非古典論理の雰囲気がなんとなくわかった気になる話

ちょーさん

2025/3/30

1. イントロ
2. 古典論理～数理論理学速習コース～
   - 論理式を定義する
   - 証明を定義する
   - 真偽を定義する
   - 健全性と完全性
3. 非古典論理
   - 直観主義論理
   - 様相論理

1. イントロ
2. 古典論理〜数理論理学速習コース〜
   - 論理式を定義する
   - 証明を定義する
   - 真偽を定義する
   - 健全性と完全性
3. 非古典論理
   - 直観主義論理
   - 様相論理

イントロ

数理論理学とは論理を対象として数学的に考察する数学基礎論の一分野. 普段我々が使っている論理を形式化して数学的に議論することで論理がもつ性質を調べる.

数学基礎論といっても「ゼロから論理を定義することで数学の基礎を構築する」というような話ではないので注意.

今回は数理論理学について完全性定理を中心に，簡単のため命題論理の範囲でみていきます.

イントロ 初学者向けの注意

数理論理学を学ぶ上で注意すべきこととして**オブジェクトレベル**と**メタレベル**の区別がある.

- オブジェクトレベルの論理…数理論理学をやる中で定義される論理式などのこと．形式的な論理.
- メタレベルの論理…数理論理学において「論理」を扱うための論理.「ならば」「すべての」など大抵日本語で表記される.

1 イントロ

2 古典論理〜数理論理学速習コース〜
- 論理式を定義する
- 証明を定義する
- 真偽を定義する
- 健全性と完全性

3 非古典論理
- 直観主義論理
- 様相論理

数理論理学の流れ

数理論理学の基本的な議論の流れは

1. 論理式を定義する
2. 論理式に対して証明を定義する
3. 論理式に対して真偽を定義する
4. 証明と真偽を比べる

最初はしばらく定義が続くけど我慢してください (数理論理学あるある).

論理式を定義する

論理式は以下の記号から構成される.

$$
\begin{aligned}
\text{命題変数}&: A, B, C, \cdots \\
\text{論理結合子}&: \ \to, \land, \lor, \neg, \bot, \top \\
\text{補助記号}&: (,)
\end{aligned}
$$

論理結合子はそれぞれ「ならば」「かつ」「または」「否定」「矛盾」「真」を意図している.

論理式を定義する

定義 2.1 (論理式)

論理式を以下の再帰で定義する.

(1) 命題変数は論理式である

(2) φ, ψ が論理式であるとき，以下はすべて論理式である

$$(\varphi \to \psi),\ (\varphi \land \psi),\ (\varphi \lor \psi),\ (\neg\varphi),\ \bot,\ \top$$

(3) 以上で定まる記号列のみが論理式である

論理式を定義する

例 2.2

(1) A と B は論理式

(2) $(\neg A)$ と $(\neg B)$ は論理式

(3) $(A \to B)$ と $((\neg B) \to (\neg A))$ は論理式

(4) $((A \to B) \to ((\neg B) \to (\neg A)))$ は論理式

例 2.3

(1) $\neg$ は論理式でない

(2) $A \to$, $\wedge\bot$, $\vee\top$ は論理式でない

(3) $A \to \neg B$ は論理式でない

以後は補助記号の括弧は混乱のない範囲で省略することがある．

証明を定義する

定義 2.4 (証明)

$\mathcal{T}$ を論理式の集合とする．論理式の有限列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ が $\mathcal{T}$ からの証明であるとは，各 φ_i $(1 \leq i \leq n)$ について以下のいずれかが成り立つことをいう．

(1) $\varphi_i \in \mathcal{T}$ である

(2) φ_i は公理である

(3) ある φ_l , φ_m $(1 \leq l < i, 1 \leq m < i)$ があって φ_i は φ_l と φ_m から推論規則 *MP* によって導かれる

定義 2.5 (推論規則 MP)

論理式 ψ が論理式 φ と χ から推論規則 *MP* によって導かれるとは，χ が $\varphi \to \psi$ という形の論理式であることをいう．

$$\varphi,\ \varphi \to \psi \ \Rightarrow\ \psi$$

証明を定義する

定義 2.6 (公理)

以下の形の論理式を古典論理の公理という.

- (→I) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
- (→E) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
- (∧I) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \land \psi))$
- (∧E) $(\varphi \land \psi) \to \varphi$, $(\varphi \land \psi) \to \psi$
- (∨I) $\varphi \to (\varphi \lor \psi)$, $\psi \to (\varphi \lor \psi)$
- (∨E) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \lor \psi) \to \chi))$
- (¬I) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\varphi))$
- (¬E) $(\neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$
- (ENV) $\top$
- (EFQ) $\bot \to \varphi$
- (LEM) $\varphi \lor \neg\varphi$

証明を定義する

例 2.7

以下は $\{A\}$ からの証明.

1	A	(仮定)
2	$A \to ((\neg A) \to A)$	(公理 →I)
3	$(\neg A) \to A$	(1,2, 推論規則 MP)
4	$(\neg A) \to (A \to B)$	(公理 ¬E)
5	$((\neg A) \to (A \to B)) \to (((\neg A) \to A) \to ((\neg A) \to B))$	(公理 →E)
6	$((\neg A) \to A) \to ((\neg A) \to B)$	(4,5, 推論規則 MP)
7	$(\neg A) \to B$	(3,6, 推論規則 MP)

証明を定義する

定義 2.8 (証明可能)

論理式 φ と論理式の集合 $\mathcal{T}$ に対して，φ を終端とする $\mathcal{T}$ からの証明が存在するとき φ は $\mathcal{T}$ から証明可能であるといい以下のように書く.

$$\mathcal{T} \vdash \varphi$$

例 2.9

$(\neg A) \to B$ は $\{A\}$ から証明可能である.

$$\{A\} \vdash (\neg A) \to B$$

真偽を定義する

論理式に真偽を定義して調べる分野は意味論と呼ばれる.

定義 2.10 (ストラクチャー)

命題変数全体の集合 $\mathcal{P}$ から集合 $\{0,1\}$ への写像 $\mathcal{M}$ をストラクチャーという.

$$\mathcal{M} \colon \mathcal{P} \to \{0,1\}$$

$1, 0$ はそれぞれ真と偽に対応する.

真偽を定義する

定義 2.11 (真である)

ストラクチャー $\mathcal{M}$ と論理式 φ の関係 $\mathcal{M} \models \varphi$ を以下の再帰で定義する.

(1) 命題記号 X に対して

$$\mathcal{M} \models X \Leftrightarrow \mathcal{M}(X) = 1$$

(2) φ, ψ が論理式ならば

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \varphi \land \psi &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi \text{ かつ } \mathcal{M} \models \psi \\
\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi \text{ または } \mathcal{M} \models \psi \\
\mathcal{M} \models \varphi \to \psi &\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \varphi \text{ または } \mathcal{M} \models \psi \\
\mathcal{M} \models \neg\varphi &\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \varphi \\
\mathcal{M} \not\models \bot &, \ \mathcal{M} \models \top
\end{aligned}$$

$\mathcal{M} \models \varphi$ が成り立つとき φ は $\mathcal{M}$ 上で真であるという.

真偽を定義する

例 2.12

ストラクチャー $\mathcal{M}$ が $\mathcal{M}(A)=1,\ \mathcal{M}(B)=1,\ \mathcal{M}(C)=0$ のとき

(1) $\mathcal{M} \models A,\ \mathcal{M} \models B,\ \mathcal{M} \not\models C$

(2) $\mathcal{M} \models A \wedge B,\ \mathcal{M} \not\models A \to C,\ \mathcal{M} \models \neg C,\ \mathcal{M} \not\models \bot$

(3) $\mathcal{M} \models \big((A \wedge B) \vee (A \to C)\big) \to \big(\neg C \vee \bot\big)$

真偽を定義する

定義 2.13 (モデル)

論理式の集合 $\mathcal{T}$ とストラクチャー $\mathcal{M}$ に対して

$$\text{すべての元 } \varphi \in \mathcal{T} \text{ に対して } \mathcal{M} \models \varphi$$

が成り立つとき $\mathcal{M}$ は $\mathcal{T}$ のモデルであるという.

例 2.14

ストラクチャー $\mathcal{M}$ が $\mathcal{M}(A) = 1,\ \mathcal{M}(B) = 1,\ \mathcal{M}(C) = 0$ のとき,
$\mathcal{M}$ は $\{A, B, A \wedge B, \neg C\}$ のモデル

真偽を定義する

定義 2.15 (意味論的帰結)

論理式 φ と論理式の集合 $\mathcal{T}$ に対して

$$\mathcal{T} \text{ のすべてのモデル } \mathcal{M} \text{ に対して } \mathcal{M} \models \varphi$$

が成り立つとき φ は $\mathcal{T}$ の意味論的帰結であるといい以下のように書く.

$$\mathcal{T} \models \varphi$$

例 2.16

$(A \land B) \to \neg C$ は $\{A, B, \neg C\}$ の意味論的帰結である.

$$\{A, B, \neg C\} \models (A \land B) \to \neg C$$

健全性と完全性

定理 2.17 (健全性定理)

論理式の集合 $\mathcal{T}$ と論理式 φ に対して，φ が $\mathcal{T}$ から証明可能ならば φ は $\mathcal{T}$ の意味論的帰結である．

$$\mathcal{T} \vdash \varphi \ \Rightarrow \ \mathcal{T} \models \varphi$$

定理 2.18 (完全性定理)

論理式の集合 $\mathcal{T}$ と論理式 φ に対して，φ が $\mathcal{T}$ の意味論的帰結ならば φ は $\mathcal{T}$ から証明可能である．

$$\mathcal{T} \models \varphi \ \Rightarrow \ \mathcal{T} \vdash \varphi$$

健全性と完全性

- 健全性定理は「証明できるならば正しい」と思える
- 完全性定理は「正しいものは証明できる」と思える
- これらを合わせて「証明は真理を調べるのに必要十分な手段である」と思える！

というのが基本的な数理論理学のお話.

1. イントロ
2. 古典論理〜数理論理学速習コース〜
   - 論理式を定義する
   - 証明を定義する
   - 真偽を定義する
   - 健全性と完全性
3. 非古典論理
   - 直観主義論理
   - 様相論理

古典論理と非古典論理

古典論理
ここまでやってきた「普通の」論理.

非古典論理
古典論理以外の論理のこと．色々な種類がある.

今回は非古典論理の例として**直観主義論理**と**様相論理**を紹介します.

直観主義論理

直観主義論理とは古典論理を制限した「排中律が使えない論理」.

定義 3.1 (直観主義論理の公理)

以下の形の論理式を直観主義論理の公理という.

(→I) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(→E) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(∧I) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \land \psi))$

(∧E) $(\varphi \land \psi) \to \varphi$, $(\varphi \land \psi) \to \psi$

(∨I) $\varphi \to (\varphi \lor \psi)$, $\psi \to (\varphi \lor \psi)$

(∨E) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \lor \psi) \to \chi))$

(¬I) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\varphi))$

(¬E) $(\neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

(ENV) $\top$

(EFQ) $\bot \to \varphi$

直観主義論理

その他の推論規則や証明の定義は古典論理と同様.

定義 3.2 (直観主義論理において証明可能)

論理式 φ と論理式の集合 $\mathcal{T}$ に対して, φ を終端とする $\mathcal{T}$ からの直観主義論理の証明が存在するとき φ は $\mathcal{T}$ から直観主義論理において証明可能であるといい以下のように書く.

$$\mathcal{T} \vdash_{HJ} \varphi$$

例 3.3

例 2.7 の証明は $\{A\} \vdash_{HJ} (\neg A) \to B$ を示している.

直観主義論理

実は，排中律などのいくつかの論理式は直観主義論理において証明可能でないことが知られている．

例 3.4

(1) $\nvdash_{HJ} A \vee \neg A$

(2) $\nvdash_{HJ} (\neg A \to \bot) \to A$

(3) $\nvdash_{HJ} \neg\neg A \to A$

また直観主義論理の古典論理にはない性質として以下が知られている．

定理 3.5 (disjunction property)

論理式 φ, ψ について

$$\vdash_{HJ} \varphi \vee \psi \text{ ならば } \vdash_{HJ} \varphi \text{ または} \vdash_{HJ} \psi$$

これらの事実はあとで証明します．

直観主義論理の意味論

直観主義論理では古典的な意味論に対して健全性定理は成り立つが完全性定理は成り立たない．証明可能な論理式が古典論理よりも少ないため．

そこで直観主義論理に対して完全になるような新しい意味論を考える．

直観主義論理の意味論

定義 3.6 (クリプキモデル)

以下からなる 3 つ組 $\mathcal{K} = (M, \preceq, V)$ を（直観主義論理の）クリプキモデルという.

- M は集合
- $\preceq$ は M 上の前順序
- $V : \mathcal{P} \to 2^M$ は命題変数に M の部分集合を与える写像

であって任意の命題変数 A に対して $V(A) \subset M$ が以下を満たすもの.

$$a \preceq b,\ a \in V(A) \Rightarrow b \in V(A)$$

M の元を**可能世界**, $\preceq$ を**到達可能関係**, V を**付値**とよぶ.

直観主義論理の意味論

定義 3.7 (可能世界上で真)

クリプキモデル $\mathcal{K} = (M, \preceq, V)$ の可能世界 $a \in M$ と論理式 φ に対して，φ が可能世界 a 上で真であるという関係を $a \models \varphi$ と書き，以下の再帰で定義する．

(1) 命題記号 X に対して $a \models X \Leftrightarrow a \in V(X)$

(2) φ, ψ が論理式ならば

$$
\begin{aligned}
a \models \varphi \land \psi &\Leftrightarrow a \models \varphi \text{ かつ } a \models \psi \\
a \models \varphi \lor \psi &\Leftrightarrow a \models \varphi \text{ または } a \models \psi \\
a \models \varphi \to \psi &\Leftrightarrow a \preceq b \text{ となる任意の可能世界 } b \in M \text{ で} \\
&\qquad b \not\models \varphi \text{ または } b \models \psi \\
a \models \neg\varphi &\Leftrightarrow a \preceq b \text{ となる任意の可能世界 } b \in M \text{ で } b \not\models \varphi \\
a \not\models \bot \,&,\ a \models \top
\end{aligned}
$$

直観主義論理の意味論

命題 3.8 (遺伝性)

クリプキモデル $\mathcal{K} = (M, \preceq, V)$ の可能世界 $a, b \in M$ と論理式 φ に対し

$$a \preceq b,\ a \models \varphi \ \Rightarrow\ b \models \varphi$$

要するに，クリプキモデルの可能世界とはモデルであり，クリプキモデルとは複数のモデルが到達可能関係によって移りあうような構造のこと．可能世界は到達可能関係で上へいくほど真な論理式が増えていく．

直観主義論理の意味論

例 3.9

以下のようなクリプキモデル $\mathcal{K}$ を考える．

$$
\begin{array}{c}
b \\
\uparrow \\
a
\end{array}
$$

また付値は $V(A) = \{b\}$ となっているとする．このとき可能世界 $a \in M$ において $a \not\models A \vee \neg A$ となる．

直観主義論理の意味論

論理式 φ が任意のクリプキモデル $\mathcal{K}$ の任意の可能世界 $a \in M$ で真であることを $\models_{\mathrm{Int}} \varphi$ と書くことにする．

定理 3.10 (健全性定理)

論理式 φ に対して，φ が直観主義論理において証明可能ならば任意のクリプキモデル $\mathcal{K}$ の任意の可能世界 $a \in M$ で $a \models \varphi$ である．

$$\vdash_{HJ} \varphi \ \Rightarrow \models_{\mathrm{Int}} \varphi$$

定理 3.11 (完全性定理)

論理式 φ に対して，任意のクリプキモデル $\mathcal{K}$ の任意の可能世界 $a \in M$ で $a \models \varphi$ ならば直観主義論理において証明可能である．

$$\models_{\mathrm{Int}} \varphi \ \Rightarrow \vdash_{HJ} \varphi$$

クリプキモデルを用いて直観主義論理の性質を調べることができる.

例 3.4 の証明) 例 3.9 のクリプキモデルを考える.

$$\begin{array}{c} b \\ \uparrow \\ a \end{array}$$

このとき可能世界 $a \in M$ において $a \not\models A \vee \neg A$ となるのだった．すると健全性定理により $\nvdash_{HJ} A \vee \neg A$ である.
(2) と (3) も同じクリプキモデルから同様にわかる．□

直観主義論理の意味論

disjunction property の証明) $\vdash_{HJ} \varphi \vee \psi$ かつ $\nvdash_{HJ} \varphi$ かつ $\nvdash_{HJ} \psi$ であるとすると，完全性定理よりあるクリプキモデル $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ とそれぞれの可能世界 $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2$ があって $a_1 \nvDash \varphi, a_2 \nvDash \psi$ となる．a_1, a_2 はそれぞれ M_1, M_2 の最小元であるとしてよい．
ここでクリプキモデル $\mathcal{K} = (M, \preceq, V)$ を以下で定義する．

- 可能世界は $M = M_1 \sqcup M_2 \sqcup \{a_0\}$
- 到達可能関係は $a_0 \preceq a_1$，$a_0 \preceq a_2$ と $\preceq_1, \preceq_2$ で定まる前順序
- 付値は $V(A) = V_1(A) \sqcup V_2(A)$

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[d, dash] & & M_2 \arrow[d, dash] \\
a_1 & & a_2 \\
& a_0 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

このとき遺伝性により $a_0 \nvDash \varphi$ かつ $a_0 \nvDash \psi$ となることがわかるので $a_0 \nvDash \varphi \vee \psi$ である．これは $\vdash_{HJ} \varphi \vee \psi$ と健全性定理に矛盾する．$\square$

その他の意味論や論理

直観主義論理の意味論は他にも知られている.

- ハイティング代数値意味論…ハイティング代数値モデル
- 位相意味論…位相空間の開集合系に値をとるモデル
- トポス意味論…トポス (圏) に値をとるモデル

また古典論理を制限した論理も直観主義論理の他に色々ある.

- 最小論理…直観主義論理から爆発律 (EFQ) を除いた論理
- 中間論理…直観主義論理と古典論理の間の強さの論理の総称
- 矛盾許容論理…爆発律を認めない論理の総称

様相論理

様相論理は「様相」を扱えるように古典論理を拡張した論理．論理式を構成する記号として通常の論理結合子に加えて様相演算子を用いる．

$$\text{様相演算子：}\ \Box, \Diamond$$

$\Box$ と $\Diamond$ は色々な解釈の場合があるが，「必ず〜である」「〜である可能性がある」を意図する記号と説明されることが多い．

様相論理の論理式

様相論理では論理式の定義から様相演算子を用いたものになる.

定義 3.12 (様相論理の論理式)

様相論理の論理式を以下の再帰で定義する.

(1) 命題変数は様相論理の論理式である

(2) φ, ψ が様相論理の論理式であるとき，以下はすべて様相論理の論理式である

$$(\varphi \to \psi),\ (\varphi \land \psi),\ (\varphi \lor \psi),\ (\neg\varphi),\ \bot,\ \top,\ (\Box\varphi)$$

(3) 以上で定まる記号列のみが様相論理の論理式である

また，様相論理の論理式 $(\neg(\Box(\neg\varphi)))$ を $(\Diamond\varphi)$ と書く.

以下，様相論理の論理式を単に論理式とよび，括弧は混乱のない範囲で省略することがある.

様相論理の証明

様相論理の体系はいくつかあるが，今回は K とよばれる体系を紹介する．

定義 3.13 (様相論理の公理)

古典論理の公理および以下の形の論理式を様相論理 K の公理という．

(K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

定義 3.14 (推論規則 必然化則)

論理式 ψ が論理式 φ から必然化則によって導かれるとは，ψ が $\Box\varphi$ という形の論理式であることをいう．

$$\varphi \ \Rightarrow \ \Box\varphi$$

様相論理の証明

定義 3.15 (様相論理における証明)

$\mathcal{T}$ を論理式の集合とする．論理式の有限列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ が $\mathcal{T}$ からの（様相論理 *K* における）証明であるとは，各 φ_i $(1 \leq i \leq n)$ について以下のいずれかが成り立つことをいう．

(1) $\varphi_i \in \mathcal{T}$ である
(2) φ_i は様相論理 *K* の公理である
(3) ある φ_l , φ_m $(1 \leq l < i, 1 \leq m < i)$ があって φ_i は φ_l と φ_m から推論規則 *MP* によって導かれる
(4) ある φ_l $(1 \leq l < i)$ があって φ_i は φ_l から必然化則によって導かれる

様相論理の証明

定義 3.16 (様相論理において証明可能)

論理式 φ と論理式の集合 $\mathcal{T}$ に対して，φ を終端とする $\mathcal{T}$ からの証明が存在するとき φ は $\mathcal{T}$ から（様相論理 K において）証明可能であるといい以下のように書く.

$$\mathcal{T} \vdash_K \varphi$$

様相論理の意味論

様相論理に対する意味論もいくつかあるが，こちらもクリプキ意味論が知られている．

定義 3.17 (クリプキモデル)

以下からなる3つ組 $\mathcal{K} = (M, R, V)$ を（様相論理の）クリプキモデルという．

- M は集合
- R は M 上の2項関係
- $V : \mathcal{P} \to 2^M$ は命題変数に M の部分集合を与える写像

また V が与えられていない場合，組 (M, R) をクリプキフレームとよぶ．

直観主義論理のときと同様に M の元は可能世界，R, V はそれぞれ到達可能関係，付値とよばれる．

様相論理の意味論

定義 3.18 (可能世界上で真)

クリプキモデル $\mathcal{K} = (M, R, V)$ の可能世界 $a \in M$ と論理式 φ に対して，φ が可能世界 a 上で真であるという関係を $a \models \varphi$ と書き，以下の再帰で定義する．

(1) 命題記号 X に対して $a \models X \Leftrightarrow a \in V(X)$

(2) φ, ψ が論理式ならば

$$\begin{aligned} a \models \varphi \wedge \psi &\Leftrightarrow a \models \varphi \text{ かつ } a \models \psi \\ a \models \varphi \vee \psi &\Leftrightarrow a \models \varphi \text{ または } a \models \psi \\ a \models \varphi \to \psi &\Leftrightarrow a \not\models \varphi \text{ または } a \models \psi \\ a \models \neg\varphi &\Leftrightarrow a \not\models \varphi \\ a \not\models \bot &,\ a \models \top \\ a \models \Box\varphi &\Leftrightarrow aRb \text{ となる任意の可能世界 } b \in M \text{ で } b \models \varphi \end{aligned}$$

様相論理の意味論

論理式 φ が任意のクリプキモデル $\mathcal{K}$ の任意の可能世界 $a \in M$ で真であることを $\models_{\mathrm{mod}} \varphi$ と書くことにする.

定理 3.19 (健全性定理)

論理式 φ に対して, φ が様相論理において証明可能ならば任意のクリプキモデル $\mathcal{K}$ の任意の可能世界 $a \in M$ で $a \models \varphi$ である.

$$\vdash_K \varphi \Rightarrow \models_{\mathrm{mod}} \varphi$$

定理 3.20 (完全性定理)

論理式 φ に対して, 任意のクリプキモデル $\mathcal{K}$ の任意の可能世界 $a \in M$ で $a \models \varphi$ ならば様相論理において証明可能である.

$$\models_{\mathrm{mod}} \varphi \Rightarrow \vdash_K \varphi$$

様相論理の種類

様相論理には色々な体系がある.

定義 3.21 (様相論理の公理)

公理として以下を加えた体系がある.

- (T) $\Box\varphi \to \varphi$
- (B) $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$
- (4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
- (5) $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$
- (D) $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$
- (.2) $\Diamond\Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

様相論理の種類

定義 3.22 (到達可能関係の性質)

(M, R) をクリプキフレームとする.

- R が反射的 $:\Leftrightarrow$ aRa
- R が対称的 $:\Leftrightarrow$ aRb ならば bRa
- R が推移的 $:\Leftrightarrow$ aRb, bRc ならば aRc
- R がユークリッド的 $:\Leftrightarrow$ aRb, aRc ならば bRc
- R が継起的 $:\Leftrightarrow$ 任意の a にある b が存在して aRb
- R が有向的 $:\Leftrightarrow$ aRb, aRc ならばある d が存在して bRd, cRd

様相論理の種類

様相論理の公理は実は到達可能関係で特徴づけられる．
クリプキフレーム (M, R) と論理式 φ に対して，任意の付値 V と任意の可能世界 $a \in M$ で $a \models \varphi$ となるとき φ はクリプキフレーム (M, R) 上で恒真であるという．

命題 3.23 (様相論理の公理と到達可能関係)

(M, R) をクリプキフレームとする．以下が成り立つ．

- *(T)* が (M, R) で恒真 $\Leftrightarrow$ R が反射的
- *(B)* が (M, R) で恒真 $\Leftrightarrow$ R が対称的
- *(4)* が (M, R) で恒真 $\Leftrightarrow$ R が推移的
- *(5)* が (M, R) で恒真 $\Leftrightarrow$ R がユークリッド的
- *(D)* が (M, R) で恒真 $\Leftrightarrow$ R が継起的
- *(.2)* が (M, R) で恒真 $\Leftrightarrow$ R が有向的

まとめ

- 古典論理以外の論理を非古典論理という
- 非古典論理ごとに色々な意味論がある
- 健全性定理・完全性定理

また今回は意味論や完全性を中心にみたが，非古典論理には他にも色々なモチベーションがある．

参考文献

- 鹿島亮，数理論理学，朝倉書店，2009
- 戸次大介，数理論理学，東京大学出版会，2012
- 古森雄一・小野寛晰，現代数理論理学序説，日本評論社，2010
- 萩谷昌巳・西崎真也，論理と計算のしくみ，岩波書店，2007
- 佐野勝彦・倉橋太志・薄葉季路・黒川英徳・菊池誠，数学における証明と真理 様相論理と数学基礎論，共立出版，2016