ホモトピー型理論による「正しい」数学

Taichi Uemura
@t_uemura669101

2025 年 10 月 11 日
数学徒のつどい 第 8 回

ホモトピー型理論 *(Homotopy Type Theory, HoTT)*[1] という分野を紹介します。

ホモトピー型理論は型理論と呼ばれる数学の言語の一つで、ホモトピー論的なアイディアを取り入れた最新の言語である。中でも *Univalence* **公理**

$$(A = B) \simeq (A \simeq B)$$

が象徴的である。ここで、A と B は型で、従来の数学での集合のようなものである。左辺は A と B の間の同一視のなす型である。右辺は A と B の間の同値のなす型で、従来の数学での全単射のなす集合に相当する。つまり、Univalence 公理は「全単射で結ばれた集合を同一視する」ようなことを主張する。

従来の数学の言語では集合の全単射と集合の同一性は全く異なる概念であり、Univalence 公理は成立しない。それにも関わらず、全単射で結ばれた集合をあたかも同一であるかのように扱うことは多く、全単射の方がむしろ「正しい」集合の同一視の概念であると考えられる。言語が提供する同一視の概念が「正しく」ないのに、雰囲気で対象を同一視している状況である。

ホモトピー型理論では同一視の概念を適切に定式化することで、Univalence 公理を実現する。Univalence 公理により「正しい」同一視の概念と言語に組込まれた同一視の概念が一致する。これにより、同一視に関して「正しい」数学を展開できる。

本講演では、ホモトピー型理論の基本的なアイディアと、周辺の話題を適宜選んで紹介する。

References

[1] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study, 2013. URL: http://homotopytypetheory.org/book/.