ゲーデル宇宙入門

しずめこみ
@202503 数学徒のつどい

概要

リーマン幾何、相対論を少し説明して、ゲーデル宇宙について説明する
時間が許せばゲーデル宇宙についての少し発展的な内容も話す

クルト・ゲーデル

クルト・ゲーデル（Kurt Gödel, 1906 年 4 月 28 日 - 1978 年 1 月 14 日）は、オーストリア・ハンガリー帝国出身の数学者・論理学者・哲学者である。　業績としては、完全性定理、不完全性定理および連続体仮説に関する研究が知られる。

ゲーデルは、米国の市民権を取得し、プリンストン高等研究所の教授となった。この研究所では、アインシュタインと家族ぐるみで親密に交流し、物理学や哲学などについて議論を交わした。　その結果アインシュタインの一般相対性理論におけるゲーデル解（1949 年）を生んだ。この解は、非常に奇妙な性質を示したために、アインシュタインをして自身の理論に疑問を抱かせるに至った。

ゲーデル宇宙

ゲーデル解（ゲーデルかい、Gödel solution）は、一般相対性理論のアインシュタイン方程式の厳密解の一つ。クルト・ゲーデルが 1949 年に発表した。　この解は、やや人工的に構成されているものであるが、解としてはさまざまな奇妙な振る舞いをするため、アインシュタイン方程式そのものに内在する困難さを代表するものとして、よく登場する。ゲーデルはアインシュタインの誕生日を祝う会でゲーデル解を発表した。

時間的閉曲線（CTC）があって、哲学的にかなり物議をかもした。今でも哲学の時間論の論文のネタになっている。相対論においても数学的な興味で調べられている。

線素

Euclid 空間で (x, y, z) と $(x+dx, y+dy, z+dz)$ の微小距離を表すピタゴラスの定理は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1}$$

である。
これを一般化して、微小距離が

$$ds^2 = f(x,y,z)^2 dx^2 + g(x,y,z)^2 dy^2 + h(x,y,z)^2 dz^2 \tag{2}$$
$$+ j(x,y,z)dxdy + k(x,y,z)dxdz + \ell(x,y,z)dydz \tag{3}$$

で与えられる空間を考えると、曲がった３次元空間を表現できる。
さらに次元も一般にして、n 次元空間において、微小距離が

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j, \ (g_{ij} = g_{ji}) \tag{4}$$

で与えられる空間を考えると、曲がった n 次元空間が表現できる。(5) を線素と呼ぶ。

リーマン計量とリーマン多様体

n 次元多様体 M の局所座標を $\{x^i\}$ とすると、

$$g = \sum_{ij} g_{ij}(x) dx^i dx^j \tag{5}$$

は２階共変対称テンソル場を定義する。　(M, g) の組をリーマン多様体と呼ぶ。
　ただし、０固有値の方向があるとその方向に長さが測れないので、$\det(g_{ij}) \neq 0$ とする。３回ぐらいは微分したいから $g_{ij}(x) \in C^3(M)$ とする。

リーマン接続

リーマン接続は計量の一階微分

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\partial_j g_{mk} + \partial_k g_{mj} - \partial_m g_{jk} \right) = \Gamma^i_{kj} \tag{6}$$

隣り合う接空間同士の計量的な †接続† を与える

本当は、接続の一般論があって、計量条件と捻じれ無し条件を課すことでリーマン接続が得られる。

共変微分

ベクトルの無限小の平行移動
通常の方向微分＋無限小離れた接空間の計量的関係の効果

$$\nabla_X Y^i = X^k \partial_k Y^i + \Gamma^i_{km} X^k Y^m \tag{7}$$

測地線

曲線を $I \ni t \mapsto c(t) \in M$, $c \in C^2(I; M)$ とする。 接ベクトルを $X = \dot{c}$ とすると き、$||X(t)||^2 = g(X(t), X(t)) = \mathrm{const}$ となるとき、t を affine parameter という (affine parameter は常に取れる)。 $c(t)$ の加速度を

$$\nabla_X X^i = X^i \partial_i X^j + \Gamma^i_{jk} X^j X^k \tag{8}$$

と定義する。 加速度が 0 の曲線を**測地線**と呼ぶ。

リーマン曲率テンソル

リーマン曲率は計量の 2 階微分

$$R^i_{jkm} = \partial_k \Gamma^i_{mj} - \partial_m \Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{k\ell}\Gamma^\ell_{mj} - \Gamma^i_{m\ell}\Gamma^\ell_{kj} \tag{9}$$

$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im}(\partial_j g_{mk} + \partial_k g_{mj} - \partial_m g_{jk})$ を代入すると g_{ij} の 2 階微分までの式で表せるがかなりごちゃごちゃしている

リッチ曲率テンソル

リーマン曲率テンソルを縮約したもので、計量のラプラシアン

$$
\begin{aligned}
R_{ij} =& -\frac{1}{2}\partial^k \partial_k g_{ij} + \frac{1}{2}(\nabla_i \Gamma_j + \nabla_j \Gamma_i) && (10) \\
& + g^{ab} g^{cd} (\Gamma_{aci}\Gamma_{bdj} + \Gamma_{aci}\Gamma_{bjd} + \Gamma_{acj}\Gamma_{bid}) && (11)
\end{aligned}
$$

スカラー曲率

リッチ曲率テンソルを縮約したもので、リッチ曲率テンソル＝計量のラプラシアンの平均値みたなもの

$$R = R^i_i = -\frac{1}{2} g^{ij} \partial^k \partial_k g_{ij} + \cdots \tag{12}$$

Einstein と相対論

特殊相対性理論とは、重力作用のない状況において電磁力学を記述する目的で 1905 年に Albert Einstein によって発表された論文をはじめとする一連の理論である。

一般相対性理論は、Einstein が 1905 年の特殊相対性理論に続いて、それを発展させ重力を扱えるようにして 1915 年から 1916 年にかけて発表した理論である。

注意

このトークでの相対論の説明の仕方は、必要最小限のことしか述べないから標準的な教科書の解説とは違って見えるかもしれません。相対論の語り方は一意的ではないので興味ある人は探求してみてください。　少なくとも僕は、自分の研究をしたり、数学寄りの相対論の論文を理解したりする上では今日語る事項で十分だと感じています。

余談ですが、僕は相対論における物理的考察が少し苦手で、共同研究者で物理得意な人によく聞いています。

Lorentz 多様体

Definition

M を n 次元微分多様体とし、g を 2 階対称共変テンソル場で非退化なものとする。さらに g の負の固有値は 1 個、正の固有値は $n-1$ 個とする。このとき、(M,g) を **Lorentz 多様体**と呼ぶ。　$X \in T_pM$ は、$g(X,X) > 0$ のとき **spacelike**、　$g(X,X) < 0$ のとき **timelike**、　$g(X,X) = 0$ のとき **null** または **lightlike** と呼ばれる。　spacelike でないベクトルは **causal** とも呼ばれる。

時間的向き

Definition

Lorentz 多様体 (M, g) が**時間的向き付け可能**であるとは、M 全体で定義された timelike ベクトル場 X が存在することである (同値な定義は色々ある)。
timelike ベクトル場 X を１つ固定するとき、各点 $p \in M$ において、causal ベクトル $Y \in T_pM$ が $g(Y_p, X_p) < 0$ となるとき、Y を**未来向き**という（過去向きは符号を逆にして定義する）。

X を $-X$ に取り換えるなどすれば、未来向き過去向きは入れ替わる。なので時間的向き付け可能である場合でも、未来向き、過去向きは X の取り方に依存する。
timelike ベクトル場 X を１つ定めることを M に時間的向きを定めるという。ただし、各接空間の未来向き/過去向きを変化させないような時間的向きを指定する timelike ベクトル場は一意的ではない。

この時間的向きの定義は数学的にはあまり筋の良い定義ではない気がするが、話しやすいのでこのトークではこれを採用する。

時空

Lorentz 幾何の意味での時空とは以下である。

Definition

時間的向き付け可能な Lorentz 多様体を**時空**と呼ぶ。

一般相対論の設定

一般相対論では、この世界は 4 次元時空 (M, g) であると考える。　さらに、質点や光の時空中の軌跡を M 中の曲線（世界線）としてモデルしたい。　質点は接ベクトルが常に未来向き timelike な曲線 (future pointing timelike curve) とし、光線は接ベクトルが常に未来向き lightlike な測地線 (future pointing lightlike geodesic) と考える。

一般相対論を建設するための原理が 2 つある。

等価原理 1

一般相対性理論では重力を時空の曲がりとして捉えることを目指す。物質の存在が時空を曲げ、その時空の曲率が重力作用として物質の運動に影響を与えるという精神である。　特に重力のみを受けて時空中を運動する質点については以下の等価原理を要請する（等価原理は主張の強さなどに関して何種類かありますがここでは単純なものにします）。

Definition

等価原理：重力の影響のみを受けて時空中を運動する質点は時間的な測地線に従う。

等価原理 2

以下ではまずこの等価原理が少なくとも Newton 重力と同程度には重力現象を記述することを見る。　Newton の万有引力の法則によれば重力のみを受けて運動する質点の軌道 $\mathbf{x}(\tau)$ は、重力ポテンシャルを Φ とすると、

$$\ddot{x}^i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$$

となる。

これを等価原理から再現するには次のようにする。まず時空の計量が

$$g = -(1 + 2\Phi(x, y, z))dt^2 + h \tag{13}$$

$$1 >> |\Phi| \tag{14}$$

$$h \sim dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{15}$$

となっているとする。この計量はほとんど平坦なので弱い重力を表していると考えられる。

等価原理 3

このとき測地線 $x^\mu(\tau)$ が非常に遅く運動しているとすると $\dot{x}^0 \sim 1, \dot{x}^i \sim 0$ と近似できる。　そして測地線の方程式は

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\dot{x}^\nu\dot{x}^\lambda \sim \ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{00} = 0 \tag{16}$$

となる。　このとき

$$\Gamma^0_{00} = 0, \Gamma^i_{00} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}$$

なので万有引力が近似的に再現される。

Einstein 方程式 1

Newton 重力では空間の質量密度分布が $\rho(x, y, z)$ で与えられるとき、重力ポテンシャル Φ は Possion 方程式

$$\Delta\Phi = \rho$$

を満たす。 先の例から読み取れるように時空の計量の成分が Newton の重力ポテンシャルに対応していると考えられる。 つまり一般相対性理論では時空の計量テンソルの 10 個の成分 g_{ij} が重力ポテンシャルのようなものの役割を果たしている。 従って Newton 重力の Poisson 方程式を一般化するには計量テンソルに対するラプラシアン的なものを考えるのが良さそう。

ラプラシアンの 4 次元時空の対応物はダランベルシアン $\Box$ なので $\Delta\Phi$ の一般化は $\Box g_{ij}$ のようなものになる。

Einstein 方程式 2

一般相対性理論では「物質が時空を曲げる」という精神があり、時空の曲率を表す幾何学量で $\Box g_{ij}$ の役割を果たすものがあれば良さそう。この性質を持つものとして Ricci テンソル Ric がある。　ということで Poisson 方程式の左辺は Ric と一般化されることになる。

次に右辺の物質の質量密度分布の対応物だが、これが物質のエネルギー運動量テンソルと呼ばれるものになる。　これは各物質に対して物理現象と合うようにいい感じに決める。Lagrangian が与えられている物質ならば変分原理から決定でき、

$$T_{\mu\nu} := \frac{-2}{\sqrt{-\det g}} \frac{\partial(\mathcal{L}_m \sqrt{-\det g})}{\partial g^{\mu\nu}}$$

と定義される。Lagrangian が無い場合はいい感じに手で与える。

Einstein 方程式 3

　例えば、地球などの岩石などは完全流体と呼ばれる流体として記述される。完全流体の流速ベクトル場を u とすると、エネルギー運動量テンソルは、関数 ρ, P により

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu)$$

で定義される。

物質のエネルギー運動量テンソル T が与えられたとき、一般相対性理論においては重力ポテンシャルに対する Poisson 方程式の一般化として、計量テンソルを決定する方程式は次の Einstein 方程式を採用する (4 次元の場合)。

$$\mathrm{Ric} = T - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(T)g$$

　第二項が出てくる理由：長くなるので省略するが、物質はそれ自信の場の方程式に従うので、エネルギー運動量テンソルは $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ を満たさないといけないことが分かる。この事情により両辺の整合性を保つために第二項が必要となる。

Einstein 方程式 4

Einstein 方程式が重力ポテンシャルに対する Poisson 方程式を近似として再現することを確認する。　等価原理の説明で使った計量を仮定し、完全流体の流速ベクトル場 u に対して $u^0 \sim 1, u^i \sim 0$ を仮定する。　さらに $\Phi << 1, P << \rho$ の近似を使うと

$$R_{00} \sim \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\Phi\right)^2}{2\Phi + 1} \sim \Delta\Phi \tag{17}$$

$$T_{00} - \frac{1}{2}T^{\alpha}{}_{\alpha}g_{00} \sim (\rho - 2\Phi P) + \frac{1}{2}(\rho + 3P)(1 + 2\Phi) \sim \frac{3}{2}\rho \tag{18}$$

となり重力ポテンシャルに対する Poisson 方程式が近似的に成り立つことが分かる。　以上のことから推察できるように時空に適当な時間座標を取った時の R_{00} の大きさがその時空の相対論的重力効果の度合いを表している。

Einstein 方程式 5

実は観測によると宇宙は加速膨張をしているようであり、現在の一般相対論は加速膨張を実現させる謎のエネルギーであるダークエネルギーも入れてもよい。ダークエネルギーは Einstein 方程式に宇宙項として加えられる。

$$\mathrm{Ric} = T - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(T)g + \Lambda g$$

この方程式は両辺のトレースを取りそれを再び代入すると同値な方程式

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g = T$$

とも書かれる（たぶんこちらの方がよく見る形）。

一般相対論とは

一般相対論とは何かをあえて†定義†として述べるなら以下のようになる

Definition

(M, g) を n 次元時空とし、ϕ を M 上の適当な場 (テンソル場、スカラー場、ゲージ場など) とする。(g, ϕ) が ϕ を物質とする Einstein 系 (with 宇宙項) を成すとは、ϕ が定めるエネルギー運動量テンソルを T^ϕ とするとき、Einstein 方程式

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g = \kappa T^\phi \tag{19}$$

と ϕ が満たす場の方程式の連立系を満たすときをいう。一般相対論とはこのような Einstein 系の幾何学的性質を研究する分野である。

Einstein 系の例 1

物質がない場合の重力と宇宙項の成す Einstein 系

Definition

(M, g) を n 次元時空とするとき、g が高々宇宙項のみを重力源とする Einstein 系を成すとは

$$\mathrm{Ric} = \Lambda g \tag{20}$$

を満たすときをいう。

特に、$\Lambda = 0$ のとき、g を真空解という。

Einstein 系の例 2

重力と完全流体と宇宙項の成す Einstein 系

Definition

(M,g) を時空とするとき、完全流体とは、unit timelike ベクトル場 U と正のスカラー関数 ρ, P の組 (U,ρ,P) で

$$U\rho = -(\rho+P)\mathrm{div}U \tag{21}$$

$$(\rho+P)\nabla_U U = -(\mathrm{grad}P)^{\perp} \tag{22}$$

を満たすもののことである（場合によっては ρ, P に状態方程式も課す）。さらに Einstein 方程式

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g = \kappa T^{\mathrm{fluid}} \tag{23}$$

$$T^{\mathrm{fluid}} = \rho U\otimes U + P(g + U\otimes U) \tag{24}$$

も満たされるとき、(g,U,ρ,P) は完全流体を物質とする Einstein 系を成すという。

ゲーデル解はこの Einstein 系の解である。

Einstein 系の例 3

重力と電磁場と宇宙項の成す Einstein 系

Definition

(M, g) を時空とするとき、2 形式 F が (source free の)Maxwell 場（または電磁場）であるとは

$$dF = 0 \tag{25}$$

$$d^{\dagger} F = 0 \tag{26}$$

を満たすときを言う。さらに Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \tag{27}$$

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \tag{28}$$

も満たされるとき、(g, F) は Einstein-Maxwell 系を成すという。

Minkowski 時空

Einstein 方程式の自明な真空解として Minkowski 時空がある。

Definition

n 次元 Minkowski 時空とは平坦かつ単連結な Lorentz 多様体である。

$\mathbb{R}^n$ の標準的な正規直交座標に関して、計量は

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \cdots + dw^2 \tag{29}$$

で与えられる。
また特殊相対性理論の舞台となるのは Newton 時空ではなく、Minkowski 時空である。

特殊相対論とは

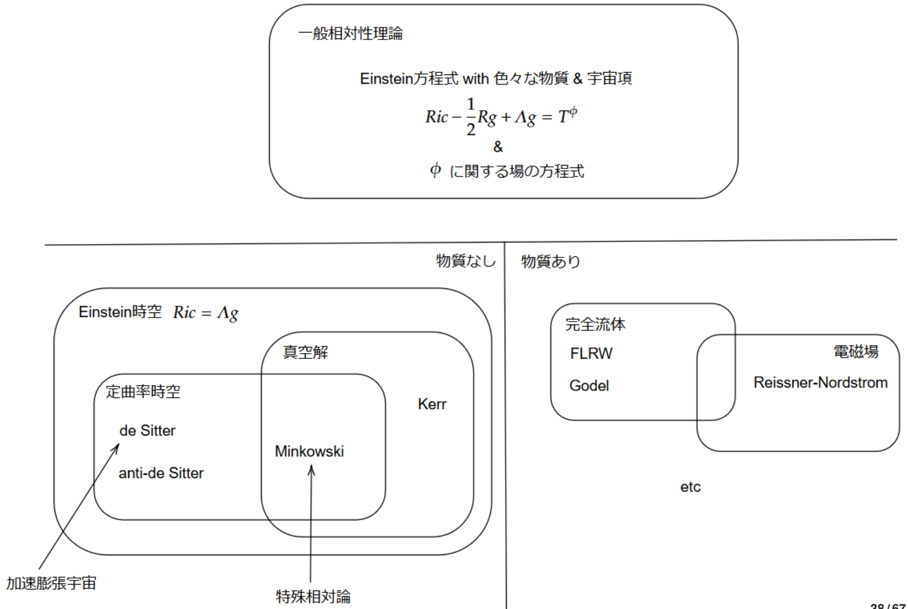
特殊相対性理論とは何かをあえて†定義†として述べるなら以下のようになる

Definition

特殊相対性理論は Minkowski 時空における質点、電磁場、スカラー場、スピノル場、etc など色々な場の古典的な性質を調べる分野である。

特殊相対論は一般相対論の最もよく調べられている各論でかなり深い。平坦なのでそうでない場合と比べて相当色々な性質や概念が成立しおもしろい。

相対論の外観



一般相対性理論
Einstein方程式 with 色々な物質 & 宇宙項
$Ric - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g = T^{\phi}$
&
ϕ に関する場の方程式
物質なし
物質あり
Einstein時空 $Ric = \Lambda g$
真空解
定曲率時空
de Sitter
anti-de Sitter
Minkowski
Kerr
加速膨張宇宙
特殊相対論
完全流体
FLRW
Godel
電磁場
Reissner-Nordstrom
etc

ポアンカレディスク

2 次元 Euclid 空間の計量を極座標で表示すると

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \tag{30}$$

である。　さらにこれを負に曲げると、

$$ds^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{(1 + \frac{K}{4} r^2)^2}, \ (K < 0) \tag{31}$$

となる。ただし、$r^2 < -\frac{4}{K} = \frac{4}{|K|}$ の開円板が定義域で、負の定数 K はこの双曲空間のガウス曲率 (ほぼリッチ曲率) と呼ばれる。　これはポアンカレディスクとも呼ばれ、円盤の境界 $r^2 = \frac{4}{|K|}$ は無限遠。双曲空間は Euclid 空間よりも“広い”空間である。

ポアンカレディスクを"回転"させる 1

さらにここに時間を加え 3 次元の時空にする。

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{(1 + \frac{K}{4}r^2)^2} \tag{32}$$

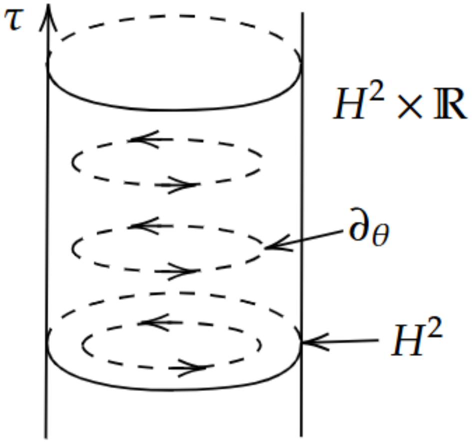
この時空は静的といい、ディスクは"静止"している。

そこでディスクを"回転"させる。

$$ds^2 = -(dt + f(r,\theta)d\theta)^2 + \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{(1 + \frac{K}{4}r^2)^2} \tag{33}$$

　この計量がなぜ回転っぽいかというと、∂_t と ∂_θ はもはや直交せず、従って ∂_t を $t =$ 一定面に射影したベクトルは θ 成分を持っているから。

ポアンカレディスクを"回転"させる 2



回転の正確な定義

先ほどは時空の回転について感覚的に述べたが、幾何学的に well-defined な定義はいくつかあるかもしれないが、そのうちの恐らく最も保守的かつ簡単な定義は

$$||\mathrm{rot}(\partial_t)||^2 := ||d\,{}^\flat\partial_t||^2 \neq 0$$

だと思われる。

"回転量"を調整する

さらに $f(r,\theta)$ を適当に決めて"回転量"が一定になるようにする。つまり ∂_t の rotation の大きさの 2 乗が $||\mathrm{rot}(\partial_t)||^2 = \omega^2 = \mathrm{const.}$ となるようにしたい。　このためには

$$f(r,\theta) = \frac{\omega}{2}\frac{r^2}{1+\frac{K}{4}r^2}$$

とすればよい。　このとき、先の 3 次元時空の計量は

$$ds^2 = -\left(dt + \frac{\omega}{2}\frac{r^2 d\theta}{1+\frac{K}{4}r^2}\right)^2 + \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{(1+\frac{K}{4}r^2)^2} \tag{34}$$

となる。

ゲーデル宇宙モデル

最後に 1 次元空間をリーマン直積で付け加えて次のように 4 次元の時空にする。

$$ds^2 = -\left(dt + \frac{\omega}{2}\frac{r^2 d\theta}{1+\frac{K}{4}r^2}\right)^2 + \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{(1+\frac{K}{4}r^2)^2} + dz^2 \tag{35}$$

　後で述べるが、完全流体を物質とする Einstein 方程式の解になるのは $K = -\omega^2/2$ でなければならない。このときこの時空を Gödel 宇宙という。　しかし因果構造と回転量と曲率の関係を理解するために一旦 $K = -\omega^2/2$ を一旦仮定せずに解説を進める。

時間的閉曲線

有質量の粒子 or 観測者は空間的には光速より遅い速度で移動し、これは時空の中を未来向きの timelike curve に沿ってい動いていることになる。　時間的閉曲線（closed timelike curve, CTC) があると、それに沿って移動している観測者は有限の固有時間（軌道の長さ）で元の時空点に戻ってくる。　これは自分が過去に経験した状態に戻ってくるということなので、タイムマシンとも呼ばれる。物理的にはあまり好まれない。

ゲーデル宇宙の時間的閉曲線 1

Gödel 宇宙において、$t =$ 一定面上に誘導される計量は以下のようになる。

$$ds^2 = -\left(dt_0 + \frac{\omega}{2}\frac{r^2 d\theta}{1+\frac{K}{4}r^2}\right)^2 + \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{(1+\frac{K}{4}r^2)^2} + dz^2 \tag{36}$$

$$= \frac{dr^2}{(1+\frac{K}{4}r^2)^2} + \left(\frac{r^2}{(1+\frac{K}{4}r^2)^2} - \frac{\omega^2}{4}\frac{r^4}{(1+\frac{K}{4}r^2)^2}\right) d\theta^2 + dz^2 \tag{37}$$

$$= \frac{dr^2}{(1+\frac{K}{4}r^2)^2} + \frac{r^2(1-\frac{\omega^2}{4}r^2)}{(1+\frac{K}{4}r^2)^2} d\theta^2 + dz^2 \tag{38}$$

これより、$t =$ 一定面上において、$||\partial_\theta||^2 = \frac{r^2(1-\frac{\omega^2}{4}r^2)}{(1+\frac{K}{4}r^2)^2}$ であると分かる。
よって $r^2 < \frac{4}{\omega^2}$ のときは $||\partial_\theta||^2 > 0$ となり空間的となるが、 $r^2 > \frac{4}{\omega^2}$ という領域が存在すれば、$||\partial_\theta||^2 < 0$ となり時間的となる。 この場合、θ のみを変化させる曲線（$\theta-$ 曲線）は閉曲線なので、このときは時間的閉曲線が存在することになる。

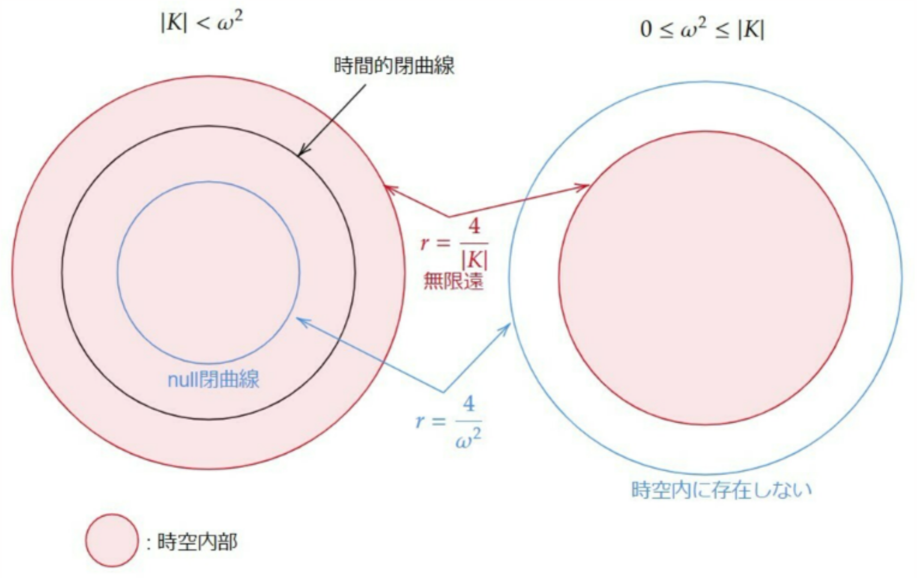
ゲーデル宇宙の時間的閉曲線 2

$r^2 > \frac{4}{\omega^2}$ という領域が存在するかどうかは時空の"回転力"による。　というのもこの時空は $r^2 < \frac{4}{|K|}$ の領域で考えているから、$\frac{4}{\omega^2} < \frac{4}{|K|}$ のとき、すなわち $|K| < \omega^2$ のときしかこういう領域は存在しない。　$0 \leq \omega^2 \leq |K|$ のときは時空がゆっくり回っていて時間的閉曲線は存在しない。　よって時空の"回転力"がポアンカレディスクの曲率（の絶対値）を超えた時に時間的閉曲線が出現する。

実は後で分かるように Einstein 方程式の解になるのは $K = -\omega^2/2$ のときに限る。よって Gödel 宇宙には常に時間的閉曲線が存在する。

普通は $\omega^2 \leq |K|$ のときは Gödel 宇宙と呼ばないが、文脈によっては Gödel type metric と呼ぶことがある（ノルムが一定の時間的 Killing ベクトル場が存在する時空の計量を Gödel type metric と呼ぶ）。

ゲーデル宇宙の時間的閉曲線 3



ゲーデル宇宙が Einstein 方程式の解であることを確認 1

Gödel 宇宙の計量

$$ds^2 = -\left(dt + \frac{\omega}{2}\frac{r^2 d\theta}{1 + \frac{K}{4}r^2}\right)^2 + \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{(1 + \frac{K}{4}r^2)^2} + dz^2$$

が完全流体と宇宙項を持つ Einstein 系の厳密解になるかを確認する。

上の計量で $t \mapsto t + c$ としても計量は不変である。このような性質を持つ ∂_t は Killing ベクトル場と呼ばれる。　一般に Killing ベクトル場 ξ は、$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$ を満たす。　μ, ν を縮約すると、$\nabla_\mu \xi^\mu = 0$ なので、ξ は divergence free である。　また、ノルムが一定の Killing ベクトル場は $\nabla_\xi \xi = 0$ となることが少し議論すると分かり、従って測地線を作る。

ゲーデル宇宙が Einstein 方程式の解であることを確認 1

完全流体として、4 元流速を $u = \partial_t$、密度、圧力 $\rho, P(> 0)$ を定数とする。　このとき u はノルムが一定の Killing ベクトル場なので $\nabla_u u = 0$ となる。　また Killing ベクトル場は digergence free であり、P, ρ は定数なので完全流体の運動方程式

$$u(\rho) = -(\rho + P)div(u), \tag{39}$$

$$(\rho + P)\nabla_u u = -grad(P)^{\perp}, \tag{40}$$

が満たされることが分かる。

要するに、∂_t の流れに沿って、完全流体が流れていると理解することができる。

ゲーデル宇宙が Einstein 方程式の解であることを確認 2

Ricci テンソルの計算は結構めんどうだが、機械的な計算なので、気合で手計算で頑張るか、computer algebra 使うか、Ricci テンソルの 1+3 分解の公式を使ってちょっと賢く計算するかなどである。

正規直交フレームを $\{e_0 = \partial_t, e_1, e_2, e_3 = \partial_z\}$ とすると、　この基底に関して、Ricci テンソルは

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K + \frac{\omega^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K + \frac{\omega^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\left(\frac{\omega^2}{2}, K + \frac{\omega^2}{2}, K + \frac{\omega^2}{2}, 0\right) \tag{41}$$

となる。　また完全流体のエネルギーテンソルは、

$$T = \mathrm{diag}(\rho, P, P, P)$$

となる。

ゲーデル宇宙が Einstein 方程式の解であることを確認 3

$$T-\frac{1}{2}Tr(T)g+\Lambda g \tag{42}$$

$$=\mathrm{diag}(\rho,P,P,P)-\frac{3P-\rho}{2}\mathrm{diag}(-1,1,1,1)+\Lambda\mathrm{diag}(-1,1,1,1) \tag{43}$$

$$=\mathrm{diag}(\frac{\rho+3P}{2}-\Lambda,\frac{\rho-P}{2}+\Lambda,\frac{\rho-P}{2}+\Lambda,\frac{\rho-P}{2}+\Lambda) \tag{44}$$

となるから、　Einstein 方程式

$$Ric=T-\frac{1}{2}Tr(T)g+\Lambda g$$

より

$$\frac{\omega^2}{2}=\frac{\rho+3P}{2}-\Lambda, \tag{45}$$

$$K+\frac{\omega^2}{2}=\frac{\rho-P}{2}+\Lambda, \tag{46}$$

$$0=\frac{\rho-P}{2}+\Lambda \tag{47}$$

を得る。

ゲーデル宇宙が Einstein 方程式の解であることを確認 4

Einstein 方程式を解くと

$$\Lambda = -\frac{\rho - P}{2}, \tag{48}$$

$$\omega^2 = 2(\rho + P), \tag{49}$$

$$K = -\frac{\omega^2}{2} = -(\rho + P) \tag{50}$$

となる。 これで完全流体が重力源の物質となる Einstein 系の厳密解として Gödel 宇宙が得られることが分かった。

$K = -(\rho + P)$ などは物質が時空の曲がり方を決めるという相対論の精神を簡単に表している。

ゲーデル宇宙の他の座標

Gödel 宇宙の３つの座標
(i) Holocycle based 座標

$$ds^2 = \frac{2}{\omega^2}\left(-(dt + e^{-x}dy)^2 + dx^2 + \frac{e^{-2x}}{2}dy^2 + dz^2\right)$$

(ii) Hyperbolic model based 座標

$$ds^2 = -\left(dt + \frac{4}{\omega}\sinh^2\left(\frac{\rho}{2}\right)d\theta\right)^2 + \frac{2}{\omega^2}(d\rho^2 + \sinh^2\rho d\theta^2) + dz^2$$

(iii) Poincare model based 座標

$$ds^2 = -\left(dt + \frac{\omega}{2}\frac{r^2 d\theta}{1 + \frac{K}{4}r^2}\right)^2 + \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{(1 + \frac{K}{4}r^2)^2} + dz^2,\ K = -\frac{\omega^2}{2}$$

1. 今日のトーク概要
2. ゲーデル宇宙についてのイントロ
3. リーマン幾何速習
4. 相対性理論
5. ゲーデル宇宙入門
6. ゲーデル宇宙についての少し発展的な内容（僕の知る範囲で）
7. まとめ

ゲーデル宇宙の対称性

計量を不変に保つ微分同相変換を等長変換といい、その変換の成す群を等長変換群という。
等長変換群が推移的に作用している時空を等質時空という。
ゲーデル宇宙は 5 次元の等長変換群 $SU(1,1) \times \mathbb{R}^2$ を持つ等質時空である。
４次元時空の等長変換群の次元としてあり得るのは、10,7,6,5,4,3,2,1,0 次元だから、４次元時空としての対称性の高さは真ん中ぐらい。

因果構造

未来向き causal curve で結ばれる 2 点に対して順序関係を定義して、時空全体として因果関係がどのようになっているのかを論じる因果構造という分野がある（Riemann 多様体には存在しない構造）。
因果関係の振る舞いの良さの定義として、因果階層と呼ばれる時空の種類があり、悪い方から順番に、totally vicious, Non-totally vicious, chronological, causal, distinguishing, strong causal, stably causal, causally continuous, causally simple, globally hyperbolic となっている（もう少し細かい分類もある）。
totally(全) vicious(悪質) というクラスが物理的には最悪の因果構造であり、任意の 2 異なる点を結ぶ未来向き timelike curve が存在する。
位相空間論で例えると、totally vicious は密着位相空間で、strongly causal がハウスドルフ空間みたいな感じ (Alexandrof トポロジーを考えるとこの対比を厳密に述べることができる)。

ゲーデル宇宙は totally vicious

CTC が存在する等質時空は T.V. になるので、ゲーデル宇宙は T.V. である。

ゲーデル type metric

unit timelike Killing vector が存在する計量はゲーデル type metric などと呼ばれ、比較的扱いやすいが簡単過ぎない時空として幾何学的研究の対象となっている。

スカラー場と特殊関数

ゲーデル宇宙においてスカラー場の方程式が特殊関数を使って解ける
何か対称性や表現論と関係があるのか？

3 次元 Lorentz 佐々木多様体が本質

ゲーデル宇宙は $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ 型の 3 次元 Lorentz 佐々木多様体に空間を直積したものなので、全てではないが、多くの性質は本質的には 3 次元 Lorentz 佐々木多様体の幾何構造から来ている。

哲学の時間論の論文

僕は哲学者ではないので、時間論とかよく知らないが、現在でもゲーデル宇宙をモデルにした議論が続いているらしい。歴史も意義も僕はよく理解していないが、以前、論文を作成するのに causality の議論についてアドバイスした（共著というほどではない）。

Aames, Jimmy. "Temporal becoming in a relativistic universe: Causal diamonds and Gödel’s philosophy of time." European Journal for Philosophy of Science 12.3 (2022): 44.

1. 今日のトーク概要
2. ゲーデル宇宙についてのイントロ
3. リーマン幾何速習
4. 相対性理論
5. ゲーデル宇宙入門
6. ゲーデル宇宙についての少し発展的な内容（僕の知る範囲で）
7. まとめ

トークまとめ

ゲーデル宇宙の幾何学的な構成：双曲平面をいい感じに回転させせて、1 次元空間を直積する
回転する完全流体を物質とする Einstein 方程式の解になっている
特に流体の密度と圧力が双曲平面の曲率を決めている
因果構造が最悪
発展的な話題がいくらかあった

僕の感想

物理としては間違いなくメインストリームではない
ゲーデル type metric についてはまだ探せば数学的な研究テーマは色々あると思う
物理としてはオワコンかもしれないが、Lorentz 幾何 or 数理相対論としてはオワコンではなくまだまだ興味深い対象だと思う
時間なくて出来てないが、ゲーデル type metric でスピン幾何的な研究をしたいと思っている（←興味ある人は連絡してください）

終わり

ご清聴ありがとうございました。