

無限次元位相空間入門

～Hilbert 立方体を通して無限次元空間の特異な雰囲気味わおう～

後藤 達哉

2025 年 9 月

「無限次元位相空間入門」と称して Hilbert 立方体 $Q = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ の基本性質を紹介する。
この講演の前半でゆっくりめのペースで以下の証明を紹介する。

1. Hilbert 立方体は等質的、つまり任意の 2 点に対して一方を他方に写す同相写像がある。

これは有限次元の $[0, 1]$ の直積とは大きく異なる性質である。つまり、たとえば二次元の $[0, 1]^2$ では、縁の点を内部の点に写す同相写像はないが、Hilbert 立方体ではそのようなことも可能なのである。

講演の後半ではあまり真面目に証明をせずに以下のような内容を紹介する。

2. $\mathbb{Z}$ 集合と呼ばれる Hilbert 立方体部分集合同士の同相写像は Hilbert 立方体同士の同相写像に延長される
3. Hilbert 空間 ℓ^2 は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (数直線の可算直積) と同相である
4. アルファベットの T の形をした位相空間 T について、それは Hilbert 立方体の直積因子である： $T \times Q \approx Q$.

予備知識は学部で学ぶ集合・位相の知識で済むようにするつもりである。特に、位相次元論や絶対近傍レトラクトなどの知識は要求しない予定だ。

参考文献

- [1] van Mill, J. Infinite-dimensional topology: prerequisites and introduction. (Elsevier, 1988)