

CR 多様体の変形と埋め込み可能性

すーり (@math_su-ri)

領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^{n+1}$ の境界 $\partial\Omega$ 上には、 $\mathbb{C}^{n+1}$ の複素構造から自然に誘導される幾何構造が備わり、境界上の Cauchy–Riemann 構造 (**CR 構造**) と呼ばれます。CR 構造の 1 つの起源は、「 $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の 2 つの領域同士の双正則同値性を、その境界上の CR 構造同士の同値性に置き換える」というアイデアでした。実際にこのアイデアは有効で、Fefferman によって「2 つの有界強擬凸領域が双正則であることと、その境界上の CR 構造が “同じ” であることが同値である」ことが示されています。

領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^{n+1}$ の境界 $\partial\Omega$ は $2n+1$ 次元、つまり奇数次元の実多様体です。そこで境界上の CR 構造の定義は、奇数次元の実多様体 M に対して自然に一般化されます。CR 構造をもつ奇数次元多様体 M のことを **CR 多様体** といいます。以降、CR 多様体と言えば、複素幾何学と結びつきの深いコンパクト強擬凸 CR 多様体のことを指すことにします。

CR 多様体の幾何学における重要な問題として、「CR 多様体 M が十分次元の大きい $\mathbb{C}^N$ に CR 構造を保ったまま埋め込めるか？」という **埋め込み問題** があります。もし CR 多様体 M が埋め込み可能ならば、 M はある複素多様体の境界として実現できます。そのため埋め込み可能性は **CR 幾何学と複素幾何学の対応を与える重要な性質** です。

CR 多様体の次元が 5 以上のときは常に埋め込み可能なのですが、3 次元の場合には一般に埋め込み可能ではないことが知られています。実際、Rossi や Burns–Epstein によって 3 次元球面の CR 構造を**変形**すると、埋め込み不可能な CR 構造が現れることが証明されています。この講演では CR 幾何学の初歩からなるべく丁寧に解説し、CR 構造の変形と埋め込み可能性にまつわるお話をご紹介します。