八元数体で遊ぼう

すてふ @sgt_stephen3rd

今日

1 これはアブストラクトです

リーマン多様体 (M, g) に対して、Levi-Civita 接続と呼ばれる標準的な接続が定まり、接続から平行移動を定められることはみなさんご存じだと思います。ここで、基点 $p \in M$ を一つ固定し、 p から出発して p に戻ってくる（区分的に）滑らかな曲線 γ を考えます（以降はこのような曲線を p に関するループと呼ぶことにします）。このとき、 γ に沿った平行移動は $T_p M$ 上の線形変換 H_γ を誘導し、特に $H_\gamma \in O(T_p M)$ であること、および二つのループ γ_1, γ_2 に対して $H_{\gamma_2} \circ H_{\gamma_1} = H_{\gamma_2 \circ \gamma_1}$ が平行移動の一般論からわかります。そこで、

$$\text{Hol}_p(M, g) := \{H_\gamma \in O(T_p M) \mid \gamma \text{ は } p \text{ に関するループ}\} \quad (1)$$

とおいて、 (M, g) の p でのホロノミー群と呼ぶことにします。下部可微分多様体 M が連結であれば（基本群に対してやるような議論と同様に）ホロノミー群の同型類は p の取り方によらず定まることがわかるので、その同型類を単に $\text{Hol}(M, g)$ と書いてしまいます。実はリーマン多様体のホロノミー群に対しては次の有名な分類定理が存在します [1]：

Theorem 1 (Berger) M が単連結かつ連結であり、さらに M より低い次元のリーマン多様体の直積として書けないものとする。このとき、いずれかの内一つが成り立つ：

- (M, g) はリーマン対称空間である。対称空間は大雑把に言って、各点に関する“点对称”を定められる多様体であり、リー群論によるホロノミー群の分類が知られている
- $\text{Hol} = \text{SO}(n)$. これは一般の場合である
- $n = 2m$ かつ $\text{Hol} = \text{U}(m)$. このとき、 (M, g) は自然なケーラー多様体の構造を持つ。
- $n = 2m$ かつ $\text{Hol} = \text{SU}(m)$. このとき、 (M, g) はケーラー多様体になるが、特にカラビヤウであることがわかる。
- $n = 4m$ かつ $\text{Hol} = \text{Sp}(m)$. このとき、 (M, g) は自然な超ケーラー多様体の構造を持つ。
- $n = 4m$ かつ $\text{Hol} = (\text{Sp}(m) \times \text{Sp}(1))/\{\pm 1\}$. このとき、 (M, g) を四元数ケーラー多様体と呼ぶ。

- $n = 7$ かつ $\text{Hol} = G_2$. このとき、 (M, g) を G_2 多様体と呼ぶ。ここで、 G_2 は所謂例外型単純リー群と呼ばれているものである。
- $n = 8$ かつ $\text{Hol} = \text{Spin}(7)$. このとき、 (M, g) を $\text{Spin}(7)$ 多様体と呼ぶ。

上のリストを眺めてみると、最後の二つだけ特定の次元にのみ存在していて、なんだか例外的な雰囲気を感じます。本講演では特に G_2 多様体について概観し、いろいろと面白い幾何学が見え隠れする様子を紹介できればと思っています。

2 八元数体はどこに？

前節には八元数体のハの字も出てきませんでした。が、 G_2 の構成には八元数体が欠かせません。特に G_2 多様体のホロノミー群を用いない別の定義をする際にも八面六臂の活躍をしてくれます(八元数体だけに)。八元数体は「実数体上の、可換でも結合的でもない代数」という意味の分からない代数ではありますが、実はそれなりに色々わかる不思議な体でもあります。“普通の”数学をされていて中々出会わないものだと思うので、こういった機会にぜひ親しみを持ってもらえればと思います。

参考文献

- [1] 今野宏, 『微分幾何学』, 東京大学出版会, 2013
- [2] S. Karigiannis, Introduction to G_2 geometry, arXiv:1909.09717
- [3] D. Joyce. Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2 . II. J. Differential Geom., 43:329–375, 1996.