

平行切断の可積分条件と Poincare の補題

一人セミナー数理物理

概要

有名な Poincare の補題という定理がある。この定理は物理においても例えば保存力 F (ベクトル場) は必ずポテンシャル関数と呼ばれるなんらかの関数 f の勾配 $F = -\mathbf{grad}(f)$ となることや、磁場 \mathbf{B} に対してベクトルポテンシャル \mathbf{A} が存在して $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ になるなど様々なところに現れる。前者は 1 次元後者が 2 次元の Poincare の補題の例に他ならない。本講演では 1 次元の Poincare の補題の非可換版が平行切断の可積分条件に現れることを示す。ここで出てくる多様体は全て滑らかかつ連結で第二可算公理を満たし次元は $m \in \mathbb{N}$ とする。

本講演の内容は主に以下の 3 点である。想定される予備知識としては線型 Lie 群を G としたときの主 G 束の定義と同伴するベクトル束の定義とする。またこれらの接続の関係やホロノミー群についても簡単に復習する予定だが知っておいた方がよい。

- (1) 通常の Poincare の補題 (1 次元) の復習
- (2) Ambrose-Singer の定理を用いた非可換 Poincare の補題 (1 次元) の証明
- (3) 非可換 Poincare の補題 (1 次元) を使った微分幾何 (ゲージ理論) の紹介

ここに本公演を通して非可換 Poincare の補題 (1 次元) とは以下の 0.1 のことを表す。

定理 0.1 (非可換 Poincare の補題 (1 次元)). 主 G 束 $\pi: P \rightarrow M$ 上の接続 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ で定まる接続と連結かつ単連結な開集合上の任意の切断 $\sigma: U \rightarrow P$ によって定まるゲージポテンシャルを $\mathcal{A} = \sigma^*\omega \in \Omega^1(U; \mathfrak{g})$ とする。このときゲージ場 (場の強さ或いは局所曲率形式) $\mathcal{F} = D\mathcal{A}$ が消えているなら純ゲージを取れる。すなわち以下が成り立つとき

$$D\mathcal{A} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = 0 \tag{0.1}$$

ある $g: U \rightarrow G$ が存在して $\mathcal{A} = g^{-1}dg$ となる。

これを以下の通常の 1 次元 Poincare の補題と比べると微分形式 $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ が Lie 環値微分形式 $\mathcal{A} \in \Omega^1(\mathcal{U}; \mathfrak{g})$ に置き換わっている。また閉形式という条件 $d\alpha = 0$ も非可換版では共変外微分が消えるという $D\mathcal{A} = 0$ に置き換わっている。

定理 0.2 (Poincare の補題 (1 次元)). 多様体 M の任意の連結かつ単連結な開集合上の閉微分 1 形式 $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U})$ は完全形式である。すなわち以下が成り立つとき

$$d\alpha = 0 \tag{0.2}$$

ある関数 $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ が存在して $\alpha = df$ となる。

また平行切断の可積分条件を与える定理は以下で与えられる。

定理 0.3. 階数 r の (実でも複素でも良い) ベクトル束 $\pi: E \rightarrow M$ 上の接続を ∇ とする。 M の開集合 \mathcal{U} と $1 \leq k \leq r$ に対して以下は同値である。

- (1) \mathcal{U} 上に一次独立な平行切断 $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(\mathcal{U}, E)$ が存在する。
- (2) 階数 k の部分束 $F \subset E|_{\mathcal{U}}$ で、 ∇ が F を保ちその誘導接続 ∇^F で平坦なものが存在する。すなわち任意の $s \in \Gamma(F)$ に対して $\nabla s \in \Omega^1(\mathcal{U}; F)$ であり $R^{\nabla^F} = 0$ となる。
- (3) F に沿う局所枠 $s = (s_1, \dots, s_k)$ が存在して $\nabla^F s_i = 0$ すなわち F の接続 1 形式が 0 となる。

これよりベクトル束に平坦接続があれば局所的には平行切断があることがわかる。この定理を用いてベクトル束に特別な切断が存在する条件について述べることができる。これらを適当な準備の下で証明したあとは時間の許す限り講演者の興味ある例について紹介していく。

参考文献

- [CL19] Giovanni Calvaruso and Marco Castrillón López, *Pseudo-riemannian homogeneous structures*, vol. 59, Springer, 2019.
- [KF00] Eui Chul Kim and Thomas Friedrich, *The einstein-dirac equation on riemannian spin manifolds*, Journal of Geometry and Physics **33** (2000), no. 1-2, 128–172.
- [KN96] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu, *Foundations of differential geometry, volume 1*, vol. 62, John Wiley & Sons, 1996.

- [Kob14] Shoshichi Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, Princeton University Press, 2014.
- [Nak03] Mikio Nakahara, *Geometry, topology and physics*, CRC press, 2003.
- [今 13] 今野宏, 微分幾何学, 東京大学出版会, 2013.
- [本 16] 本間泰史, スピン幾何学: スピノール場の数学, 森北出版, 2016.
- [森 05] 森田茂之, 微分形式の幾何学, 岩波書店 (2005).