不確実性下の意思決定の数理

yuchains

2025 年 3 月 29 日

はじめに

- 意思決定論は、人や組織がどのようにして選択や判断を行うかを研究する分野である。
- 経済学、経営学、心理学、工学など、さまざまな分野で研究されている。
- 今回は、経済学で研究される意思決定問題のうち、特に期待効用理論に焦点を当てる。
- 第４回すうがく徒のつどい「ゲーム理論とオークション」にて「ナッシュ均衡の存在」を証明したが、これは期待効用理論を前提としている。
- まず、必要となる数学的知識（集合・二項関係）について説明する。

直積/デカルト冪

Definition (直積)

集合 X と Y の直積 $X \times Y$ とは、

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

のことである。

Definition (デカルト冪)

集合 X のデカルト冪 X^n とは、

$$X^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_k \in X, k \in \{1, \ldots, n\}\}$$

のことである。

凸集合/開集合

Definition (凸集合)

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ について、

$$\forall x, y \in X, t \in [0, 1], (1 - t) x + ty \in X$$

が成り立つとき、X が凸集合であるという。

Definition (開集合)

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ について、

$$\forall x \in X, \exists \varepsilon \in (0, \infty), \forall y \in \mathbb{R}^n, dist(x, y) < \varepsilon \rightarrow y \in X$$

が成り立つとき、X が開集合であるという。

二項関係

Definition (二項関係)

集合 X 上の二項関係 R とは、X^2 の部分集合のことである。
$(x, y) \in R$ であることを、xRy と表記することにする。

二項関係

Definition (二項関係のクラス)

集合 X 上の二項関係 R のクラスは以下のようなものがある。

- 反射性：$\forall x \in X,\ xRx$
- 対称性：$\forall x, y \in X,\ xRy \to yRx$
- 推移性：$\forall x, y, z \in X,\ xRy \land yRz \to xRz$
- 完備性：$\forall x, y \in X,\ xRy \lor yRx$
- 反対称性：$\forall x, y \in X,\ xRy \to \neg yRx$
- 負推移性：$\forall x, y, z \in X,\ \neg xRy \land \neg yRz \to \neg xRz$

サンクトペテルブルクのパラドックス

Example (サンクトペテルブルクのパラドックス)

1 枚の偏りのないコインを表が出るまで投げ続けて、n 回目にはじめて表が出たときに 2^n 円が獲得できるギャンブルについて考える。このギャンブルの掛け金がいくらなら参加すべきか。

獲得できる金額とその確率は以下のようになる。

確率	金額
$\frac{1}{2}$	2 円
$\frac{1}{4}$	4 円
$\cdots$	$\cdots$
$\frac{1}{2^k}$	2^k 円

サンクトペテルブルクのパラドックス

- このギャンブルの獲得金額の期待値を計算すると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} 2^k = \infty$$

  となり、期待値が無限大に発散する。
- よって、賭けに参加するかを期待値で判断する場合には、このギャンブルの掛け金がどれだけ膨大な場合でも参加すべきとなる。
- 多くの人々はこのギャンブルに多額の掛け金を支払って参加しようとはしない。

サンクトペテルブルクのパラドックス

- ベルヌーイは、効用 (個人の満足の度合い) という概念を用いてこのパラドックスに説明を与えた。
- 獲得金額が大きくなるほど、効用の増加量はだんだん減少する。
  - 限界効用逓減の法則
- 例えば、獲得金額に対する効用を定める効用関数 $u(x) := \log x$ とすると、期待効用（効用の期待値）は以下となる。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \log \left(2^k\right) = \log 4$$

- 期待効用の観点では、掛け金が有限値である 4 円以下の場合に賭けに参加すべきとなる。
- このような不確実性下の意思決定では、期待値で考えるより、期待効用で考えるほうが合理的と思われる。

効用関数

- 帰結（選択肢）全体の集合 X と、その上の効用関数 $u : X \to \mathbb{R}$ が与えられることで、最適な選択肢を求めることができる。※雑な議論
- 例えば、りんご p_1 円、みかん p_2 円、予算 M 円のときにりんご、みかんを何個買うべきかという問題を考える。
- りんご x_1 個、みかんが x_2 個を消費した時の効用を $u(x_1, x_2)$ とすると、上記の問題は最適化問題として定式化できる。

$$
\begin{array}{ll}
\textit{maximize} & u(x_1, x_2) \\
\textit{subject to} & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq M \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

- それでは、効用関数はどのような条件で存在するのだろうか。
- まず、意思決定者の好みである「選好関係」を定義し、どのような条件で効用関数が存在するかを考える。
- 選好関係は、数学の「二項関係」で表せる。

選好

- 帰結全体の集合 X と、X 上の選好を表す二項関係「$\succsim$」を考える。
  - $a \in X$ を $b \in X$ 以上に好むことを、「$a \succsim b$」と表記する。
- 以下では、、選好関係 $\succsim$ が合理性を満たすことを仮定する。

Definition (合理的選好)

集合 X 上の選好 $\succsim$ が、反射性・推移性・完備性を満たすとき、選好 $\succsim$ は合理的であるという。

- 反射性：$\forall x \in X, x \succsim x$
- 推移性：$\forall x, y, z \in X, x \succsim y \wedge y \succsim z \to x \succsim z$
- 完備性：$\forall x, y \in X, x \succsim y \vee y \succsim x$

選好

- 選好関係 $\succsim$ を用いて、$a \in X$ を $b \in X$ より好むことを示す選好関係「$a \succ b$」を定義できる。
  - $a \succ b \Leftrightarrow_{def} a \succsim b$ かつ $\wedge \neg b \succsim a$
- 選好関係 $\succsim$ を用いて、$a \in X$ と $b \in X$ が無差別であることを示す選好関係「$a \sim b$」を定義できる。
  - $a \sim b \Leftrightarrow_{def} a \succsim b$ かつ $b \succsim a$
- 選好関係 $\succ$ は以下を満たす。
  - 反対称性：$\forall x, y \in X, xRy \to \neg yRx$
  - 負推移性：$\forall x, y, z \in X, \neg xRy \wedge \neg yRz \to \neg xRz$
- 選好関係 $\sim$ は以下を満たす。
  - 反射性：$\forall x \in X, xRx$
  - 対称性：$\forall x, y \in X, xRy \to yRx$
  - 推移性：$\forall x, y, z \in X, xRy \wedge yRz \to xRz$

上方位集合

Definition (上方位集合)

帰結の集合 X 上の選好関係 $\succsim$ が与えられたとき、$x \in X$[以上に/より] 好ましい帰結からなる集合

$$U(x) = \{y \in X \mid y \succsim x\}$$

$$U_s(x) = \{y \in X \mid y \succ x\}$$

を x の [上方位集合/狭義上位集合] という。

下方位集合

Definition (下方位集合)

帰結の集合 X 上の選好関係 $\succsim$ が与えられたとき、$x \in X$[以下に/より] 好ましい帰結からなる集合

$$L(x) = \{y \in X \mid y \precsim x\}$$

$$L_s(x) = \{y \in X \mid y \prec x\}$$

を x の [下方位集合/狭義下方位集合] という。

連続性

Definition (連続性)

帰結の集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 上の選好関係 $\succsim$ が与えられたとき、任意の $x \in X$ について、

- 狭義上方位集合 $U_s(x) = \{y \in X \mid y \succ x\}$
- 狭義下方位集合 $L_s(x) = \{y \in X \mid y \prec x\}$

がともに開集合であるとき、選好関係 $\succsim$ は連続であるという。

効用関数表現

- 帰結の集合 X 上の選好関係 $\succsim$ が定義されたとき、その選好関係を表現する効用関数 $u: X \to \mathbb{R}$ は存在するだろうか。

Definition (効用関数表現)

集合 X 上の選好関係 $\succsim$ が与えられたとき、効用関数 $u: X \to \mathbb{R}$ が存在して、

$$\forall x, y \in X, u(x) \geq u(y) \leftrightarrow x \succsim y$$

を満たすとき、効用関数 $u: X \to \mathbb{R}$ は選好関係 $\succsim$ を表現するという。

効用関数表現

- 一般に、選好関係 $\succsim$ を表現する効用関数 $u : X \to \mathbb{R}$ が存在するとは限らない。

Example (辞書式選好)

集合 $X := [0,1]^2$ 上の選好 $\succsim$ を

$$\succsim := \left\{ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \left([0,1]^2\right)^2 \mid (x_1 < x_2) \vee ((x_1 = x_2) \wedge (y_1 < y_2)) \right\}$$

と定義する。このとき、選好 $\succsim$ を表現する効用関数 $u : X \to \mathbb{R}$ は存在しない。

ある効用関数 $u : X \to \mathbb{R}$ が辞書式選好 $\succsim$ を表現とすると仮定する。
このとき、$\succsim$ の定義より、$u(x,0) < q(x) < u(x,1)$ を満たす狭義単調増加な有理関数 $q : [0,1] \to \mathbb{Q}$ がとれる。
有理関数 $q : [0,1] \to \mathbb{Q}$ は単射となるが、$[0,1]$ は非加算集合、$\mathbb{Q}$ は加算集合であるため矛盾する。

ドブリューの表現定理

Lemma (ドブリューの表現定理：補題)

X を高々可算な集合とし、$\succsim$ を X 上の（合理的な）選好関係とする。このとき、$\succsim$ を表現する効用関数 $u : X \to \mathbb{R}$ が存在する。

- 【X が有限集合の場合】小さい順に並べて $0, 1, 2, \ldots\ldots$ とする。
- 【X が可算集合の場合】$X = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ とできる。効用関数 $u : X \to \mathbb{R}$ を、

$$u(x_n) := \sum_{k \in \mathbb{N}, x_k \in L(x_n)} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

とすると、これは $\succsim$ を表現する効用関数となる。

ドブリューの表現定理

Theorem (ドブリューの表現定理)

帰結の集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ が凸集合であり、X 上の（合理的な）選好関係 $\succsim$ が連続性を満たすとする。このとき、$\succsim$ を表現する連続な効用関数 $u : X \to \mathbb{R}$ が存在する。

- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ の稠密部分集合 Y 上の効用関数 $u : Y \to \mathbb{R}$ をとる。その後、連続性を使って効用関数を X 上に拡張する。

危険（リスク）下の意思決定

- 危険（リスク）下（結果の客観的な確率が分かっている場合）の意思決定問題を考える。

Example

以下のくじのどちらを引くべきか。

- くじ A：　スイカが 20%、メロンが 30%の確率でもらえる
- くじ B：　パイナップルが 30%、ももが 40%の確率でもらえる

【期待効用仮説】
危険下の意思決定において、意思決定主体は期待効用が最大になる選択をする。

- 期待効用仮説の下では、くじ AB の効用は以下のように計算できる。
  - [くじ A の効用]=[スイカの効用]*20%+[メロンの効用]*30%
  - [くじ B の効用]=[パイナップルの効用]*30%+[ももの効用]*40%

有限くじ

- 危険下の意思決定問題の多くは、有限くじでモデル化できる。

Definition (有限くじ)

帰結の集合 X 上の有限くじとは、X 上の有限の台を持つ確率分布の集合である。つまり、$\mathcal{L}$ を集合 X 上の有限くじの集合とすると、

$$\mathcal{L} := \left\{ P : X \to [0,1] \mid \# \{x \in X \mid P(x) > 0\} < \infty, \sum_{x \in X} P(x) = 1 \right\}$$

である。

有限くじ

- 有限くじの混合という操作を定義する。

Definition (有限くじの混合)

集合 X 上の有限くじ $P, Q \in \mathcal{L}$ と $\alpha \in [0,1]$ について、有限くじの混合 $\alpha P + (1-\alpha) Q$ を、

$$(\alpha P + (1-\alpha) Q)(x) := \alpha P(x) + (1-\alpha) Q(x)$$

とする。$\alpha P + (1-\alpha) Q \in \mathcal{L}$ となる。

期待効用関数表現

- どのような条件の下で、期待効用仮説は成立し、期待効用関数が存在するだろうか。

Definition (期待効用関数表現)

集合 X 上の有限くじの集合を $\mathcal{L}$ とする。集合 $\mathcal{L}$ 上の選好関係 $\succsim$ が与えられたとき、$\succsim$ を表現する効用関数 $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ が、効用関数 $u : X \to \mathbb{R}$ を用いて

$$U(L) := \sum_{x \in X} u(x) P(x)$$

と表されるとき、期待効用関数 $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ は選好関係 $\succsim$ を表現するという。

フォンノイマン=モルゲンシュテルンの期待効用定理

Theorem (フォンノイマン=モルゲンシュテルンの期待効用定理)

集合 X 上の有限くじの集合を $\mathcal{L}$ とする。このとき、集合 $\mathcal{L}$ 上の（合理的な）選好関係 $\succsim$ が

- 【混合連続性】
$$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}, P \succ Q \succ R \to \begin{cases} \exists\alpha \in (0,1), \alpha P + (1-\alpha) R \succ Q \\ \exists\beta \in (0,1), Q \succ \beta P + (1-\beta) R \end{cases}$$
- 【独立性】$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}, \forall\alpha \in (0,1), P \succ Q \leftrightarrow \alpha P + (1-\alpha) R \succ \alpha Q + (1-\alpha) R$

を満たす必要十分条件は、X 上の効用関数 $u : X \to \mathbb{R}$ が存在して

$$U(P) := \sum_{x \in X} u(x) P(x)$$

なる期待効用関数 $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ が選好関係 $\succsim$ を表現することである。

不確実性下の意思決定

- 次に、不確実性下（結果の客観的な確率が分かっていない場合）の意思決定問題を考える。

Example

明日の天気によって結果が決まるくじがある。以下のくじのどちらを引くべきか。

- くじ A：　スイカ（明日雪）、メロン（明日雨）
- くじ B：　パイナップル（明日くもり）、もも（明日晴れ）

【主観的確率】
不確実性下の意思決定において、意思決定主体は状態についての主観的確率を持つ。
主観的確率をもとに期待効用が最大になる選択をする。

- どのような条件の下で、主観的確率が一意に存在するか。

アンスコム=オーマンの主観的期待効用理論

- いくつかの理論があるが、アンスコム=オーマンの主観的期待効用理論を説明する。
- 有限集合 Ω を状態（可能世界）の集合とする。
  - 明日の天気など確率分布が不明なもの
- 帰結の集合 X 上の有限くじの集合を $\mathcal{L}$ とする。
- AA 行為（アンスコム=オーマン行為）の集合を $\mathcal{H} := \{f : \Omega \to \mathcal{L}\}$ とする。
  - くじ「明日雪ならスイカ、雨ならメロン、他は何もなし」を指すイメージだが、$\mathcal{H} := \{f : \Omega \to X\}$ ではない点に注意。

- AA 行為の混合という操作を定義する。

Definition (AA 行為の混合)

AA 行為 $f, g \in \mathcal{H}$ と $\alpha \in [0,1]$ について、AA 行為の混合 $\alpha f + (1-\alpha) g$ を、

$$(\alpha f + (1-\alpha) g)(\omega) := \alpha f(\omega) + (1-\alpha) g(\omega)$$

とする。$\alpha f + (1-\alpha) g \in \mathcal{H}$ となる。

アンスコム=オーマンの主観的期待効用理論

Theorem (アンスコム=オーマンの主観的期待効用定理)

AA 行為の集合 $\mathcal{H} := \{f : \Omega \to \mathcal{L}\}$ 上の（合理的な）選好関係 $\succsim$ が

- 【混合連続性】
  $\forall f, g, h \in \mathcal{H}, f \succ g \succ h \to \begin{cases} \exists \alpha \in (0,1), \alpha f + (1-\alpha) h \succ g \\ \exists \beta \in (0,1), g \succ \beta f + (1-\beta) h \end{cases}$
- 【独立性】
  $\forall f, g, h \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in (0,1), f \succ g \leftrightarrow \alpha f + (1-\alpha) h \succ \alpha g + (1-\alpha) h$
- 【単調性】$\forall f, g \in \mathcal{H}, \forall \omega \in \Omega, f(\omega) \succ g(\omega) \to f \succ g$

を満たす必要十分条件は、$\mathcal{L}$ 上の期待効用関数 $u : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ と Ω 上の一意な確率 $p : \Omega \to [0,1]$ が存在して、

$$U(f) := \sum_{\omega \in \Omega} u(f(\omega)) p(\omega)$$

なる期待効用関数 $U : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ が選好関係 $\succsim$ を表現することである。

エルスバーグのパラドックス

Example (エルスバーグのパラドックス（曖昧さ回避）)

赤色の玉 30 個と、青色・黄色の玉が合わせて 60 個入った壺から、1 つの玉を取り出す。このとき、以下のくじを考える。

- くじ 1A：赤色の玉を取り出すと 1000 円もらえる。
- くじ 1B：青色の玉を取り出すと 1000 円もらえる。
- くじ 2A：赤色か黄色の玉（青色でない玉）を取り出すと 1,000 円もらえる。
- くじ 2B：青色か黄色の玉（赤色でない玉）を取り出すと 1,000 円もらえる。

このとき、① くじ 1A/1B ではくじ 1A が、② くじ 2A/2B ではくじ 2B が選ばれやすい。

- 確率が明確でない選択肢は選ばれにくい。
- 青色が選ばれる主観的確率を p とすると、① の結果より $p < \frac{1}{3}$、② の結果より $1 - p < \frac{2}{3}$ と評価していることになり矛盾する。

エルスバーグのパラドックス

- 主観的確率は確率の「加法性」を満たさないのではないか。
  - $\forall E_1, E_2 \in \Omega, E_1 \cap E_2 = \emptyset \to P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
- 「加法性」を「単調性」に弱めた理論が考えられている。
  - $\forall E_1, E_2 \in \Omega, E_1 \subseteq E_2 \to P(E_1) \leq P(E_2)$
- 確率測度（ルベーグ積分）$\Rightarrow$ 正規ファジィ測度（ショケ積分）
- 行動経済学で有名な、「プロスペクト理論」は上記の立場に立っている。

まとめ

- 主に経済学における意思決定理論について説明した。
  - ドブリューの表現定理（効用関数の存在条件）
  - 危険下の意思決定：期待効用理論（合理性、混合連続性、独立性）
  - 不確実性下の意思決定：主観的期待効用理論（合理性、混合連続性、独立性、単調性）

参考情報

参考書籍

- イツァーク・ギルボア『不確実性下の意思決定理論』
- 林貴志『意思決定理論』
- 岡田章『ゲーム理論［新版］』