

群論入門

～群論ってなんだ？～

Abstract

アーベルようこ

2025 年 9 月

本稿の趣旨

大学数学で「代数学」を学ぶと、大抵 1 年次に「線形代数」を履修し、2 年次に「群論」を履修するのが、数学専攻の一般的なカリキュラムだと思う。群論を終える頃に、1 年次で履修してある程度分かったつもりになっていた線形代数を実は思っているほど理解できていないことに気付くのは数学科あるあるである。

今回は、この群論を、高校時代は数学が苦手で数 B 辺りで記憶から抹消したものの業務で必要になって再度学び始めた人、確率論や解析学、線形代数の特に行列の部分で見られる非常にめんどくさい計算に嫌気がさしたり、線形代数を理解していないことに気付いて絶望したりして、数学自体に対し苦手意識を持ってしまった人、これまで高等数学にあまり触れる機会がなく「群論？何それ美味しいの？」という人たちに少しでも「群論って楽しいよ、群論怖くないよ」と伝えたいと考え、あまり難しい記号や用語を使わないことをまず前提とし、興味が出てきてもう少し深堀りしたい人のために記号、用語、論理式、数式をガッツリ使うことも同時に意識して、数学チョットニガテな人にも数学メツチャトクイな人(この方々にとっては「はいはい〇〇でしょ知ってる知ってる」となることが多いかもしれない)にも群論に親しんでもらおう、また群論の周辺領域にも興味をもってもらえたらいいな、と思い作成した。

前提とする知識

数学チョットニガテな人：

- ・ 集合、関数、四則演算、方程式、行列という言葉は知っている
- ・ 小学校で習った「交換法則」「結合法則」「分配法則」をうろ覚えでも覚えている
- ・ 「方程式って確か次数が大きくなると解の公式がなくなるよね」というのは聞いたことがある
- ・ 置換 $\neq$ 痴漢はわかる
- ・ 「代数学的方程式」という言葉は聞いたことあるけど意味は知らない
- ・ 自然数、整数、有理数、無理数、実数、虚数、複素数、超越数という単語を聞いたことがある
- ・ 上の 8 つのうち最初の 5 つは意味を知っている
- ・ 正多面体 5 つ全部知っている

数学メツチャトクイな人：

- ・演算記号が四則演算の記号以外にも沢山あるのを知っているし何なら使ったことがある
- ・関数と言われて写像がパッと頭に浮かぶ
- ・「 f インバース」と言われて記号が頭に浮かぶし意味も説明できる
- ・行列の演算は一通りできるし行列を任意の数として扱うことができる
- ・ $\mathbb{G}$ という記号を数学書で見たことがある(意味は知らなくても OK)
- ・ $\mathbb{N}$ という記号も見たことがある、何なら添え字付きも見たことがある
- ・well-defined な定義を何か一つ例示できる
- ・選択公理を大まかに説明できる
- ・環もしくは体について勉強したことがある

内容

1. まずは自己紹介
2. 群論を学ぶための基礎知識① 集合論
3. 群論を学ぶための基礎知識② 体と環
4. 群の定義
5. いろいろな群
6. アーベルとガロア (ガロアよしんでしまうとはなさない)
7. 群を勉強するメリット
8. おわりに

参考文献：雪江明彦著「代数学Ⅰ 群論入門」、同著「代数学Ⅱ 環と体とガロア理論」
(いずれも日本評論社刊)