

外延性公理の否定を満たす集合論と等号の注意点

岡本 和也

2025 年 3 月 29 日

復習

論理体系と公理系を何度か変えるので、毎回設定を書くようにします。語彙が明らかな場合は省略します。

設定

論理体系 等号がない古典一階述語論理.

語彙 引数2の述語記号 $\in$.

公理系 なし.

集合の等号を「要素が同じこと」と定義することがあります。
ここでは要素が同じことを $\equiv$ と書いて、あとで使う等号 $=$ と区別します。

定義

集合 A, B について A と B の**要素が同じこと**を次で定義する.

$$A \equiv B :\Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

$\equiv$ における等号公理は, 帰属関係 $\in$ の左側の代入に言い換えられます.

定理

次は同値.

- ① $\varphi(A)$ を論理式, $\varphi(A)$ の A 以外の自由変数は $w_0, \dots, w_{i-1}$ とする.
 $\forall w_0 \dots \forall w_{i-1} \forall A \forall B (A \equiv B \Rightarrow \varphi(A) \Rightarrow \varphi(B)).$
- ② $\forall C \forall A \forall B (A \equiv B \Rightarrow A \in C \Rightarrow B \in C).$

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は明らか.

(2) $\Rightarrow$ (1) は論理式の複雑さに関する帰納法.



復習

一方, 等号 $=$ を定義しないで, 反射性と等号公理を論理のルールに入れる方法もあります.

反射性 $\forall A \ A = A.$

等号公理 $\varphi(A)$ を論理式, $\varphi(A)$ の A 以外の自由変数は $w_0, \dots, w_{i-1}$ とする.

$$\forall w_0 \dots \forall w_{i-1} \forall A \forall B (A = B \Rightarrow \varphi(A) \Rightarrow \varphi(B)).$$

設定

論理体系 等号付き古典一階述語論理.

語彙 なし.

公理系 なし.

集合論以外でも共通の等号 $=$ が使えて便利です.

ZFC の定義 1

設定

論理体系 等号付き古典一階述語論理.

語彙 引数 2 の述語記号 $\in$.

標準的な集合論の ZFC (Zermelo–Fraenkel set theory with the axiom of choice) を定義します.

外延性公理

$$\forall A \forall B ((\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)) \Rightarrow A = B).$$

分出公理図式

$\varphi(x)$ を論理式, $\varphi(x)$ の A , x 以外の自由変数は $w_0, \dots, w_{i-1}$ で, B は φ の自由変数でないとする.

$$\forall w_0 \dots \forall w_{i-1} \forall A \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \varphi(x)).$$

ZFC の定義 2

和集合公理

$$\forall A \exists U \forall y \in A \forall x \in y \ x \in U.$$

冪集合公理

$$\forall A \exists P \forall S ((\forall x (x \in S \Rightarrow x \in A)) \Rightarrow S \in P).$$

基礎の公理

$$\forall x ((\exists w \ w \in x) \Rightarrow \exists y \in x \ \forall z \in x \ z \notin y).$$

ZFC の定義 3

対公理

$$\forall x \forall y \exists P (x \in P \wedge y \in P).$$

無限公理

$$\begin{aligned} \exists N ((\forall e (\forall x (x \notin e) \Rightarrow e \in N)) \wedge \\ \forall n \in N \forall s ((\forall x (x \in s \Leftrightarrow x \in n \vee x = n)) \Rightarrow s \in N)). \end{aligned}$$

置換公理図式

$\varphi(x, y)$ を論理式, $\varphi(x, y)$ の A , x , y 以外の自由変数は $w_0, \dots, w_{i-1}$ で, B は $\varphi(x, y)$ の自由変数でないとする.

$$\forall w_0 \dots \forall w_{i-1} \forall A ((\forall x \in A \exists ! y \varphi(x, y)) \Rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \varphi(x, y)).$$

選択公理

$$\begin{aligned} \forall A ((\forall x \in A \exists w (w \in x) \Rightarrow (\forall x, y \in A \forall z \in x (z \in y \Rightarrow x = y)) \Rightarrow \\ \exists C \forall x \in A \exists ! y \in C (y \in x))). \end{aligned}$$

等号公理から, 外延性公理は次と同値です.

$$\forall A \forall B (A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)).$$

一見, $\equiv$ の定義そのもの, 等号 $=$ が定義できているように見えます.

ZFC $\equiv$, ZFC $\equiv$ の定義 1

ZFC の公理に現れる $=$ を $\equiv$ に置き換えた公理系を考えます. 等号がない場合は ZFC $\equiv$, 等号をもつ場合は ZFC $\equiv$ と書きましょう. 外延性公理は明らかなので外します.

分出公理図式

$\varphi(x)$ を論理式, $\varphi(x)$ の A , x 以外の自由変数は $w_0, \dots, w_{i-1}$ で, B は φ の自由変数でないとする.

$$\forall w_0 \dots \forall w_{i-1} \forall A \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \varphi(x)).$$

和集合公理

$$\forall A \exists U \forall y \in A \forall x \in y \ x \in U.$$

冪集合公理

$$\forall A \exists P \forall S ((\forall x (x \in S \Rightarrow x \in A)) \Rightarrow S \in P).$$

基礎の公理

$$\forall x ((\exists w \ w \in x) \Rightarrow \exists y \in x \forall z \in x \ z \notin y).$$

ZFC₌, ZFC₌ の定義 2

対公理₌

$$\forall x \forall y \exists P \forall z (z \equiv x \vee z \equiv y \Rightarrow z \in P).$$

無限公理₌

$$\begin{aligned} &\exists N ((\forall e (\forall x \ x \notin e) \Rightarrow e \in N) \wedge \\ &\quad \forall n \in N \ \forall s ((\forall x (x \in s \Leftrightarrow x \in n \vee x \equiv n)) \Rightarrow s \in N)). \end{aligned}$$

置換公理図式₌

$\varphi(x, y)$ を論理式, $\varphi(x, y)$ の A , x , y 以外の自由変数は $w_0, \dots, w_{i-1}$ で, B は $\varphi(x, y)$ の自由変数でないとする.

$$\begin{aligned} &\forall w_0 \dots \forall w_{i-1} \forall A ((\forall x \in A \ \exists y (\varphi(x, y) \wedge \forall z (\varphi(x, z) \Rightarrow z \equiv y))) \Rightarrow \\ &\quad \exists B \forall x \in A \ \exists y \in B \ \varphi(x, y)). \end{aligned}$$

選択公理₌

$$\begin{aligned} &\forall A ((\forall x \in A \ \exists w \ w \in x) \Rightarrow (\forall x, y \in A \ \forall z \in x \ (z \in y \Rightarrow x \equiv y)) \Rightarrow \\ &\quad \exists C \forall x \in A \ \exists y \in C \ (y \in x \wedge \forall z \in C \ (z \in x \Rightarrow z \equiv y))). \end{aligned}$$

設定

論理体系 等号がない (等号付きでもよい) 古典一階述語論理.

公理系 ZFC $\equiv$.

次は証明できません.

代入

$$\forall C \forall A \forall B (A \equiv B \Rightarrow A \in C \Rightarrow B \in C).$$

上記を満たすモデルを作ることが, この講演の目標です. そのために外延性公理と等号公理についてもう少し説明します.

$\equiv$ で代入できるように公理を追加すればいい.

設定

論理体系 等号がない古典一階述語論理.

公理系 $\text{ZFC} \equiv, \forall C \forall A \forall B (A \equiv B \Rightarrow A \in C \Rightarrow B \in C).$

外延性公理と等号公理

設定

論理体系 等号付き古典一階述語論理.

語彙 引数 2 の述語記号 $\in$.

公理系 なし.

1 点集合があれば外延性公理と等号公理は同値です.

補題

$\forall x \exists S \forall z (z \in S \Leftrightarrow z = x)$ とすると, 次は同値.

- ① 外延性公理
- ② $\forall C \forall A \forall B (A \equiv B \Rightarrow A \in C \Rightarrow B \in C)$.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は明らか. (2) $\Rightarrow$ (1) は仮定を使う.



外延性公理と等号公理

設定

論理体系 等号付き古典一階述語論理.

公理系 $\text{ZFC} \equiv, \forall C \forall A \forall B (A \equiv B \Rightarrow A \in C \Rightarrow B \in C).$

上記の設定では $\equiv$ と $=$ が同値になります.

系

$$\forall A \forall B (A \equiv B \Leftrightarrow A = B).$$

証明. 対公理 $\equiv$ または冪集合公理と分出公理図式で 1 点集合の存在を示して, 補題を使えばよい. □

反例の作り方の方針

ここからは設定を固定します.

設定

論理体系 等号付き古典一階述語論理.

公理系 ZFC.

- $\text{ZFC} \equiv + \neg \forall C \forall A \forall B (A \equiv B \Rightarrow A \in C \Rightarrow B \in C)$ の例を作りたい.
- 外延性公理の否定を満たす必要がある.
- 空集合が 2 つ以上あるなら外延性公理の否定を満たす.

- $\langle x, y \rangle$ x と y の順序対.
- $\mathcal{P}(A)$ A の冪集合.
- $\text{dom}(f) := \{x \mid \exists y \langle x, y \rangle \in f\}$ f が写像のときは定義域になる.
- $\text{im}(f) := \{y \mid \exists x \langle x, y \rangle \in f\}$ f が写像のときは像になる.
- **On** 順序数のクラス.

整礎集合のクラス **WF** の作り方を調整して, 似た議論をします. 直感的には集合にラベルを付けるようなことをしています.

定義

ℓ を集合とする. すべての $\alpha : \mathbf{On}$ について, $R^\ell(\alpha)$ を次のように超限再帰で定義する.

- $R^\ell(0) := \emptyset,$
- $R^\ell(\alpha + 1) := \mathcal{P}(R^\ell(\alpha)) \times \ell,$
- $R^\ell(\alpha) := \bigcup_{\beta < \alpha} R^\ell(\beta)$ (α は極限順序数).

たとえば $R^2(1) = \{\langle \emptyset, 0 \rangle, \langle \emptyset, 1 \rangle\}$ の要素 $\langle \emptyset, 0 \rangle$ と $\langle \emptyset, 1 \rangle$ が空集合と思えるように議論を進めます.

補題 1

ℓ を集合とすると次が成り立つ.

- ① $\forall \alpha : \mathbf{On} \ \forall x \in R^\ell(\alpha) \ \exists y \subseteq R^\ell(\alpha) \ \exists i \in \ell \ \langle y, i \rangle = x.$
- ② $\forall \alpha, \beta : \mathbf{On} \ (\alpha < \beta \Rightarrow \forall i \in \ell \ \langle R^\ell(\alpha), i \rangle \in R^\ell(\beta)).$
- ③ $\forall \alpha, \beta : \mathbf{On} \ (\alpha \leq \beta \Rightarrow R^\ell(\alpha) \subseteq R^\ell(\beta)) \quad (\text{単調性}).$
- ④ $\forall \alpha : \mathbf{On} \ \forall x \in R^\ell(\alpha) \ ((\forall \beta : \mathbf{On} \ (x \in R^\ell(\beta) \Rightarrow \alpha \leq \beta)) \Rightarrow \exists \gamma : \mathbf{On} \ \alpha = \gamma + 1).$

証明. (1) 超限帰納法.

(2) β についての超限帰納法と (1) からわかる.

(3) (1) と (2) からわかる. 超限帰納法でもよい.

(4) $R^\ell(\alpha)$ の定義.



反例となるクラスを $R^\ell(\alpha)$ のすべてを合わせて定義します.

定義

集合 ℓ について $\mathbf{WF}^\ell$ を次で定義する.

$$x : \mathbf{WF}^\ell : \Leftrightarrow \exists \alpha : \mathbf{On} \ x \in R^\ell(\alpha).$$

$\mathbf{WF}^\ell$ の帰属関係 $x \in' y$ を, 右側の集合 y のラベルを無視したものとして定義します.

定義

$$x \in' A : \Leftrightarrow \exists a \exists i (A = \langle a, i \rangle \wedge x \in a).$$

$(\mathbf{WF}^\ell, \in')$ が反例になることを証明したいので, 準備を整えます.

$x : \mathbf{WF}^\ell$ について階数 $\text{rank}^\ell(x)$ を定義すると $\mathbf{WF}^\ell$ の性質を調べるのに役立ちます.

定義

集合 ℓ と $x : \mathbf{WF}^\ell$ について $x \in R^\ell(r+1)$ となる最小の順序数 r を $\text{rank}^\ell(x)$ と定義する.

$$\text{rank}^\ell(x) := \min\{r : \mathbf{On} \mid x \in R^\ell(r+1)\}.$$

補題 2

集合 ℓ について次が成り立つ.

- ① $\forall \alpha : \mathbf{On} \ R^\ell(\alpha + 1) \setminus R^\ell(\alpha) = \{x : \mathbf{WF}^\ell \mid \text{rank}^\ell(x) = \alpha\}.$
- ② $\forall \alpha : \mathbf{On} \ R^\ell(\alpha) = \{x : \mathbf{WF}^\ell \mid \text{rank}^\ell(x) < \alpha\}.$
- ③ $\forall y : \mathbf{WF}^\ell \ \forall x \in' y \ \text{rank}^\ell(x) < \text{rank}^\ell(y). \quad (\text{狭義単調性})$
- ④ $\forall x \forall i \in \ell \ ((\forall y \in' \langle x, i \rangle \ \mathbf{WF}^\ell) \Rightarrow$
 $(\sup_{y \in x} (\text{rank}^\ell(y) + 1) : \mathbf{On} \wedge \langle x, i \rangle \in R^\ell(\sup_{y \in x} (\text{rank}^\ell(y) + 1) + 1))).$

証明. (1) $\supseteq$ で補題 1 の (4) を使い, あとは R^ℓ の単調性からわかる.

(2) $\subseteq$ で (2) を使い, あとは R^ℓ の単調性からわかる.

(3) (2) からわかる.

(4) R^ℓ の単調性からわかる.



主定理の証明に必要な補題を説明します.

補題 3

集合 ℓ について次が成り立つ.

- ① $\forall x : \mathbf{WF}^\ell \exists i \in \ell \exists y (x = \langle y, i \rangle \wedge \forall z \in y \ z : \mathbf{WF}^\ell).$
- ② $\forall x : \mathbf{WF}^\ell \forall y \in' x \ y : \mathbf{WF}^\ell.$ (推移的)
- ③ $\forall i \in \ell \forall x ((\forall y \in' \langle x, i \rangle \ y : \mathbf{WF}^\ell) \Rightarrow \langle x, i \rangle : \mathbf{WF}^\ell).$

証明. (1) 補題 1 の (1) からわかる.

(2) 補題 1 の (1) からわかる.

(3) 補題 2 の (4) からわかる.



$\mathbf{WF}^\ell$ での $\equiv$ を定義します. $(\mathbf{WF}^\ell, \in')$ は推移的なので少しだけ短く変形できます.

定義

$$A \equiv' B :\Leftrightarrow \forall x (x \in' A \Leftrightarrow x \in' B).$$

$\mathbf{WF}^\ell$ における部分集合を定義します.

定義

$$A \subseteq' B :\Leftrightarrow \forall x \in' A \ x \in' B$$

詳細を調べるために rank^ℓ の計算方法を与える.

補題 4

ℓ を集合とする.

- ① $\forall x \forall i (\langle x, i \rangle : \mathbf{WF}^\ell \Rightarrow \text{rank}^\ell(\langle x, i \rangle) = \sup_{y \in x} (\text{rank}^\ell(y) + 1)).$
- ② $\forall x, y : \mathbf{WF}^\ell (x \subseteq' y \Rightarrow \text{rank}^\ell(x) \leq \text{rank}^\ell(y)).$ (単調性)
- ③ $\forall x, y : \mathbf{WF}^\ell (x \equiv' y \Rightarrow \text{rank}^\ell(x) = \text{rank}^\ell(y)).$

準備

$\mathbf{WF}^\ell$ についての各集合の演算を構成する.
和集合は次のようになる.

補題 5

集合 ℓ と $\langle a, i \rangle : \mathbf{WF}^\ell$ について次が成り立つ.

- ① $\langle \bigcup_{x \in \text{dom}(a)} x, i \rangle : \mathbf{WF}^\ell$.
- ② $\text{rank}^\ell(\langle \bigcup_{x \in \text{dom}(a)} x, i \rangle) \leq \text{rank}^\ell(\langle a, i \rangle)$.

冪集合は次のようになる.

補題 6

集合 ℓ と $\langle a, i \rangle : \mathbf{WF}^\ell$ について次が成り立つ.

- ① $\langle \mathcal{P}(a) \times \ell, i \rangle : \mathbf{WF}^\ell$.
- ② $\text{rank}^\ell(\langle \mathcal{P}(a) \times \ell, i \rangle) = \text{rank}^\ell(\langle a, i \rangle) + 1$.

$\equiv$ についての 2 点集合と, $=$ についての 2 点集合では構成が異なる.
 $\equiv$ についての 2 点集合は次のようになる.

補題 7

集合 ℓ と $k \in \ell$, $\langle a, i \rangle, \langle b, j \rangle : \mathbf{WF}^\ell$ について次が成り立つ.

- ① $\langle \{a, b\} \times \ell, k \rangle : \mathbf{WF}^\ell$.
- ② $\text{rank}^\ell(\langle \{a, b\} \times \ell, k \rangle) = \max\{\text{rank}^\ell(\langle a, i \rangle), \text{rank}^\ell(\langle b, j \rangle)\} + 1$.

$=$ についての 2 点集合は次のようになる.

補題 8

集合 ℓ と $i \in \ell$, $x, y : \mathbf{WF}^\ell$ について次が成り立つ.

- ① $\langle \{x, y\}, i \rangle : \mathbf{WF}^\ell$.
- ② $\text{rank}^\ell(\langle \{x, y\}, i \rangle) = \max\{\text{rank}^\ell(x), \text{rank}^\ell(y)\} + 1$.

$\mathbf{WF}^\ell$ における順序数の構成は $\equiv$ か $=$ のどちらを考えるかで異なる.
 $\equiv$ における順序数を定義する.

定義

ℓ を集合とする. すべての $\alpha : \mathbf{On}$ について, $\alpha_\equiv^\ell$ を次のように超限再帰で定義する.

- $0_\equiv^\ell := \emptyset$,
- $(\alpha + 1)_\equiv^\ell := \alpha_\equiv^\ell \cup (\{\alpha_\equiv^\ell\} \times \ell)$,
- $\alpha_\equiv^\ell := \bigcup_{\beta < \alpha} \beta_\equiv^\ell$ (α は極限順序数).

補題 9

集合 ℓ について次が成り立つ.

- ① $\forall \alpha : \mathbf{On} \ \forall b \in \alpha_{\equiv}^{\ell} \quad b : \mathbf{WF}^{\ell}.$
- ② $\forall \alpha : \mathbf{On} \ \forall b \in \alpha_{\equiv}^{\ell} \ \exists \beta < \alpha \ \exists i \in \ell \ \langle \beta_{\equiv}^{\ell}, i \rangle = b.$
- ③ $\forall \alpha, \beta : \mathbf{On} \ \forall i, j \in \ell \ (\alpha < \beta \Rightarrow \langle \alpha_{\equiv}^{\ell}, i \rangle \in' \langle \beta_{\equiv}^{\ell}, j \rangle).$
- ④ $\forall \alpha, \beta : \mathbf{On} \ \forall i \in \ell \ (\alpha < \beta \Leftrightarrow \langle \alpha_{\equiv}^{\ell}, i \rangle \in R^{\ell}(\beta)).$
- ⑤ $\forall \alpha : \mathbf{On} \ \forall i \in \ell \ \langle \alpha_{\equiv}^{\ell}, i \rangle : \mathbf{WF}^{\ell}.$
- ⑥ $\forall \alpha : \mathbf{On} \ \forall i \in \ell \ \text{rank}^{\ell}(\langle \alpha_{\equiv}^{\ell}, i \rangle) = \alpha.$

= における自然数を定義する.¹

定義

ℓ を集合とする. すべての $n \in \omega$ について, $n_{=}^{\ell}$ を次のように再帰的に定義する.

- $0_{=}^{\ell} := \{0\} \times \ell$,
- $(n+1)_{=}^{\ell} := \{m \cup \{\langle m, i \rangle\} \mid m \in \text{dom}(n_{=}^{\ell}) \wedge i \in \ell\} \times \ell$.

定義

集合 ℓ について $\omega_{=}^{\ell}$ を次で定義する.

$$\omega_{=}^{\ell} := \bigcup_{n \in \omega} n_{=}^{\ell}.$$

¹順序数全体にうまく拡張できなかったので, 一旦この定義で進めます.

補題 10

集合 ℓ について次が成り立つ.

- ① $\forall n \in \omega \ \forall a \in n_{=}^{\ell} \ a : \mathbf{WF}^{\ell}.$
- ② $\forall n \in \omega \ \forall i \in \ell \ \langle n_{=}^{\ell}, i \rangle : \mathbf{WF}^{\ell}.$
- ③ $\forall n \in \omega \ \forall a \in n_{=}^{\ell} \ \text{rank}^{\ell}(a) = n.$
- ④ $\forall n \in \omega \ \forall i \in \ell \ \text{rank}^{\ell}(\langle n_{=}^{\ell}, i \rangle) = n + 1.$
- ⑤ $\forall i \in \ell \ \langle \omega_{=}^{\ell}, i \rangle : \mathbf{WF}^{\ell}.$
- ⑥ $\forall i \in \ell \ \text{rank}^{\ell}(\langle \omega_{=}^{\ell}, i \rangle) = \omega.$

主定理 1

集合 ℓ について $2 \leq |\ell|$ とする.

$(\mathbf{WF}^\ell, \in')$ は $\text{ZFC}^\equiv + \neg \forall C \forall A \forall B (A \equiv B \Rightarrow A \in C \Rightarrow B \in C)$ のモデルである.

注意 1 : $(\mathbf{WF}^\ell, \in')$ は推移的なので少しだけ公理を短く変形できます.

注意 2 : $\text{ZFC}^\equiv$ を $\text{ZFC}^\equiv$ に変えても同様です.

分出公理図式

$\varphi(x)$ を $\in'$ -論理式 (= を入れてもよい), $\varphi(x)$ の A , x 以外の自由変数は $w_0, \dots, w_{i-1}$ で, B は φ の自由変数でないとする.

$$\forall w_0, \dots, w_{i-1}, A : \mathbf{WF}^\ell \exists B : \mathbf{WF}^\ell \forall x (x \in' B \Leftrightarrow x \in' A \wedge \varphi(x)).$$

$A = \langle a, i \rangle$ と書けるので, B を $\langle \{x \in a \mid \varphi(x)\}, i \rangle$ とおけばよい.

和集合公理

$$\forall A : \mathbf{WF}^\ell \exists U : \mathbf{WF}^\ell \forall y \in' A \forall x \in' y \ x \in' U.$$

$A = \langle a, i \rangle$ と書けるので, U を $\langle \bigcup_{x \in \text{dom}(a)} x, i \rangle$ とおけばよい.

対公理[≡]

$$\forall x, y : \mathbf{WF}^\ell \exists P : \mathbf{WF}^\ell \forall z : \mathbf{WF}^\ell (z \equiv' x \vee z \equiv' y \Rightarrow z \in' P).$$

$x = \langle a, i \rangle$, $y = \langle b, j \rangle$ と書けるので, P を $\langle \{a, b\} \times \ell, i \rangle$ とおけばよい.

冪集合公理

$\forall A : \mathbf{WF}^\ell \exists P : \mathbf{WF}^\ell \forall S : \mathbf{WF}^\ell ((\forall x (x \in' S \Rightarrow x \in' A)) \Rightarrow S \in' P).$

$A = \langle a, i \rangle$ と書けるので, P を $\langle \mathcal{P}(a) \times \ell, i \rangle$ とおけばよい.

基礎の公理

$\forall x : \mathbf{WF}^\ell ((\exists w \ w \in' x) \Rightarrow \exists y \in' x \ \forall z \in' x \ z \notin' y).$

$x = \langle a, i \rangle$ と書けて, $a \neq \emptyset$. $b \in a$ について $\text{rank}^\ell(b)$ は順序数より, 最小元がとれる. つまり $\bigcap_{b \in a} \text{rank}^\ell(b) = \text{rank}^\ell(y)$ となる $y \in a$ が存在する. あとは rank^ℓ の狭義単調性からわかる.

無限公理 $\equiv$

$$\exists N : \mathbf{WF}^\ell ((\forall e : \mathbf{WF}^\ell (\forall x \ x \notin' e) \Rightarrow e \in' N) \wedge \\ \forall n \in' N \ \forall s : \mathbf{WF}^\ell ((\forall x : \mathbf{WF}^\ell (x \in' s \Leftrightarrow x \in' n \vee x \equiv' n)) \Rightarrow s \in' N))).$$

$\ell \neq \emptyset$ より $i_0 \in \ell$ が存在する. N を $\langle \omega_\equiv^\ell, i_0 \rangle$ とおけばよい.

置換公理図式 $\equiv$

$\varphi(x, y)$ を $\in'$ -論理式 (= を入れてもよい), $\varphi(x, y)$ の A , x , y 以外の自由変数は $w_0, \dots, w_{i-1}$ で, B は $\varphi(x, y)$ の自由変数でないとする.

$\forall w_0, \dots, w_{i-1}, A : \mathbf{WF}^\ell$

$$((\forall x \in' A \exists y : \mathbf{WF}^\ell (\varphi(x, y) \wedge \forall z : \mathbf{WF}^\ell (\varphi(x, z) \Rightarrow z \equiv' y))) \Rightarrow \exists B : \mathbf{WF}^\ell \forall x \in' A \exists y \in' B \varphi(x, y)).$$

次の補題を証明する.

$$\forall a((\forall x \in a \exists y : \mathbf{WF}^\ell \varphi(x, y)) \Rightarrow \exists b \forall x \in a \exists y : \mathbf{WF}^\ell (y \in b \wedge \varphi(x, y))).$$

仮定より a を定義域とする写像 f を次で定義できる.

$$f(x) := \min\{\alpha : \mathbf{On} \mid \exists y \in R^\ell(\alpha) \varphi(x, y)\}.$$

b を $R^\ell(\bigcup_{x \in a} f(x))$ とおけば補題が証明できる.

$A = \langle a, i \rangle$ と書けるので a に補題を使う. B を $\langle \{y \in b \mid y : \mathbf{WF}^\ell\}, i \rangle$ とおけばよい.

選択公理 $\equiv$

$$\begin{aligned} \forall A : \mathbf{WF}^\ell \big((\forall x \in' A \exists w \ w \in' x) \Rightarrow \\ (\forall x, y \in' A \forall z \in' x (z \in' y \Rightarrow x \equiv' y)) \Rightarrow \\ \exists C : \mathbf{WF}^\ell \forall x \in' A \exists y \in' C (y \in' x \wedge \forall z \in' C (z \in' x \Rightarrow z \equiv' y)) \big). \end{aligned}$$

$A = \langle a, i \rangle$ と書ける. $\text{dom}(a)$ について選択写像

$$f : \text{dom}(a) \rightarrow \bigcup_{i \in \text{dom}(a)} i,$$

$$\forall x \in \text{dom}(a) \ f(x) \in x$$

が存在する. あとは C を $\langle \text{im}(f), i \rangle$ とおけばよい.

代入できないこと

$$\neg \forall A, B, C : \mathbf{WF}^\ell (A \equiv' B \Rightarrow A \in' C \Rightarrow B \in' C).$$

$2 \leq |\ell|$ より $i_0 \neq i_1$ となる $i_0, i_1 \in \ell$ が存在する. A を $\langle \emptyset, i_0 \rangle$, B を $\langle \emptyset, i_1 \rangle$, C を $\langle \{\langle \emptyset, i_0 \rangle\}, i_0 \rangle$ とおけばよい. □

外延性公理の否定を満たす集合論

$(\mathbf{WF}^\ell, \in')$ が外延性公理の否定を満たすことは明らかだが, さらに集合論的に重要な性質をもつ.

主定理 2

集合 ℓ について $2 \leq |\ell|$ とする.

$(\mathbf{WF}^\ell, \in')$ は $\text{ZFC} - \text{外延性公理} + \neg \text{外延性公理}$ のモデルである.

証明

分出公理図式, 和集合公理, 冪集合公理, 基礎の公理は主定理 1 で確認した.

$\neg$ 外延性公理

$\neg \forall A, B : \mathbf{WF}^\ell ((\forall x (x \in' A \Leftrightarrow x \in' B)) \Rightarrow A = B).$

$2 \leq |\ell|$ より $i_0 \neq i_1$ となる $i_0, i_1 \in \ell$ が存在する. A を $\langle \emptyset, i_0 \rangle$, B を $\langle \emptyset, i_1 \rangle$ とおけばよい.

対公理

$\forall x, y : \mathbf{WF}^\ell \exists P : \mathbf{WF}^\ell (x \in' P \wedge y \in' P).$

$x = \langle a, i \rangle$ と書けるので, P を $\langle \{x, y\}, i \rangle$ とおけばよい.

無限公理

$\exists N : \mathbf{WF}^\ell ((\forall e : \mathbf{WF}^\ell (\forall x (x \notin' e) \Rightarrow e \in' N) \wedge$
 $\forall n \in' N \forall s : \mathbf{WF}^\ell ((\forall x (x \in' s \Leftrightarrow x \in' n \vee x = n)) \Rightarrow s \in' N)).$

$\ell \neq \emptyset$ より $i_0 \in \ell$ が存在する. N を $\langle \omega_\ell^\ell, i_0 \rangle$ とおけばよい.

置換公理図式

$\varphi(x, y)$ を $\in'$ -論理式, $\varphi(x, y)$ の A , x , y 以外の自由変数は $w_0, \dots, w_{i-1}$ で, B は $\varphi(x, y)$ の自由変数でないとする.

$$\forall w_0, \dots, w_{i-1}, A : \mathbf{WF}^\ell ((\forall x \in' A \exists! y : \mathbf{WF}^\ell \varphi(x, y)) \Rightarrow \\ \exists B : \mathbf{WF}^\ell \forall x \in' A \exists y \in' B \wedge \varphi(x, y)).$$

補題を挟まず, 通常 of 置換公理図式を直接使う. 集合の構成は主定理 1 の証明と同様.

選択公理

$$\forall A : \mathbf{WF}^\ell ((\forall x \in' A \exists w \ w \in' x) \Rightarrow \\ (\forall x, y \in' A \forall z \in' x \ (z \in' y \Rightarrow x = y)) \Rightarrow \\ \exists C : \mathbf{WF}^\ell \forall x \in' A \exists! y \in' C \ y \in' x).$$

集合の構成は主定理 1 の証明と同様.



まとめ

ℓ を $2 = \{0, 1\}$ とおけば $2 \leq |\ell|$ なので, 次がわかる.

系

ZFC が矛盾しないなら, 次が成り立つ.

- ① $\text{ZFC} \equiv + \neg \forall C \forall A \forall B (A \equiv B \Rightarrow A \in C \Rightarrow B \in C)$ は矛盾しない.
- ② $\text{ZFC} - \text{外延性公理} + \neg \text{外延性公理}$ は矛盾しない.

外延性公理の否定の強化版

$\mathbf{WF}^\ell$ で $\equiv'$ は同値関係のような性質をもちます. この同値類を考えます.

定義

集合 ℓ と $A : \mathbf{WF}^\ell$ について $[A]_{\equiv}^\ell$ を次で定義する.

$$[A]_{\equiv}^\ell := \{B : \mathbf{WF}^\ell \mid A \equiv' B\}$$

$[A]_{\equiv}^\ell$ が集合になることと, その濃度は次のようにしてわかる.

定理

集合 ℓ について次が成り立つ.

- ① $\forall a \forall i (\langle a, i \rangle : \mathbf{WF}^\ell \Rightarrow [\langle a, i \rangle]_{\equiv}^\ell = \{a\} \times \ell).$
- ② $\forall A : \mathbf{WF}^\ell \quad |[A]_{\equiv}^\ell| = |\ell|.$

外延性公理の否定の強化版

よって、ラベル ℓ は要素が同じ集合の個数を表していると考えられます。
 $\ell = 1 = \{0\}$ のときが外延性公理そのものです。
 $\ell = 2 = \{0, 1\}$ のとき次が成り立ちます。

$$\forall A : \mathbf{WF}^2 \exists ! B : \mathbf{WF}^2 (A \neq B \wedge A \equiv' B).$$

ですから、ZFC が矛盾しないなら、
ZFC – 外延性公理 + $\forall A \exists ! B (A \neq B \wedge A \equiv B)$ も矛盾しません。

$R^\ell(\alpha)$ について

集合 ℓ について $2 \leq |\ell|$ とします. 主定理の証明で階数 rank^ℓ を調べることで $(R^\ell(\alpha), \in')$ の性質がわかります.

たとえば, $\alpha : \mathbf{On}$ について $(R^\ell(\alpha), \in')$ は分出公理図式, 和集合公理, 基礎の公理, 選択公理, 選択公理 $\equiv$ をみます.

他の公理は順序数によって性質が変わります.

定理

集合 ℓ と $\alpha : \mathbf{On}$ について $2 \leq |\ell|$ とすると次は同値.

- ① $\alpha < 2$.
- ② $(R^\ell(\alpha), \in')$ で等号公理が成り立つ.

定理

集合 ℓ と $\alpha : \mathbf{On}$ について $2 \leq |\ell|$ とすると次は同値.

- ① $\alpha = 0$.
- ② $(R^\ell(\alpha), \in')$ で外延性公理が成り立つ.

$R^\ell(\alpha)$ について

定理

集合 ℓ と $\alpha : \mathbf{On}$ について $2 \leq |\ell|$ とすると次は同値.

- ① $\alpha = 0$ または α が極限順序数.
- ② $(R^\ell(\alpha), \in')$ で対公理が成り立つ.
- ③ $(R^\ell(\alpha), \in')$ で対公理 $\equiv$ が成り立つ.
- ④ $(R^\ell(\alpha), \in')$ で冪集合公理が成り立つ.

定理

集合 ℓ と $\alpha : \mathbf{On}$ について $2 \leq |\ell|$ とすると次は同値.

- ① $\omega < \alpha$.
- ② $(R^\ell(\alpha), \in')$ で無限公理が成り立つ.
- ③ $(R^\ell(\alpha), \in')$ で無限公理 $\equiv$ が成り立つ.

$R^\ell(\alpha)$ について

置換公理図式は状況が複雑になる.

定理

集合 ℓ と $\alpha : \mathbf{On}$ について $2 \leq |\ell|$ とする.

- ① $\alpha = 0, 1$, または $\alpha = \omega$ かつ $|\ell| < \alpha$, または α が強到達不能基数かつ $|\ell| < \alpha$ のとき, $(R^\ell(\alpha), \in')$ で置換公理図式と置換公理図式 $\equiv$ が成り立つ.
- ② α が後続順序数で $1 < \alpha$ のとき, $(R^\ell(\alpha), \in')$ で置換公理図式と置換公理図式 $\equiv$ は成り立たない.

$(R^\ell(\omega + \omega), \in')$ などで置換公理図式が成り立つかは不明. 極限順序数が特異なときに置換公理図式を成り立たせないような論理式が作れるかわからなかった.

$R^\ell(\alpha)$ について

まとめると次のようになる. (ι は強到達不能基数)

$R^\ell(\alpha)$	0	1	2	...	ω	$\omega + 1$	...	$\omega + \omega$	...	ι
分出公理図式	○	○	○		○	○		○		○
和集合公理	○	○	○		○	○		○		○
選択公理	○	○	○		○	○		○		○
選択公理 $\equiv$	○	○	○		○	○		○		○
基礎の公理	○	○	○		○	○		○		○
外延性公理	○	×	×		×	×		×		×
等号公理	○	○	×		×	×		×		×
対公理	○	×	×		○	×		○		○
対公理 $\equiv$	○	×	×		○	×		○		○
冪集合公理	○	×	×		○	×		○		○
無限公理	×	×	×		×	○		○		○
無限公理 $\equiv$	×	×	×		×	○		○		○
置換公理図式	○	○	×		○	×		?		○
置換公理図式 $\equiv$	○	○	×		○	×		?		○

- 外延性公理なしの集合論で通常集合論のように議論をしようとすると、要素の一致 $\equiv$ で議論が止まって、等号 $=$ まで言えない。そのため、 $\{x \mid \varphi(x)\}$, 空集合, 和集合, 共通部分などが通常のように定義できない。
- NBG や MK などから外延性公理を除いたモデルを作ろうとしましたが、関数クラスの定義が大変で試していません。順序対の定義を無理矢理書き直せばできるかもしれない。

- [1] K. Kunen (藤田博司 訳), 集合論 独立性証明への案内, 日本評論社, 2015.