

アレクサンドロフ空間入門

岡本 和也

2025 年 10 月 11 日¹

¹2025 年 10 月 12 日, 8 ページ, 加筆修正.

定義

集合の組 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすとき位相空間 (topological space) とよぶ.

- $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$,
- $X \in \mathcal{O}$,
- $\forall u, v \in \mathcal{O} \ u \cap v \in \mathcal{O}$,
- $\forall S \subseteq \mathcal{O} \ \bigcup_{u \in S} u \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ を開集合系 (open set system), $u \in \mathcal{O}$ を開集合 (open set) とよぶ.

定義

写像 $f: X \rightarrow Y$ と集合 $\mathcal{O}, \mathcal{T}$ が次をみたすとき連続写像 (continuous map) とよび, $f: (X, \mathcal{O}) \rightarrow_{\text{連続}} (Y, \mathcal{T})$ と書く.

$$\forall u \in \mathcal{T} \ f^{-1}[u] \in \mathcal{O}.$$

アレクサンドロフ空間

開集合は任意個の和集合, 有限個の共通部分で閉じていた.
開集合が任意個の共通部分で閉じている位相空間を考えたい.

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすときアレクサンドロフ空間 (Alexandroff space) とよぶ.

$$\forall S \subseteq \mathcal{O} \ (S \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{u \in S} u \in \mathcal{O}).$$

例

- ① 有限位相空間はアレクサンドロフ空間.
- ② 離散位相 $(X, \mathcal{P}(X))$ はアレクサンドロフ空間.
- ③ アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合系 $\mathcal{F} := \{c \subseteq X \mid X \setminus c \in \mathcal{O}\}$ について, $(X, \mathcal{F})$ はアレクサンドロフ空間.

復習

集合 x, y, R について $\langle x, y \rangle \in R$ を xRy と略記する.

定義

集合の組 (X, R) が次をみたすとき, **前順序 (preorder)** とよぶ.

- $R \subseteq X \times X$,
- $\forall x \in X \ xRx$,
- $\forall x, y, z \in X \ (xRy \Rightarrow yRz \Rightarrow xRz)$.

定義

写像 $f: X \rightarrow Y$ と集合 R, S が次をみたすとき**順序を保存する**といい,
 $f: (X, R) \rightarrow_{\text{順序保存}} (Y, S)$ と書く.

$$\forall x, y \in X \ (xRy \Rightarrow f(x)Sf(y)).$$

アレクサンドロフ空間と前順序

アレクサンドロフ空間を調べるための順序と集合を定義する.

定義

集合 X , $\mathcal{O}$ について X 上の特殊化順序 (specialization order) $\leq_{X,\mathcal{O}}$ を次で定義する. $x, y \in X$ について

$$x \leq_{X,\mathcal{O}} y :\Leftrightarrow \forall u \in \mathcal{O} (x \in u \Rightarrow y \in u).$$

定義

集合 X , R について

$$A(X, R) := \{u \subseteq X \mid \forall x \in u \forall y \in X (xRy \Rightarrow y \in u)\}.$$

アレクサンドロフ空間と前順序

次の定理から、アレクサンドロフ空間と前順序の 1 対 1 対応がわかる。つまり位相空間を順序集合に翻訳できる。

定理

- ① $\forall X \forall \mathcal{O} (X, \leq_{X, \mathcal{O}}) : \text{前順序}.$
- ② $\forall X \forall R (X, A(X, R)) : \text{アレクサンドロフ空間}.$
- ③ $\forall X \forall \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X) \mathcal{O} \subseteq A(X, \leq_{X, \mathcal{O}}).$
- ④ $\forall X \forall R \subseteq X \times X R \subseteq \leq_{X, A(X, R)}.$
- ⑤ $\forall (X, \mathcal{O}) : \text{アレクサンドロフ空間 } A(X, \leq_{X, \mathcal{O}}) = \mathcal{O}.$
- ⑥ $\forall (X, R) : \text{前順序 } \leq_{X, A(X, R)} = R.$
- ⑦ $\forall X \forall \mathcal{O} \forall Y \forall \mathcal{T} \forall f : (X, \mathcal{O}) \rightarrow_{\text{連続}} (Y, \mathcal{T})$
 $f : (X, \leq_{X, \mathcal{O}}) \rightarrow_{\text{順序保存}} (Y, \leq_{Y, \mathcal{T}}).$
- ⑧ $\forall X \forall R \forall Y \forall S \forall f : (X, R) \rightarrow_{\text{順序保存}} (Y, S)$
 $f : (X, A(X, R)) \rightarrow_{\text{連続}} (Y, A(Y, S)).$

特殊化順序と反射推移閉包

集合 X 上の 2 項関係 R の反射推移閉包 R^* は次で定義されていた.

$$xR^*y :\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \exists a: n+1 \rightarrow X (a(0) = x \wedge a(n) = y \wedge \forall i \in n \ a(i)Ra(i+1)).$$

(X, R^*) は R を含む最小の前順序になる.

反射推移閉包は特殊化順序を使って表せる.

定理

集合 X 上の 2 項関係 R について

$$\leq_{X, A(X, R)} = R^*.$$

証明. 最小性を使う.



部分空間

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ と $A \subseteq X$ について**部分空間位相 (subspace topology)** を次で定義する.

$$\mathcal{O}_A := \{A \cap u \mid u \in \mathcal{O}\}.$$

定理

アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ と $A \subseteq X$ について $(A, \mathcal{O}_A)$ はアレクサンドロフ空間.

※アレクサンドロフ空間の部分空間, 商, 直和はアレクサンドロフ空間.

アレクサンドロフ空間の直積

アレクサンドロフ空間の圏の直積は前順序との対応を使えば構成できる. 有限個なら位相空間の直積と一致する. 無限個は一致しないことがある.

$\prod_{i \in \mathbb{N}} (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$ はアレクサンドロフ空間の圏の直積では離散位相だが, 位相空間の直積では離散位相にならない.

アレクサンドロフ空間の定義のままではやや扱いにくいため、次の集合を定義する.

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ と $x \in X$ について

$$O_{\mathcal{O}}(x) := \bigcap_{\substack{u \in \mathcal{O} \\ x \in u}} u.$$

定理 (アレクサンドロフ空間のいいかえ)

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について次は同値.

- ① $(X, \mathcal{O})$ はアレクサンドロフ空間.
- ② $A(X, \leq_{X, \mathcal{O}}) \subseteq \mathcal{O}$.
- ③ $\forall x \in X \ O_{\mathcal{O}}(x) \in \mathcal{O}$.

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすとき**連結空間 (connected space)** とよぶ.

$$\forall u, v \in \mathcal{O} \ (u \cup v = X \Rightarrow u \cap v = \emptyset \Rightarrow u = \emptyset \vee v = \emptyset).$$

集合 X 上の 2 項関係 R の反射対称推移閉包 $\bar{R}$ は次で定義されていた.

$$x\bar{R}y :\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ \exists a: n+1 \rightarrow X$$

$$(a(0) = x \wedge a(n) = y \wedge \forall i \in n \ (a(i)Ra(i+1) \vee a(i+1)Ra(i))).$$

$(X, \bar{R})$ は R を含む最小の同値関係になる.

$x\bar{R}y$ は, グラフ理論における x から y への歩道の存在を意味する.

連結性

歩道の存在から位相空間の連結性が導かれる.

定理

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について次が成り立つ.

- ① $\forall R \subseteq X \times X (\forall u, v \in \mathcal{O} (u \cup v = X \Rightarrow u \cap v = \emptyset \Rightarrow \forall x \in u \forall y \in v (x \bar{R} y \wedge x \neg R y \wedge y \neg R x))) \Rightarrow (X, \mathcal{O}) : \text{連結}.$
- ② $(\forall x, y \in X x \bar{\leq}_{X, \mathcal{O}} y) \Rightarrow (X, \mathcal{O}) : \text{連結}.$

証明. (1) 帰納法. (2) (1) からわかる. □

系

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について次が成り立つ.

- ① $(X, \leq_{X, \mathcal{O}})$ が全順序なら $(X, \mathcal{O})$ は連結.
- ② $(X, \leq_{X, \mathcal{O}})$ に最小元または最大元が存在するなら $(X, \mathcal{O})$ は連結.

連結性

アレクサンドロフ空間では、連結性を歩道の存在にいいかえられる。

補題

アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ と推移的關係 (X, R) について次が成り立つ。

- ① $\leq_{X, \mathcal{O}} \subseteq R^{-1} \Rightarrow \forall x \in X \{a \in X \mid aRx\} \in \mathcal{O}.$
- ② $\leq_{X, \mathcal{O}} \subseteq R \Rightarrow \forall x \in X X \setminus \{a \in X \mid aRx\} \in \mathcal{O}.$

証明. アレクサンドロフ空間のいいかえを使う。 □

補題

連結アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ と同値關係 $(X, \sim)$ について次が成り立つ。

$$\leq_{X, \mathcal{O}} \subseteq \sim \Rightarrow \forall x, y \in X x \sim y.$$

証明. 連結性と、補題より $[x]$, $X \setminus [x] \in \mathcal{O}$ となることを使う。 □

補題から次がわかる.

定理

アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ について次は同値.

- ① $(X, \mathcal{O})$ は連結.
- ② $\forall x, y \in X \ x \bar{\leq}_{X, \mathcal{O}} y$.

分離公理: T_0

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすとき T_0 空間とよぶ.

$$\forall x, y \in X ((\forall u \in \mathcal{O} (x \in u \Leftrightarrow y \in u)) \Rightarrow x = y).$$

定理

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について次は同値.

- ① $(X, \mathcal{O})$ は T_0 空間.
- ② $\forall x, y \in X (x \leq_{X, \mathcal{O}} y \Rightarrow y \leq_{X, \mathcal{O}} x \Rightarrow x = y)$ [反対称律].
- ③ $\forall x, y \in X (O_{\mathcal{O}}(x) = O_{\mathcal{O}}(y) \Rightarrow x = y)$.

よって T_0 アレクサンドロフ空間は半順序とみなせる.

分離公理: T_1

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすとき T_1 空間とよぶ.

$$\forall x, y \in X ((\forall u \in \mathcal{O} (x \in u \Rightarrow y \in u)) \Rightarrow x = y).$$

アレクサンドロフ空間では T_1 空間は離散位相に限る.

定理

アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ について次は同値.

- ① $(X, \mathcal{O})$ は T_1 空間.
- ② $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$.

証明. $(1 \Rightarrow 2)$ アレクサンドロフ空間のいいかえを使う. □

アレクサンドロフ空間では T_1 や、より強い条件のハウスドルフ (T_2), T_3, T_4, T_5, T_6 は離散位相しかない. よって, T_1 より弱い条件を考えたほうがよい.

分離公理: R_0

T_1 から T_0 を除いた条件を考える.

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすとき R_0 空間とよぶ.

$$\forall x, y \in X ((\forall u \in \mathcal{O} (x \in u \Rightarrow y \in u)) \Rightarrow (\forall u \in \mathcal{O} (y \in u \Rightarrow x \in u))).$$

定理

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について次は同値.

- ① $(X, \mathcal{O})$ は R_0 空間.
- ② $\forall x, y \in X (x \leq_{X, \mathcal{O}} y \Rightarrow y \leq_{X, \mathcal{O}} x)$ [対称律].

R_0 アレクサンドロフ空間は同値関係とみなせる.

分離公理: R_0

アレクサンドロフ空間では R_0 はとても強い仮定になる.

補題

アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ について次は同値.

- ① $(X, \mathcal{O})$ は R_0 空間.
- ② $\forall u \in \mathcal{O} \ X \setminus u \in \mathcal{O}$.

証明. $(1 \Rightarrow 2)$ アレクサンドロフ空間のいいかえを使う. □

この定理から R_1 (ハウスドルフから T_0 を除く), 正則, 完全正規などの分離公理が R_0 と同値になる.

補題から R_0 アレクサンドロフ空間は密着空間の直和で書ける.

系

R_0 連結アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ について $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$.

分離公理: 正規

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすとき**正規空間 (normal space)** とよぶ.

$\forall a, b \in \mathcal{O} (a \cup b = X \Rightarrow \exists u, v \in \mathcal{O} (X \setminus a \subseteq u \wedge X \setminus b \subseteq v \wedge u \cap v = \emptyset)).$

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすとき**全部分正規空間 (completely normal space)** とよぶ.

$\forall A \subseteq X (A, \mathcal{O}_A) : \text{正規}.$

定理

R_0 アレクサンドロフ空間は全部分正規空間.

アレクサンドロフ空間について、分離公理の強さは次のようになる。

$$\text{離散位相} \Leftrightarrow T_0 \wedge R_0 \Rightarrow R_0 \Rightarrow \text{全部分正規} \Rightarrow \text{正規}.$$

逆向きが成り立たないことは次の例からわかる。

X	$\mathcal{O}$	T_0	R_0	全部分正規	正規
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	○	○	○	○
$\{0, 1\}$	$\{\emptyset, X\}$	×	○	○	○
$\{0, 1\}$	$\{\emptyset, \{0\}, X\}$	○	×	○	○
$\{0, 1, 2\}$	$\{\emptyset, \{0\}, X\}$	×	×	○	○
$\{0, 1, 2\}$	$\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, X\}$	○	×	×	×
$\{0, 1, 2, 3\}$	$\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2, 3\}, X\}$	×	×	×	×
$\{0, 1, 2, 3\}$	$\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}, X\}$	○	×	×	○
$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}, X\}$	×	×	×	○

復習: 基本近傍系

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$, $x \in X$ と集合 N が次をみたすとき N を x の**基本近傍系 (fundamental system of neighborhood)** とよぶ.

- $\forall v \in N (v \subseteq X \wedge \exists u \in \mathcal{O} (x \in u \wedge u \subseteq v)),$
- $\forall u \in \mathcal{O} (x \in u \Rightarrow \exists w \in N w \subseteq u).$

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすとき**第一可算 (first countable)** とよぶ.

$$\forall x \in X \exists N : x \text{ の基本近傍系 } |N| \leq \aleph_0.$$

アレクサンドロフ空間の基本近傍系

アレクサンドロフ空間は基本近傍系を使っていいかえられる.

定理

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について次は同値.

- ① $(X, \mathcal{O})$ はアレクサンドロフ空間.
- ② $\forall x \in X \{O_{\mathcal{O}}(x)\} : x$ の基本近傍系
- ③ $\forall x \in X \exists N : x$ の基本近傍系 $|N| < \aleph_0$.

証明. $(3 \Rightarrow 1)$ x の基本近傍系 N が有限個より, N の要素すべての共通部分をとればよい. □

系

アレクサンドロフ空間は第一可算.

復習: 開基

定義

集合 X , $\mathcal{B}$ が次をみたすとき $\mathcal{B}$ を X の開基 (open base) とよぶ.

- ① $\forall u \in \mathcal{B} \ u \subseteq X$,
- ② $\forall x \in X \ \exists u \in \mathcal{B} \ x \in u$,
- ③ $\forall u, v \in \mathcal{B} \ \forall x \in u \cap v \ \exists w \in \mathcal{B} \ (x \in w \wedge w \subseteq u \cap v)$.

定義

集合 $\mathcal{B}$ が生成する位相を次で表す.

$$\langle \mathcal{B} \rangle := \left\{ \bigcup_{u \in S} u \mid S \subseteq \mathcal{B} \right\}.$$

復習: 開基

定理

集合 X , $\mathcal{B}$ について次は同値.

- ① $\mathcal{B}$ は X の開基.
- ② $(X, \langle \mathcal{B} \rangle)$ は位相空間.

定理

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ と集合 $\mathcal{B}$ について次は同値.

- ① $\mathcal{O} = \langle \mathcal{B} \rangle$.
- ② $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O} \wedge \forall u \in \mathcal{O} \forall x \in u \exists b \in \mathcal{B} (x \in b \wedge b \subseteq u)$.

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすとき**第二可算 (second countable)** とよぶ.

$$\exists \mathcal{B} (|\mathcal{B}| \leq \aleph_0 \wedge \langle \mathcal{B} \rangle = \mathcal{O}).$$

アレクサンドロフ空間の開基

定理

アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ について次が成り立つ.

- ① $\mathcal{O} = \langle \{O_{\mathcal{O}}(x) \mid x \in X\} \rangle$.
- ② $\forall \mathcal{B} (\mathcal{O} = \langle \mathcal{B} \rangle \Rightarrow \{O_{\mathcal{O}}(x) \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{B})$.

系

アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ について次は同値.

- ① $(X, \mathcal{O})$ は第二可算.
- ② $|\{O_{\mathcal{O}}(x) \mid x \in X\}| \leq \aleph_0$.

系

T_0 アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ について次は同値.

- ① $(X, \mathcal{O})$ は第二可算.
- ② $|X| \leq \aleph_0$.

コンパクト性

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすとき **コンパクト空間** とよぶ.

$$\forall S \subseteq \mathcal{O} \left(X \subseteq \bigcup_{u \in S} u \Rightarrow \exists C \subseteq S \left(|C| < \aleph_0 \wedge X \subseteq \bigcup_{u \in C} u \right) \right).$$

定理

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について次が成り立つ.

- ① $(\exists C \subseteq X (|C| < \aleph_0 \wedge \forall x \in X \exists y \in C y \leq_{X, \mathcal{O}} x)) \Rightarrow (X, \mathcal{O}) : \text{コンパクト}.$
- ② $(X, \leq_{X, \mathcal{O}})$ に最小元が存在するなら $(X, \mathcal{O})$ はコンパクト.

証明. (1) $S \subseteq \mathcal{O}, X \subseteq \bigcup_{u \in S} u$ とする. C が有限かつ $C \subseteq X \subseteq \bigcup_{u \in S} u$ より, $x \in C$ に対する $u \in S$ を選べばよい. □

アレクサンドロフ空間でコンパクトを順序の言葉にいいかえる.

定理

アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ について次が成り立つ.

- ① $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトであることと
 $\exists C \subseteq X (|C| < \aleph_0 \wedge \forall x \in X \exists y \in C y \leq_{X, \mathcal{O}} x)$ は同値.
- ② $(X, \leq_{X, \mathcal{O}})$ が空でない全順序なら, $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトであることと
 $(X, \leq_{X, \mathcal{O}})$ に最小元が存在することは同値.

証明. (1) アレクサンドロフ空間のいいかえより $\{O_{\mathcal{O}}(x) \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{O}$ であることを使う. □

コンパクト性

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすとき局所コンパクト空間 (locally compact space) とよぶ.

$$\forall x \in X \exists v \subseteq X \exists u \in \mathcal{O} (x \in u \wedge u \subseteq v \wedge (v, \mathcal{O}_v) : \text{コンパクト}).$$

定理

アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ は局所コンパクト空間.

証明. $x \in X$ について v を $O_{\mathcal{O}}(x)$ とおけばよい. □

コンパクト性

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすときリンデロフ (Lindelöf) 空間とよぶ.

$$\forall S \subseteq \mathcal{O} \left(X \subseteq \bigcup_{u \in S} u \Rightarrow \exists C \subseteq S \left(|C| \leq \aleph_0 \wedge X \subseteq \bigcup_{u \in C} u \right) \right).$$

コンパクトと同様の議論でリンデロフ空間をいいかえられる.

定理

アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ について次は同値.

- ① $(X, \mathcal{O})$ はリンデロフ.
- ② $\exists C \subseteq X \left(|C| \leq \aleph_0 \wedge \forall x \in X \exists y \in C \ y \leq_{X, \mathcal{O}} x \right).$

証明. 可算選択公理を使う.

(C の濃度を有限や可算以外に一般化できる.)



定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすとき **オーソコンパクト (orthocompact)** とよぶ.

$$\forall C \subseteq \mathcal{O} \left(X \subseteq \bigcup_{u \in C} u \Rightarrow \exists D \subseteq \mathcal{O} \left(X \subseteq \bigcup_{u \in D} u \wedge \right. \right. \\ \left. \left. (\forall v \in D \exists u \in C \ v \subseteq u) \wedge \forall x \in X \bigcap_{u \in D, x \in u} u \in \mathcal{O} \right) \right).$$

定理

アレクサンドロフ空間はオーソコンパクト.

可分

定義

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次をみたすとき**可分 (separable) 空間**とよぶ.

$$\exists C \subseteq X (|C| \leq \aleph_0 \wedge \forall u \in \mathcal{O} (u \neq \emptyset \Rightarrow C \cap u \neq \emptyset)).$$

可分とリンデロフは特殊化順序を逆にした条件と考えられる.

定理

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について

$$\exists C \subseteq X (|C| \leq \aleph_0 \wedge \forall x \in X \exists y \in C x \leq_{X, \mathcal{O}} y)$$

なら $(X, \mathcal{O})$ は可分.

定理

アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ について次は同値.

- ① $(X, \mathcal{O})$ は可分.
- ② $\exists C \subseteq X (|C| \leq \aleph_0 \wedge \forall x \in X \exists y \in C x \leq_{X, \mathcal{O}} y)$.

証明. $(1 \Rightarrow 2)$ アレクサンドロフ空間のいいかえを使う. □

つまり, アレクサンドロフ空間において可分は, 特殊化順序における共終数が ω 以下といいかえられる.

なお, 順序集合 $(X, \leq)$ の共終数 $\text{cf}(X)$ は次のような定義である.

$$\text{cf}(X) := \min\{|C| : \text{順序数} \mid C \subseteq X \wedge \forall x \in X \exists y \in C x \leq y\}$$

.

全順序集合の例

全順序集合を位相空間として考え、その性質を調べる.

例

全順序集合 $(X, \leq)$ について位相空間 $(X, A(X, \leq))$ は次をみたす.

- ① アレクサンドロフ
- ② 第一可算
- ③ 局所コンパクト
- ④ オーソコンパクト
- ⑤ 連結
- ⑥ T_0
- ⑦ 全部分正規

全順序集合の例

	R_0	コンパクト	リンデロフ	可分	第二可算
$(\mathbb{N}, \leq)$	x	o	o	o	o
$(\mathbb{Z}, \leq)$	x	x	o	o	o
$(\mathbb{Q}, \leq)$	x	x	o	o	o
$(\mathbb{R}, \leq)$	x	x	o	o	x
$(\mathbb{N}_1, \leq)$	x	o	o	x	x
$(1, \leq)$	o	o	o	o	o

距離化定理の類似

アレクサンドロフ空間は前順序と一対一対応があった. 2 項関係は 2 変数の 2 値関数と一対一対応がある.

定義

集合 X と $R \subseteq X \times X$ について写像 $D_{X,R}: X \times X \rightarrow \{0,1\}$ を次で定義する. $x, y \in X$ について

$$D_{X,R}(x,y) := \begin{cases} 0 & (xRy) \\ 1 & (\neg xRy) \end{cases}$$

定義

集合 X と写像 $d: X \times X \rightarrow \{0,1\}$ について $\leq_{X,d} \subseteq X \times X$ を次で定義する. $x, y \in X$ について

$$x \leq_{X,d} y \Leftrightarrow d(x,y) = 0.$$

距離化定理の類似

定理

- ① $\forall X \forall R \subseteq X \times X \leq_{X, d_{X,R}} R.$
- ② $\forall X \forall d: X \times X \rightarrow \{0, 1\} D_{\leq_{X,d}} = d.$

前順序に対応する 2 変数の 2 値関数を, ここでは弱離散距離とよぶことにする.

定義

集合 X , d が次をみたすとき (X, d) を弱離散距離とよぶ.

- ① $d: X \times X \rightarrow \{0, 1\},$
- ② $\forall x \in X \ d(x, x) = 0,$
- ③ $\forall x, y, z \in X \ (d(x, y) = 0 \Rightarrow d(y, z) = 0 \Rightarrow d(x, z) = 0).$

(3) を三角不等式におきかえてもよい.

$$\forall x, y, z \in X \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

距離化定理の類似

定理

- 前順序 (X, R) について $(X, D_{X,R})$ は弱離散距離.
- 弱離散距離 (X, d) について $(X, \leq_{X,d})$ は前順序.

アレクサンドロフ空間 $(X, \mathcal{O})$ について, $\mathcal{O}$ は $D_{X, \leq_{X,\mathcal{O}}}$ が誘導する位相になっている.

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= A(X, \leq_{X,\mathcal{O}}) \\ &= \{u \subseteq X \mid \forall x \in u \, \forall y \in X \, (x \leq_{X,\mathcal{O}} y \Rightarrow y \in u)\} \\ &= \{u \subseteq X \mid \forall x \in u \, \forall y \in X \, (D_{X, \leq_{X,\mathcal{O}}}(x, y) = 0 \Rightarrow y \in u)\} \\ &= \{u \subseteq X \mid \forall x \in u \, \exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} \, \forall y \in X \, (D_{X, \leq_{X,\mathcal{O}}}(x, y) < \epsilon \Rightarrow y \in u)\}\end{aligned}$$

つまり距離化定理の類似が成り立っている.

ここまでの話をまとめる.

位相	順序
連続写像	順序を保存する写像
連結	歩道の存在
T_0	反対称律
R_0	対称律
コンパクト	共終数 (逆順) が有限
リンデロフ	共終数 (逆順) が高々可算
可分	共終数が高々可算
距離	関係の有無

前順序は hom 集合の濃度が 1 以下の小圏とみなせる. まとめると次のような対応がある.

前順序 $\cong$ アレクサンドロフ空間 $\cong$
弱離散距離 $\cong$ hom 集合の濃度が 1 以下の小圏.

それぞれを, 2 項関係, 位相空間, 2 変数関数, 多重グラフに一般化したときの考え方の違いを図にする.

2 項関係	$\bullet \longrightarrow *$
2 変数関数	$\bullet \xrightarrow{d(\bullet, *)} *$
多重グラフ	$\bullet \begin{matrix} \curvearrowright \\ \vdots \\ \curvearrowleft \end{matrix} *$
位相空間	$\dots \quad O(\bullet) \quad \bullet \quad *$

- [1] P. Alexandroff, *Diskrete Räume*, Mat. Sb., 2(44), 3, 501–518, (1937).
- [2] F. G. Arenas, *Alexandroff spaces*, Acta Mathematica Universitatis Comenianae **68** (1), 17–25, (1999).
- [3] K. Kunen (藤田博司 訳), 集合論 独立性証明への案内, 日本評論社, 2015.
- [4] M. C. McCord , *Singular homology and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke Math. Jour, **33**, 465–474, 1966.
- [5] R. E. Stong, *Finite topological spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **123**, 325–340, 1966.