Grothendieck トポスことはじめ

西行櫻鱒

2025 年 10 月

1 導入

歴史の話をします。巨人 Grothendieck の仕事は大変広範にわたっており，彼の思想の与えた影響は大きく，端を発する研究は現代にも脈々と連なっています。彼は圏論に於いてもいくつもの仕事をしており，その一つである 1957 年に発表された東北論文では，加群の圏と位相空間上のアーベル群に値を持つ層の為す圏とで個別に展開されていたホモロジー代数を統一し，Grothendieck 圏の理論を作り上げました。また，1963 年から 64 年にかけて発表された SGA4 では，Grothendieck トポスを導入しました。これは位相空間の上の層の圏を一般化するのみならず，先駆けて 1960 年に発表していたエタールコホモロジー論の基礎付けを与えるものでした。より詳しくいえば，位相空間の上の層の概念が開集合系と開被覆系の組から定まることに注目し，開集合系を圏に，開被覆系を Grothendieck トポロジーに一般化することで，「開集合ではないものからなる被覆」の概念を用いたコホモロジー論を考えたのが重要な転換でありました。

さて，この二つの Grothendieck と冠する概念について見返すと，どちらも層やコホモロジー論と関係しているといった表面上の関係が先ず目につきます。より本質的な連関は見いだせるかというのは当然気になるところですが，実は SGA4 に於いて既にこれに関する仕事が為されています：

定理. Grothendieck トポス $\mathcal{E}$ のアーベル群対象の為す圏は Grothendieck 圏である。

東北論文の結果を踏まえると，$\mathsf{ab}(\mathcal{E})$ に於いてホモロジー代数がどこまで展開できるかが次の問題になります。ここで気になることの一つに充分入射的であるか？という点がありますが，これは Barr の定理の系として肯定的に解決されます。このように，Grothendieck トポスと Grothendieck 圏の理論はコホモロジー論の両輪を為しており，大変基本的かつ重要です。

定理. Grothendieck トポス $\mathcal{E}$ について，Boolean トポス $\mathcal{B}$ と “よい” 全射 $\mathcal{B} \to \mathcal{E}$ が存在する。

系理. Grothendieck トポス $\mathcal{E}$ のアーベル群対象の為す圏は充分入射的である。

2 概要

本講演では層化について観察するところから始め，Grothendieck トポスを内在的な性質によって特徴づける Giraud の定理を述べます。ここで局所表示可能圏[*1]との関係についても触れます。その後，時間が許す限り，Grothendieck トポスと Grothendieck 圏との関係，Diaconescu 被覆の存在定理，Barr の定理などについても述べたいと思います[*2]。

[*1] 前回のつどいでは，幾何的な例として挙げたものの殆ど詳細を述べることができませんでした。

[*2] 逆に今回の講演では，エタールトポス等の代数幾何的に重要な具体例については一切述べません。また，景上の層の圏に関して述べるならば六函手形式構造の話や Verider 双対の話などもするべきやもしれませんが，これについても述べません。これらは私の能力によるものであり，幾何的な視点については別の方が別の機会に話されることを期待しております。