闇空間 $\mathbb{R}$ と実数の正則性

Alwe (`@Alwe_Logic`)

2025 年 8 月 31 日

すうがく徒のつどいの歴史は長い。第一回関西すうがく徒のつどいが 2012 年に開かれているため、約 10 年の歴史があると言って良い。そのすうがく徒のつどいに於いて綿々と、あるいは共終に語り継がれるトピックとして、闇空間 $\mathbb{R}$ というものが存在する。事の発端は 2014 年に開かれた関西すうがく徒のつどいの alg_d 氏による発表 [1]「闇空間 $\mathbb{R}$ の性質」である。その後 2016 年の関西すうがく徒のつどいに於いてぴあのん氏 [3] によって「続・闇空間 $\mathbb{R}$ の性質」が話され、2020 年の関東すうがく徒のつどいにてサクラ氏 [2] によって「闇空間 $\mathbb{R}$ と Souslin 線」が話された。

サクラ氏に倣って $\mathbb{R}$ 上のどの構造を考えるか、という観点にて各々の発表を整理すると以下の通りになる。

1. alg_d：集合としての $\mathbb{R}$ はクソ、ノルム空間としての $\mathbb{R}$ はクソ。
2. ぴあのん：実閉順序体として見たとき $\mathbb{R}$ の完備性は非本質的。
3. サクラ：順序位相空間としての $\mathbb{R}$ の可分性は本質的。

この講演では一旦 $\mathbb{R}$ の上に乗っている構造を忘却し、alg_d に遡り、$\mathbb{R}$ の集合としてみた時、闇なのかどうかを**実数の正則性** (regularity property of reals) という観点から考察し直すことから始める。alg_d では $\mathbb{R}$ の濃度が強制法で不変でないことを拠出としているが、実際どのくらい複雑な $\mathbb{R}$ の部分集合が、その不定性の源となっているかを観察することを目的とする。

実数の正則性とは以下に挙げるような、実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 X が小さい集合の差を除いて簡単な集合であることをを指す言葉である。

1. $X \subseteq \mathbb{R}$ が **Baire の性質** (property of Baire) を持つとは、開集合 $U \subseteq \mathbb{R}$ が存在して $X \triangle U$ が痩集合となることである。
2. $X \subseteq \mathbb{R}$ が **Lebesgue 可測** (Lebesgue measurable) であるとは、Borel 集合 $B \subseteq \mathbb{R}$

が存在して $X \triangle B$ が Lebesgue 零集合となることである。

3. $X \subseteq \mathbb{R}$ が**完全集合性** (perfect set property) を持つとは、完全集合 $P \subseteq X$ が存在して $X \setminus P$ が高々可算となることである。

$\mathbb{R}$ の闇と言われれば思いつく例は $\mathbb{R}$ の部分集合で Lebesgue 非可測なものが存在することなどは有名であろう。このような病的な集合はどのくらい複雑なのか、という問を考える。勿論単なる集合としての $\mathbb{R}$ の部分集合にはまともに複雑性を議論する余地はあまりないため、$\mathbb{R}$ の位相構造を思い出すことで、位相的複雑性を考えることとする。実際紹介する定理は以下のようになる。

定理 0.1. $\mathbb{R}$ の解析的部分集合は Baire の性質、Lebesgue 可測性、完全集合性を持つ。

最後に前提知識を述べる。講演の前半では、位相空間論や、基数、順序数の基本的な性質のみを前提にして話す。講演の後半ではより一般に公理的集合論の議論、強制法や構成可能集合などを知っているとついて行きやすいかもしれない。またこの公演は**記述集合論** (descriptive set theory) と呼ばれる公理的集合論の部分分野の話であり、記述集合論に馴染みがあればこの講演を完全に理解できるだろう。

参考文献

[1] alg_d、闇空間 $\mathbb{R}$ の性質、2014 年。`https://posfie.com/@piano2683/p/rCM1a11`

[2] サクラ、闇空間 $\mathbb{R}$ と Souslin 線、2020 年。`https://ringed-sakura.space/pdf/Kanto4th.pdf`

[3] ぴあのん、続・闇空間 $\mathbb{R}$ の性質、2016 年。`https://kansaimath.tenasaku.com/wp/wp-content/uploads/2016/03/piano2683.pdf`