

“悪い商”の非可換幾何学

えすきす (@Esquisse1102)

コンパクト Hausdorff 空間と可換 C^* 環が対応するという Gelfand-Naimark の定理をはじめとして、アフィンスキームと可換環の対応や Stone 空間と Bool 代数の対応など、現在では空間とその上の関数環（可換環）が互いに双対の関係にあることは広く知られている。

一方で、一般の環に定まる積構造は必ずしも可換であるとは限らない。そこで上記の対応関係をもとに、「非可換環 = “非可換空間”上の関数環」と考えて、その上の幾何学を展開しようというのが非可換幾何学と呼ばれる分野である。

考える空間の違いによって、その上での幾何学の展開が異なったように（例えば微分幾何学と代数幾何学など）、非可換幾何学においてもいくつかの流儀が存在する。その中の一つがフランスの数学者 A. Connes により始められた、作用素環の理論を基礎とする非可換幾何学である（他には代数幾何学の手法をベースとした非可換代数幾何学や、シンプレクティック多様体の変形量子化を出発点とした非可換幾何学もある）。

Connes は“非可換多様体”上の微積分や指数定理などの一般論を構築するだけでなく、様々な非可換空間の具体例についての構成・研究も行なっているが、その中で興味深い非可換空間の例を得るための方法として、“悪い商 (bad quotient)”という考え方を提唱した。

悪い商とは、ざっくりといえば通常の幾何学の枠組みでは調べることが難しい（あるいはつまらない）商空間のことであり、ペンローズタイリングのなす空間や葉層構造の葉のなす空間、アデル類空間など、非可換幾何学における様々な興味深い対象がその具体例となっている。

本講演では、非可換幾何学への導入として C^* 環とその K 理論について解説した後、上述の悪い商についての具体例を

- 非可換トーラス
- モジュラー曲線の非可換境界

を中心にいくつか紹介する。