

層から Grothendieck topos への入門

@akari0koutya

2025 年 9 月 14 日

これは、2025 年 8 月 31 日から 9 月 3 日にかけて行われた「第 29 回数物セミナー」でおこなった [1] のリレーセミナーとその事後ゼミで、私が理解した範囲で Grothendieck topos について入門する前提となる話をまとめたものである。

1 前提知識

- 圏論の基礎
- 位相空間論の初歩
- 多様体論の初歩

2 アブストラクト

私は Grothendieck topos への造詣は深くないが、私のすぐ後に講演されるサクラ (@1997_takahashi) 氏が非常に詳しいので、彼の講演を補完する形で、私が知っている範囲で Grothendieck topos について入門する前提となる話をしたい。

Grothendieck topos とは、次のように定義される概念である。

定義 2.1 (Grothendieck topos) $\mathcal{C}$ を small な圏、 J を $\mathcal{C}$ 上の Grothendieck 位相とする。このとき、Grothendieck topos とは、ある site $(\mathcal{C}, J)$ 上の層の圏 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ に圏同値となる圏のことである。

この定義を理解するためには、層、Grothendieck 位相、site などいくつかの前提知識が必要であることがわかる。そこで、まずは位相空間上の層の理論を概観し、次に Grothendieck 位相と site の概念を導入し、最後に Grothendieck topos の定義に至るまでの道筋を説明する。

まず、位相空間上の層についてであるが、層とは、位相空間上のいい関数によって定義される関手である。いい関数とは、例えば、連続関数や微分可能関数や多項式関数などによって定義される。連続関数によって定義される層は位相多様体となり、微分可能関数によって定義される層は可微分多様体となり、多項式関数によって定義される層は代数多様体となる。このように、層は位相空間上の関数の性質を反映した重要な概念であり、基本的な幾何学的対象の一般化となっている。

次に、Grothendieck 位相と site の概念についてであるが、Grothendieck 位相とは、圏 $\mathcal{C}$ 上のいい coverings によって定義される位相であり、site とは、圏 $\mathcal{C}$ とその上の Grothendieck 位相 J の組 $(\mathcal{C}, J)$ のことである。Grothendieck 位相は、位相空間上の開集合の概念を一般化したものであり、site は、位相空間上の開集合系を一般化したものである。有名なものとしては、Zariski site、エタール site、Nisnevich site などがある。

これらは、20 世紀後半以降の数学において非常に重要な役割を果たしており、代数幾何、数論幾何 などの分野で必要不可欠な道具となっている。そのため、この講演が、Grothendieck topos の理解の一助、そして現代数学への志す人々の助けとなれば幸いである。

参考文献

- [1] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992. xii+630 pp.
- [2] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 3: Categories of Sheaves*, Cambridge University Press, 1994. xii+525 pp.
- [3] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1: Théorie des topos, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4). Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. *Lecture Notes in Mathematics* 269, Springer 1972. xix+525 pp.
- [4] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Springer-Verlag, Berlin, 2006. x+497 pp.
- [5] Angelo Vistoli. “Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory” . In: *Fundamental algebraic geometry*. Vol. 123. *Math. Surveys Monogr.* Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005, pp. 1-104. arXiv: math/0412512.
- [6] Lei Fu, *Étale cohomology theory*, *Nankai Tracts in Math.* 13, World Sci. 2011. xii+611 pp.