命題論理の健全性と完全性

いことんど

2025 年 8 月 28 日

目次

1 アブストラクト

1.1 どんな分野？

本講演は,「数理論理学」あるいは「数学基礎論」と呼ばれる分野に属する話題を扱います. 数理論理学は,

1. 人間の数学での営みを分析する.
2. 1. を元にその数学的モデルを構築し, それを数学的に分析する.
3. 1. と 2. から, 人間の数学での営みについて示唆を得る.

という分野です. 1. と 3. は哲学の, 2. は数学の領域なので, 数理論理学は数学と哲学の両方に関連した分野だと言えます. ここで,「人間の数学での営み」というのは, 推論や, 証明, 計算などを指します. その中でも今回は, 推論に着目してみましょう.

1.2 どんな話？

真偽が定まっている主張のことを, **命題**と呼ぶことにします. 例えば, 次の 4 つの文章を考えてみましょう[*1].

(1) $1 + 1 = 2.$ 真の命題

[*1] ここでは一口に「真の命題」「偽の命題」と言っていますが, より正確には, 命題の真偽は状況設定によって決まります. (1) は自然数論の文脈, すなわち 1 と 2 が自然数で + が通常の和である場合には真ですが, 例えば「$\mathbb{Z}$ 上に + と ×, 0 と 1 の役割をそれぞれ入れ替えた可換環の構造を入れる」みたいな状況設定では, $1 + 1 = 2$ は通常の整数でいう $0 \times 0 = 2$ と同じなので偽になります. (2) も同様に, 普通の実数について考えれば偽ですが, なにか変な状況を設定して, 真な命題にすることもできます.
とはいえ, ここで注目したいのはとにかく「命題には真偽が定まっている」ということなので, 大目に見て下さい.

(2) $a^2 = -1$ となる実数 a が存在する. 偽の命題

(3) x は有理数である. 命題ではない[*2]

(4) 今日は暑い. 命題ではない.

また, 命題同士を「かつ」「または」「ならば」「でない」で繋げることで, より複雑な命題を作ることができます. そうして作られた命題の真偽は, 元の命題の真偽によって定まります. 例えば, P と Q を命題とすると,「P かつ Q」の真偽は表 1 のようになります. このような表のことを,「P かつ Q の真理値表」と呼びます.

表 1　P かつ Q の真偽

P	Q	P かつ Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

命題のうち,「それを構成する命題の真理値がなんであっても, 常に真になる命題」のことを**恒真命題**といいます. 例えば「P または (P でない)」や「(P かつ Q) ならば ((P でない) または Q)」などがそうです[*3].

真理値表を書く以外にも, 我々は, 証明によって正しさを調べます. 証明とは,「これは認める」という命題から出発して,「自明な」推論を繰り返して目的の命題にたどり着く作業です.

ここで「命題の正しさ」を調べる方法として, 真理値と証明の 2 つがあるわけですが, 命題の真理値と証明はどのような関係なのでしょうか. 例えば,

- 我々は「証明できることは正しい」と思っていますが, 仮定なしに証明できる命題は恒真命題でしょうか？
- 一方で,「恒真命題はいつでも証明で使って良い」と思っていますが, 恒真命題は仮定なしに証明できるでしょうか？

こういったことを,「命題の真偽」や「証明」の数学的なモデルを作って, 分析してみましょう！[*4]

1.3　講演の目標

本講演では, 次の 2 つの定理を目標にします.

[*2] このような文章を命題とする文脈もよくあるので,「ここでは命題ではないとする」と言ったほうが正確かもしれません.「x は有理数である」は, x に何が入るかに応じて真偽が変わるので, 本講演では命題としては扱いません. x に具体的な数をいれるか,「すべての x について」「ある x が存在して」をつけると真偽が決まるので, 命題になります.

[*3] よければ真理値表を書いて確かめてみて下さい

[*4] 「証明できることは正しい」や「恒真命題はいつでも証明で使って良い」ということを数学的に正当化する**わけではありません**. あくまで, 真理値表と証明のモデルを作ってそれを分析することで, 我々の数学での営みに対して**何かしらの示唆が得られる**だけであることに注意して下さい.

「具体的にどのような示唆が得られるのか？」については哲学の領域なので, 本講演では扱いません.

定理: 古典命題論理の健全性

任意の論理式 φ に対して,

$$\vdash \varphi \implies \models \varphi.$$

定理: 古典命題論理の完全性

任意の論理式 φ に対して,

$$\models \varphi \implies \vdash \varphi.$$

健全性が「仮定なしに証明できる命題は恒真命題」の形式化, 完全性が「恒真命題は仮定なしに証明できる」の形式化に相当します.

2　前提知識・想定する聴衆

本講演は, 数理論理学を全く知らない方にも楽しんでいただけることを目標にしています.

題材自体は「かつ」「または」「でない」「ならば」を使った論証に慣れていれば楽しんでいただけると思います. 高校数学の「命題と集合」で扱う事柄を知っていれば十分だと思います.

数学的な部分については,「集合と位相」の初歩的な知識と, 大学数学によくある「任意の ◯◯ について」や「ある ◯◯ が存在して」を用いた証明に慣れていればよいと思います.