,m} b_{n,m} U^n V^m \mid \{b_{n,m}\}_{n,m} \text{ は急減少}\}$$

$\mathcal{A}_\theta$ 上の作用素 δ_1, δ_2 を

$$\delta_1(\sum b_{n,m} U^n V^m) = 2\pi i \sum n b_{n,m} U^n V^m$$

$$\delta_2(\sum b_{n,m} U^n V^m) = 2\pi i \sum m b_{n,m} U^n V^m$$

で定める (i.e. $\delta_1 = 2\pi i U \frac{\partial}{\partial U}$, $\delta_2 = 2\pi i V \frac{\partial}{\partial V}$)

$\rightsquigarrow \tau(\sum a_{n,m} U^n V^m) := a_{0,0}$ とするとき,

$$\tau_2(a_0, a_1, a_2) := \tau(a_0(\delta_1 a_1 \delta_2 a_2 - \delta_2 a_1 \delta_1 a_2)), \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathcal{A}_\theta$$

は $\mathcal{A}_\theta$ 上の巡回コサイクルとなる

K 群とのペアリングと Chern 指標

上記の巡回コサイクルはある $\mathcal{A}_\theta$ 上の Fredholm 加群 (H, F, γ) の Chern 指標による像になっている：

$$\tau_2 = \text{Ch}([H, F, \gamma])$$

ここで、Chern 指標とは、次の図式を可換にする準同型である：

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Fredholm modules over } \mathcal{A}_\theta\} & \xrightarrow{\text{Ch}} & HC^*(\mathcal{A}_\theta) \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ K^*(A_\theta) & \xrightarrow{\beta} & \text{Hom}(K_*(A_\theta), \mathbb{C}) \end{array}$$

ただし、 α および β は、それぞれ以下のペアリングから得られる写像：

$$HC^*(\mathcal{A}_\theta) \times K_*(A_\theta) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$K^*(A_\theta) \times K_*(A_\theta) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

整数量子ホール効果の非可換幾何による説明

定理 (Connes (1980) , Bellissard (1988))

$\mu \in \mathbb{R}$ をフェルミ準位として, $P_\mu := 1_{(-\infty, \mu]}(H_a)$ をスペクトル射影とする (P_μ をフェルミ射影という). このとき

$$\sigma_H = \frac{1}{2\pi i R_H} \tau_2(P_\mu, P_\mu, P_\mu)$$

が成り立つ

右辺は $[\tau_2] \in HC^*(\mathcal{A}_\theta)$ と $[P_\mu] \in K(A_\theta)$ のペアリング

↪ 全ページの可換図式からこれは $[H, F, \gamma] \in K^*(A_\theta)$ と $[P_\mu] \in K(A_\theta)$ の指数ペアリングと一致

↪ ホール伝導度の整数性は**指数の整数性**として解釈される！

アデル類空間

上では物理に関連した“悪い商”の例を見た．実は“悪い商”は数論の文脈でも現れる

- $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} := \mathbb{R} \times \prod'_{p: \text{prime}} \mathbb{Q}_p$: アデル環 ($\prod'$ は制限直積)
- $I_{\mathbb{Q}} := \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}$
- $C_{\mathbb{Q}} := I_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^{\times}$: イデル類群

とするとき，掛け算による作用 $\mathbb{Q}^{\times} \curvearrowright \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ から得られる商空間 $\mathbb{Q}^{\times} \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ は“悪い商”になる

$$X_{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q}^{\times} \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$$

をアデル類空間という

Connes : Riemann ゼータ関数と力学系 $C_{\mathbb{Q}} \curvearrowright X_{\mathbb{Q}}$ の関係を発見
 $\rightsquigarrow$ Riemann 予想の研究へ

アデール類空間と Grothendieck トポス

Connes と Consani は Riemann 予想への挑戦の過程で以下のような興味深い事実を発見した

- ・ $A_{\mathbb{Q}}^f := \prod'_{p: \text{prime}} \mathbb{Q}_p$: 有限アデール環
- ・ $\widehat{\mathbb{Z}} := \prod'_{p: \text{prime}} \mathbb{Z}_p$
- ・ $\mathbb{N}^\times$: 対象 $\{*\}$, $\text{End}(*) = \mathbb{N}^\times$ の圏

とするとき,

$$\widehat{\mathbb{N}^\times} := \text{Sh}(\mathbb{N}^\times, J) : \text{Grothendieck トポス } (J : \text{chaotic topology})$$

とすれば, 以下が成り立つ:

Connes-Consani (2014)

$$\mathbb{Q}_+^\times \backslash A_{\mathbb{Q}}^f / \widehat{\mathbb{Z}}^* \simeq (\widehat{\mathbb{N}^\times} \text{ の点の同型類})$$

アデール類空間は, 最近では結び目と素数の類似との関係が議論されている

NC Boundary of Modular Curves

上半平面と $PSL_2(\mathbb{Z})$ の作用

以下の状況を考える：

- ・ 上半平面 $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$
- ・ $SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathcal{H}$ ：一次分数変換； $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z := \frac{az+b}{cz+d}$
- ・ $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{Z})$ ：指数有限部分群

このとき、 $Y(\Gamma) := \Gamma \backslash \mathcal{H}$ を **モジュラー曲線** という

$Y(\Gamma)$ は **カスプ** $\Gamma \backslash \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ を付け加えてコンパクト化することができる：

$$X(\Gamma) := \overline{Y(\Gamma)} = \Gamma \backslash (\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))$$

$X(\Gamma)$ を (コンパクト化された) **モジュラー曲線** という

$$\partial X(\Gamma) := \Gamma \backslash \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \text{ とかく}$$

$Y(\Gamma)$ および $X(\Gamma)$ には Riemann 面の構造が入る

上半平面の境界

このように作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{H}$ により得られる商空間は性質のよいものになっている

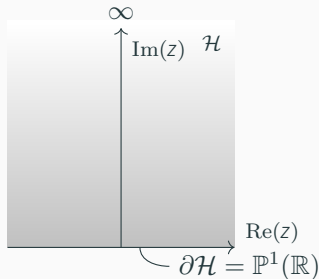
一方で, $\mathcal{H}$ の境界 $\partial\mathcal{H} = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ への作用 $\Gamma \curvearrowright \partial\mathcal{H}$ を考えると, その商空間は“悪い商”になる

$\Gamma \backslash \partial\mathcal{H}$ を **モジュラー曲線の非可換境界** という

$\Gamma \backslash \partial\mathcal{H}$ が“悪い商”である理由:

例えば, 作用 $PSL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \partial\mathcal{H}$ による
 $\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \partial\mathcal{H}$ の軌道は $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ である
(i.e. $PSL_2(\mathbb{Z})\infty = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$)

したがって無理数回転環のときと同様に,
 $C(PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash \partial\mathcal{H}) = \mathbb{C}$ となり, 連続関数環では
 $PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash \partial\mathcal{H}$ と一点を区別できない



モジュラー曲線の非可換境界の K 理論

定理 (Manin-Marcolli, 2002)

$\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{Z})$: 捻れのない指数有限部分群に対して

$$K_0(C(\partial\mathcal{H}) \rtimes \Gamma) \simeq H_1(X(\Gamma), \partial X(\Gamma), \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$$

- ・ 上の定理は $\mathcal{H}$ 上の幾何学的対象が, $\partial\mathcal{H}$ 上の非可換幾何的对象に反映されることをいっている
- ・ モジュラー曲線上のホモロジー群はモジュラー形式と深い関係がある

remark

$\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ に対して,

$$A_{\theta_1} \sim_M A_{\theta_2} \iff \exists g \in PSL_2(\mathbb{Z}) \text{ s.t. } \theta_1 = \theta_2$$

$\rightsquigarrow PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash \partial\mathcal{H}$: 非可換トーラスのモジュライ空間 ($\partial\mathcal{H} = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$)

c.f. $PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$: 楕円曲線 ($\mathbb{C}$ 上ではトーラス) のモジュライ空間

Hecke 作用素

G を群として, $\Gamma, \Gamma' \subset G$ をその部分群とする. このとき G と G' が commensurable であるという関係 ($\Gamma \approx \Gamma'$ とかく) を, 以下で定義する:

$$\Gamma \approx \Gamma' \stackrel{\text{def}}{\iff} [\Gamma : \Gamma \cap \Gamma'] < \infty \text{ かつ } [\Gamma' : \Gamma \cap \Gamma'] < \infty$$

また, 部分群 $\Gamma \subset G$ に対して

$$C_G(\Gamma) := \{g \in G \mid \Gamma \approx g\Gamma g^{-1}\}$$

と定義する

$G := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, $\Gamma \subset G$: 指数有限部分群とするとき, $g \in C_G(\Gamma)$ に対して, Hecke 作用素

$$T_g: H_1(X(\Gamma), \partial X(\Gamma), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X(\Gamma), \partial X(\Gamma), \mathbb{Z})$$

が定まる

Hecke 作用素との整合性

Manin-Marcolli による上記の結果を受けて, Mesland と Şengün は K 群における Hecke 作用素を定義し, 上記の同型の “Hecke 同変性” を証明した:

定理 (Mesland-Şengün, 2017)

捻れのない指数有限部分群 $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ と, $g \in C_G(\Gamma)$ に対して以下は可換

$$\begin{array}{ccc} K_0(C(\partial\mathcal{H}) \rtimes \Gamma) & \xrightarrow{\simeq} & H_1(X(\Gamma), \partial X(\Gamma), \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \\ T_g \downarrow & & \downarrow T_g \\ K_0(C(\partial\mathcal{H}) \rtimes \Gamma) & \xrightarrow{\simeq} & H_1(X(\Gamma), \partial X(\Gamma), \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

remark

Mesland-Şengün は群コホモロジーを介して上記の定理を示し, Bianchi modular group についても同様の結果を得ている

実は上記の定理には，その p 進類似も存在する．以下の状況を考える：

- $\mathbb{Q}_p$: $\mathbb{Q}$ の p 進ノルムによる完備化
- $\mathbb{C}_p$: $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の完備化
- $\mathcal{H}_p := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$: p 進上半平面
- $\partial\mathcal{H}_p = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$
- $SL_2(\mathbb{Q}_p) \curvearrowright \mathcal{H}_p$: 一次分数変換

これらは上半平面の場合 (∞ -adic の場合) の p 進類似になっている

∞ -adic	p -adic
$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}_p$
$\mathcal{H}$	$\mathcal{H}_p$
$\partial\mathcal{H} = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$	$\partial\mathcal{H}_p = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$
$SL_2(\mathbb{R})$	$SL_2(\mathbb{Q}_p)$

p 進測度と K ホモロジー

$\mu: \{U \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) : \text{clopen}\} \rightarrow \mathbb{C}_p$ が p 進測度
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mu$ は有限加法的かつ $\mu(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)) = 0$ かつ有界

$\text{Meas}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), \mathbb{C}_p) := \{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\text{上の } p \text{ 進測度}\}$

次の定理はモジュラー曲線の非可換境界に対する結果の p 進類似と考えられる ($\partial\mathcal{H}_p = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ に注意) :

定理 (Carey-Marcolli-Rennie(2009), Matsuoka(2018))

捻れのない離散部分群 $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Q}_p) =: G$ と, $g \in C_G(\Gamma)$ に対して以下は可換

$$\begin{array}{ccc} K^0(C(\partial\mathcal{H}_p) \rtimes \Gamma) & \xrightarrow{\cong} & \text{Meas}(\partial\mathcal{H}_p, \mathbb{Z})^\Gamma \\ \tau_g \downarrow & & \downarrow \tau_g \\ K^0(C(\partial\mathcal{H}_p) \rtimes \Gamma) & \xrightarrow{\cong} & \text{Meas}(\partial\mathcal{H}_p, \mathbb{Z})^\Gamma \end{array}$$

モジュラー曲線のホモロジー群がモジュラー形式と深い関係にあるように、 p 進測度はリジッド解析的なモジュラー形式と関係している：

定理 (Schnider-Teitelbaum)

$\text{Meas}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), \mathbb{C}_p)^\Gamma \simeq \{\Gamma \text{ に関する重さ } 2 \text{ のリジッド解析的モジュラー形式}\}$

また、本講演では上半平面と p 進上半平面の類似を強調するために前ページの定理を $\partial\mathcal{H}_p$ に対する定理としてみたが、実は $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$ に対する Bruhat-Tits 木 $\mathcal{T}$ の境界 $\partial\mathcal{T}$ に対して $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \simeq \partial\mathcal{T}$ が成り立ち、引用元の文献では $\partial\mathcal{T}$ に対する結果として定理が述べられている

References

- ・ 本講演の内容に関係した参考文献を挙げる
- ・ ただし、関連する文献を全て挙げると膨大な量になってしまうため、講演者の独断と偏見で紹介する文献を限定した
- ・ より詳しいことを知りたい方は、以下に挙げた文献の参考文献などをさらに参照していただきたい

非可換幾何学全般について

- ・ 本講演で紹介した Connes の非可換幾何学について知りたい人は、Connes 自身の著書 [Connes(1994)] を読まれるとよい。ただし、この本はいわゆる“教科書”ではないので、最初から通読するような読み方ではなく、気になった部分を拾い読みするスタイルがよいと思う（Connes のホームページで pdf が公開されている）
- ・ より教科書に近いスタイルの本としては、[Khalkhali(2013)] がある。本講演で主題として扱った“悪い商”についての解説や、本講演では詳しく扱えなかった巡回コホモロジーについても詳しく解説されている
- ・ 非可換幾何学の応用分野や関連事項についてはサーベイ論文 [Connes and Marcolli(2008)] に様々な話題が載っている。もちろんこの論文に載っていない話題もあるが、この論文だけでも 20 以上のテーマを扱っており、非可換幾何学の広がりを感じることができると思う。
- ・ 講演者による解説記事 (https://esquisse1102.github.io/A_NOTE_ON/NCG/what_is_NCG/) でも非可換幾何学の応用や参考文献について、いくつか紹介をしている

C* 環について

- ・ C* 環や作用素環についての教科書は和書洋書含めて多数出版されているが、個人的には [Douglas(1998)] がおすすめである． Banach 空間の基礎的な事項から説明されていて、記述も読みやすいと思う． 6,7 章は必ずしも読む必要は無いと思うが、趣味が合えば面白い内容だと思う
- ・ 既に関数解析に触れたことがある人には [Murphy(1990)] もおすすめである． こちらも記述が丁寧で読みやすい
- ・ なお、C* 環の具体例について知りたい場合には [Davidson(1996)] を見るとよい． 本講演でも紹介した非可換トーラスや接合積 C* 環についても載っている
- ・ 日本語だと [日合 and 柳 (2021)] の付録に C* 環の話が Gelfan-Naimark の定理も含めて載っている（この本は元々牧野書店から出版されていたが、同社の廃業に伴い現在はオーム社から出版されている）
- ・ 最近出版された [戸松 (2024)] では C* 環の具体例にもページが割かれている
- ・ [綿谷 (1987)] では非可換トーラスについての様々な見方が紹介されている

C^* 環の K 理論について

- ・ C^* 環の K 理論についての教科書もいくつかあるが、おそらく [Rørddam et al.(2000)Rørddam, Larsen, and Laustsen] が最も読みやすいと思う。AF 環の分類にもページが割かれているが、このあたりは興味に応じて取捨選択をすればよいと思う
- ・ AF 環の分類などを除いて上記の文献とほぼ同じ構成のレクチャーノートに [Richard(2020)] がある。巡回コホモロジーや散乱理論への応用についても触れられている
- ・ K ホモロジーについて知りたい人は [Higson and Roe(2000)] を読まれるとよい。粗幾何学との関係や指数定理との関係についても触れられている
- ・ 細かな証明などは無しで C^* 環の K 理論の概要だけを知りたい場合には [夏目 and 森吉 (2001)] を見るのがよいと思う。本講演でも言及した指数定理の一般化の話や Baum-Connes 予想についても触れられている
- ・ なお、 C^* 環の K 理論と関係の深い位相的 K 理論については、講演者のホームページ (https://esquisse1102.github.io/A_NOTE_ON/K-Theory/K-theory_books/) で紹介している

C^* 環の K 理論の応用について

- ・ 正直なところ, C^* 環の分類について講演者は全く詳しく無い. 日本語で読める紹介記事として [泉 (2005)] を挙げておく
- ・ 指数定理の一般化や Baum-Connes 予想については上で挙げた [Higson and Roe(2000)] や [夏目 and 森吉 (2001)] などを見てほしい
- ・ 物性物理への応用については, その方面の専門家による [窪田 (2023)] がある. 難易度は置いておくとして, この内容が日本語で学べることは極めて幸運なことである. 文献についての詳しい案内も載っている
- ・ なお, 本講演で紹介した整数量子ホール効果への応用については [Bellissard et al.(1994)Bellissard, van Elst, and Schulz-Baldes] と [Connes(1994), IV.6] を主に参考にした
- ・ 粗幾何学との関係については [Willett and Yu(2020)] が記述も丁寧でよいと思う. C^* 環の K 理論についてもそれなりにページを割いて解説している (ドラフト版が著者のホームページで公開されている)
- ・ 日本語の粗幾何学の文献として [深谷 (2019)] もある

“悪い商”について

- ・ “悪い商” の概要については例えば [Connes(1994), II] や [Connes and Marcolli(2008), §4], [Khalkhali(2013), II] に解説がある
- ・ アデル類空間と arithmetic site の関係を指摘した論文は [Connes and Consani(2014)] である
- ・ 結び目と素数の類似とアデル類空間の関係については [Connes and Consani(2024)], [Connes and Consani(2025)] で述べられている．また関連した事項として [Morishita(2025)] ではアデル類空間と Deniger の葉層力学系との関係を調べている
- ・ モジュラー曲線の非可換境界については [Manin and Marcolli(2002)] で初めてその関係が指摘された
- ・ C^* 環の K 理論における Hecke 作用素は [Mesland and Şengün(2020)] で定義されたものである
- ・ p 進測度と境界接合積の K ホモロジーとの同型は [Carey et al.(2011) Carey, Rennie, and Marcolli] で指摘され、この同型が Hecke 作用素と整合的であることを示したのが [Matsuoka(2018)] である

- [Bellissard et al.(1994)Bellissard, van Elst, and Schulz-Baldes] J. Bellissard, A. van Elst, and H. Schulz-Baldes, “The noncommutative geometry of the quantum hall effect,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 35, no. 10, pp. 5373–5451, 1994.
- [Carey et al.(2011)Carey, Rennie, and Marcolli] A. Carey, A. Rennie, and M. Marcolli, “Modular index invariants of mumford curves,” *Noncommutative Geometry, Arithmetic, and Related Topics*, pp. 31–73, 2011.
- [Connes(1994)] A. Connes, *Noncommutative geometry*. Academic Press, 1994.
- [Connes and Consani(2014)] A. Connes and C. Consani, “The arithmetic site, le site arithmétique,” *arXiv preprint arXiv:1405.4527*, 2014.

- [Connes and Consani(2024)] —, “Knots, primes and the adèle class space,” *arXiv preprint arXiv:2401.08401*, 2024.
- [Connes and Consani(2025)] —, “Knots, primes and class field theory,” *arXiv preprint arXiv:2501.06560*, 2025.
- [Connes and Marcolli(2008)] A. Connes and M. Marcolli, “A walk in the noncommutative garden,” *An invitation to noncommutative geometry*, pp. 1–128, 2008.
- [Davidson(1996)] K. R. Davidson, *C*-algebras by example*. American Mathematical Soc., 1996, vol. 6.
- [Douglas(1998)] R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*. Springer Science & Business Media, 1998, vol. 179.

- [Higson and Roe(2000)] N. Higson and J. Roe, *Analytic K-homology*. OUP Oxford, 2000.
- [Khalkhali(2013)] M. Khalkhali, *Basic noncommutative geometry*. European mathematical society Zürich, Switzerland, 2013.
- [Manin and Marcolli(2002)] Y. I. Manin and M. Marcolli, “Continued fractions, modular symbols, and noncommutative geometry,” *Selecta Mathematica*, vol. 8, no. 3, pp. 475–521, 2002.
- [Matsuoka(2018)] Y. Matsuoka, “Measures and k-theory on the boundary of trees,” Ph.D. dissertation, Nagoya University, 2018.
- [Mesland and Şengün(2020)] B. Mesland and M. H. Şengün, “Hecke operators in kk-theory and the k-homology of bianchi groups,” *Journal of Noncommutative Geometry*, vol. 14, no. 1, pp. 125–189, 2020.

- [Morishita(2025)] M. Morishita, “On a relation between deninger’s foliated dynamical systems and connes-consani’s adelic spaces,” *arXiv preprint arXiv:2508.15971*, 2025.
- [Murphy(1990)] G. J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*. Academic press, 1990.
- [Richard(2020)] S. Richard, “K-theory for c^* -algebras, and beyond,” <https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~richard/teaching/s2020/Kth.pdf>, 2020.
- [Rørdam et al.(2000)Rørdam, Larsen, and Laustsen] M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen, *An introduction to K-theory for C^* -algebras*. Cambridge University Press, 2000, vol. 49.

[Willett and Yu(2020)] R. Willett and G. Yu, *Higher index theory*.
Cambridge University Press, 2020, vol. 189.

References (Japanese)

- [泉 (2005)] 泉正己, “ C^* -環の分類理論”, 数学, 57 巻 3 号, pp. 282-301, 2005.
- [窪田 (2023)] 窪田陽介, 物性物理とトポロジー: 非可換幾何学の視点から, サイエンス社, 2023.
- [戸松 (2024)] 戸松玲治, 作用素環論入門, 共立出版, 2024.
- [夏目 and 森吉 (2001)] 夏目利一-森吉仁志, 作用素環と幾何学, 日本数学会, 2001.
- [日合 and 柳 (2021)] 日合文雄-柳研二郎, ヒルベルト空間と線型作用素, オーム社, 2021.
- [深谷 (2019)] 深谷友広, 粗幾何学入門: 「粗い構造」で捉える非正曲率空間の幾何学と離散群, サイエンス社, 2019.
- [綿谷 (1987)] 綿谷安男, “非可換トーラス入門”, 数理解析研究所講究録, 622 巻, pp. 1-22, 1987.