ディオファントス方程式の解の存在判定と数え上げについて

N.Y(@N_Y_Big_Apple)

Agenda

背景：ディオファントス方程式について

わいの修論の概要：2次ディオファントス方程式の決定アルゴリズムのサーベイ

連立1次方程式の自然数解の数え上げ公式についての先行研究

連立2次方程式の解の数え上げへの拡張

背景

ディオファントス方程式

ディオファントス方程式：$f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (f \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n])$

- 解は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$ の範囲で探索

ディオファントス方程式

ディオファントス方程式：$f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (f \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n])$

- 解は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$ の範囲で探索

例：Erdős–Straus conjecture（未解決）

すべての整数 $N \geq 2$ に対して方程式

$$\frac{4}{N} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}$$

を満たす正の整数 X, Y, Z は存在するか？

応用上のモチベーション

プログラムのループ不変式の推定にディオファントス方程式が応用されている。
(COLO 2003)

example

Sample program

$x_1 \leftarrow 2$

$x_2 \leftarrow 1$

while TRUE do

$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \leftarrow x_1 + 2 \\ x_2 \leftarrow x_2 + 1 \end{array} \right\}$

Target loop invariant $\phi := c_1 x_1 + c_2 x_2 + d \leq 0$

initial condition

λ_0	$0x_1 + 0x_2 - 1 \leq 0$
λ_1	$x_1 + 0x_2 - 2 = 0$
λ_2	$0x_1 + x_2 - 1 = 0$
	$c_1 x_1 + c_2 x_2 + d \leq 0$

loop condition

μ	$c_1 x_1 + c_1 x_2 + 0x_1' + 0x_2' + d \leq 0$
λ_0'	$0x_1 + 0x_2 + 0x_1' + 0x_2' - 1 \leq 0$
λ_1'	$x_1 + 0x_2 - x_1' + 0x_2' + 2 = 0$
λ_2'	$0x_1 + x_2 + 0x_1' - x_2' + 1 = 0$
	$0x_1 + 0x_2 + c_1 x_1' + c_2 x_2' + d \leq 0$

Applying Farkas' lemma, you get quadratic constraints

$$\begin{aligned} \exists\lambda_0 \exists\lambda_1 \exists\lambda_2\, \exists\mu \exists\lambda_0' \exists\lambda_1' \exists\lambda_2' [\, & c_1 = \lambda_1 \wedge c_2 = \lambda_2 \wedge d = -2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_0 \wedge \lambda_0 \geq 0 \\ & \wedge\ c_1\mu + \lambda_1' = 0 \wedge c_2\mu + \lambda_2' = 0 \wedge -\lambda_1' = c_1 \wedge -\lambda_2' = c_2 \\ & \wedge d = \mu d - \lambda_0' + 2\lambda_1' + \lambda_2' \wedge \mu \geq 0 \wedge \lambda_0' \geq 0] \end{aligned}$$

応用上のモチベーション

プログラムのループ不変式の推定にディオファントス方程式が応用されている。
(COLO 2003)

Sample program

$x_1 \leftarrow 2$

$x_2 \leftarrow 1$

while TRUE do

$\left[\begin{array}{l} x_1 \leftarrow x_1 + 2 \\ x_2 \leftarrow x_2 + 1 \end{array}\right]$

Target loop invariant $\phi := c_1 x_1 + c_2 x_2 + d \leq 0$

initial condition

λ_0	$0x_1 + 0x_2 - 1 \leq 0$
λ_1	$x_1 + 0x_2 - 2 = 0$
λ_2	$0x_1 + x_2 - 1 = 0$
	$c_1 x_1 + c_2 x_2 + d \leq 0$

loop condition

μ	$c_1 x_1 + c_1 x_2 + 0x_1' + 0x_2' + d \leq 0$
λ_0'	$0x_1 + 0x_2 + 0x_1' + 0x_2' - 1 \leq 0$
λ_1'	$x_1 + 0x_2 - x_1' + 0x_2' + 2 = 0$
λ_2'	$0x_1 + x_2 + 0x_1' - x_2' + 1 = 0$
	$0x_1 + 0x_2 + c_1 x_1' + c_2 x_2' + d \leq 0$

Applying Farkas' lemma, you get quadratic constraints

$$\exists\lambda_0\exists\lambda_1\exists\lambda_2\,\exists\mu\exists\lambda_0'\exists\lambda_1'\exists\lambda_2'[\, c_1 = \lambda_1 \wedge c_2 = \lambda_2 \wedge d = -2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_0 \wedge \lambda_0 \geq 0$$
$$\wedge\ c_1\mu + \lambda_1' = 0 \wedge c_2\mu + \lambda_2' = 0 \wedge -\lambda_1' = c_1 \wedge -\lambda_2' = c_2$$
$$\wedge\ d = \mu d + \lambda_0' + 2\lambda_1' + \lambda_2' \wedge \mu \geq 0 \wedge \lambda_0' \geq 0]$$

Hilbertの第10問題

入力 $f \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ にたいして、対応する方程式に整数解があるかどうかを出力するアルゴリズムは存在するか？

Hilbertの第10問題

入力 $f \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ にたいして、対応する方程式に整数解があるかどうかを出力するアルゴリズムは存在するか？

→　Hilbertの第10問題

Hilbertの第10問題

残念ながらHilbertの第10問題は否定的に解決されている。(Matijasevic 1971)

つまりディオファントス方程式の整数解の有無を機械的に求めることはできない

Hilbertの第10問題

残念ながらHilbertの第10問題は否定的に解決されている。(Matijasevic 1971)

つまりディオファントス方程式の整数解の有無を機械的に求めることはできない

さらに、4次方程式に限っても決定不能

- 任意のディオファントス方程式は$u = xy$などと変数を追加することで、二次の連立方程式$\bigwedge_{1\leq i\leq r} f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0$ に帰着。単一の4次方程式$\sum_{1\leq i\leq r} \{f_i(x_1, \cdots, x_n)\}^2 = 0$ に帰着。

Hilbertの第10問題

残念ながらHilbertの第10問題は否定的に解決されている。(Matijasevic 1971)

つまりディオファントス方程式の整数解の有無を機械的に求めることはできない

さらに、4次方程式に限っても決定不能

- 任意のディオファントス方程式は$u = xy$などと変数を追加することで、二次の連立方程式$\bigwedge_{1\leq i\leq r} f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0$ に帰着。単一の4次方程式$\sum_{1\leq i\leq r} \{f_i(x_1, \cdots, x_n)\}^2 = 0$ に帰着。

つまり2次連立方程式も一般には決定不能

未解決問題と決定可能なケース

単一の3次方程式の決定可能性は未解決

単一の2次方程式は決定可能(Grunewald 1981)

未解決問題と決定可能なケース

単一の3次方程式の決定可能性は未解決

単一の2次方程式は決定可能(Grunewald 1981)

わいの修論で決定アルゴリズムをサーベイ

Nakamura ”On algorithms to solve Quadratic Diophantine equation”
Master thesis, Japan Advanced Institute of Science and Technology 2024
https://dspace02.jaist.ac.jp/dspace/handle/10119/19420

わいの修論概要

ここから見れるよ！

二次ディオファントス方程式と二次形式

$Q(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{x}) = c$　　・・・(※)　$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}$　　$A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{Z})$ 、対称行列

$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}$　$\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$　　$c \in \mathbb{Z}$

以下のGrunwaldの命題より、二次の項に対応する
二次形式のふるまいを調べることが本質的である。

命題(【GRUN 1981】Proposition1)

A がregularであるとき、方程式 $Q(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{x}) = c$ が解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m$ を持つ

$\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^m$　　$Q(\boldsymbol{z}) = c^*$　and　$\boldsymbol{z} \equiv \boldsymbol{h} \mod 2d$]

但し、$d = d(Q) = \det A$　$\boldsymbol{h} = dA^{-1}\boldsymbol{b}$　　$c^* = 4d^2c + Q(\boldsymbol{h})$

二次ディオファントス方程式と二次形式

$Q(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{x}) = c$　　・・・(※)　$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}$　　$A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{Z})$　、対称行列

$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}$　$\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$　　$c \in \mathbb{Z}$

以下のGrunwaldの命題より、二次の項に対応する
二次形式のふるまいを調べることが本質的である。

命題(【GRUN 1981】Proposition1)

A がregularであるとき、方程式 $Q(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{x}) = c$ が解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m$ を持つ

$\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^m$　　$Q(\boldsymbol{z}) = c^*$　and　$\boldsymbol{z} \equiv \boldsymbol{h} \mod 2d$]

但し、$d = d(Q) = \det A$　$\boldsymbol{h} = dA^{-1}\boldsymbol{b}$　　$c^* = 4d^2c + Q(\boldsymbol{h})$

簡単なケース

- 1変数の場合は二次方程式の解の公式により直接解を求める。
- $A = O$ の場合は一次ディオファントス方程式であり、ユークリッドの互除法を一般化した議論で解のパラメータ表示を得られる。
- A がsingularな場合は0固有ベクトルを使った基底変換により、変数の数を減らす。
- A がdefinite(固有値が一定符号)の場合は解の候補を有限個に絞ることが容易。

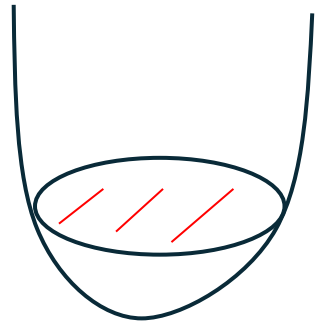
簡単なケース

■ 1変数の場合は二次方程式の解の公式により直接解を求める。

■ $A = O$ の場合は一次ディオファントス方程式であり、ユークリッドの互除法を一般化した議論で解のパラメータ表示を得られる。

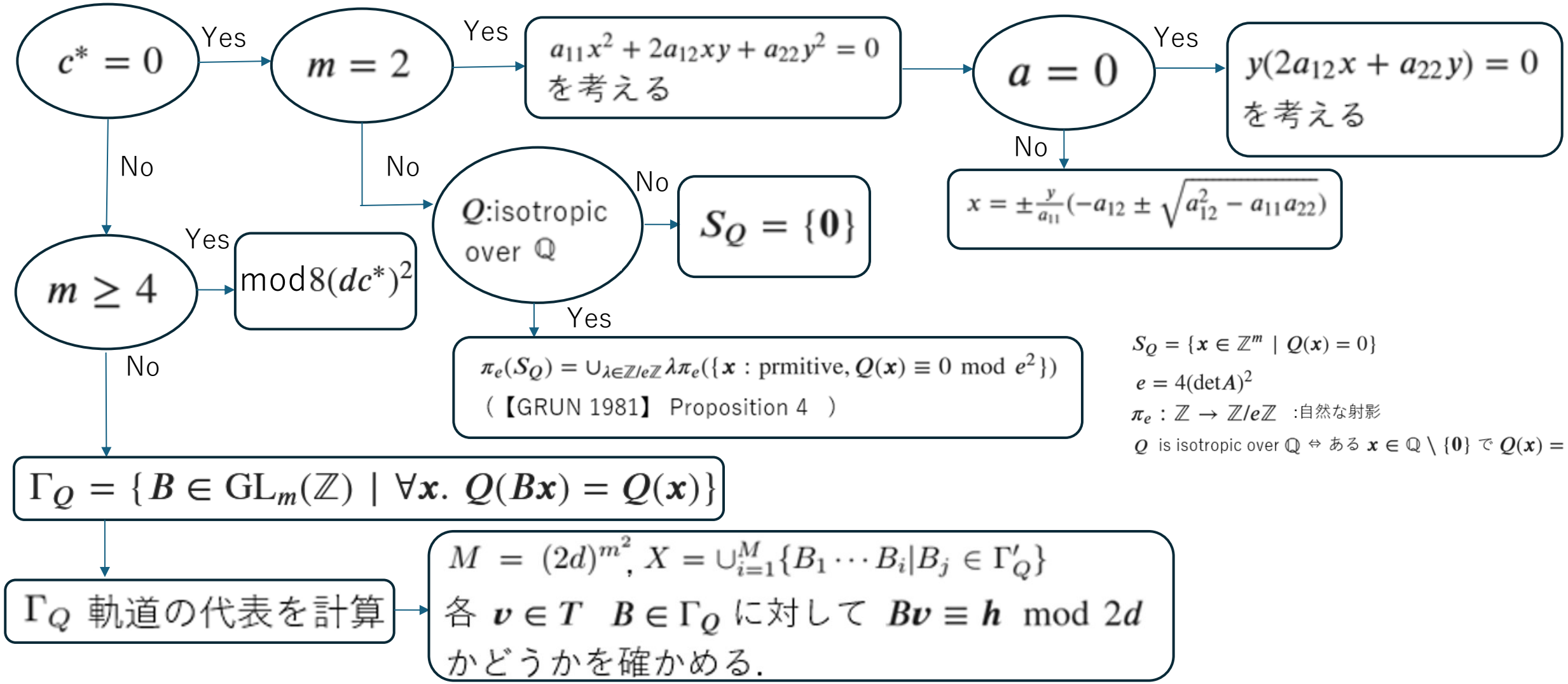
■ A がsingularな場合は0固有ベクトルを使った基底変換により、変数の数を減らす。

■ A がdefinite(固有値が一定符号)の場合は解の候補を有限個に絞ることが容易。



決定アルゴリズムのフローチャート

以下、二次形式は2変数以上でregularでかつindefiniteとする。



$S_Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m \mid Q(\boldsymbol{x}) = 0\}$

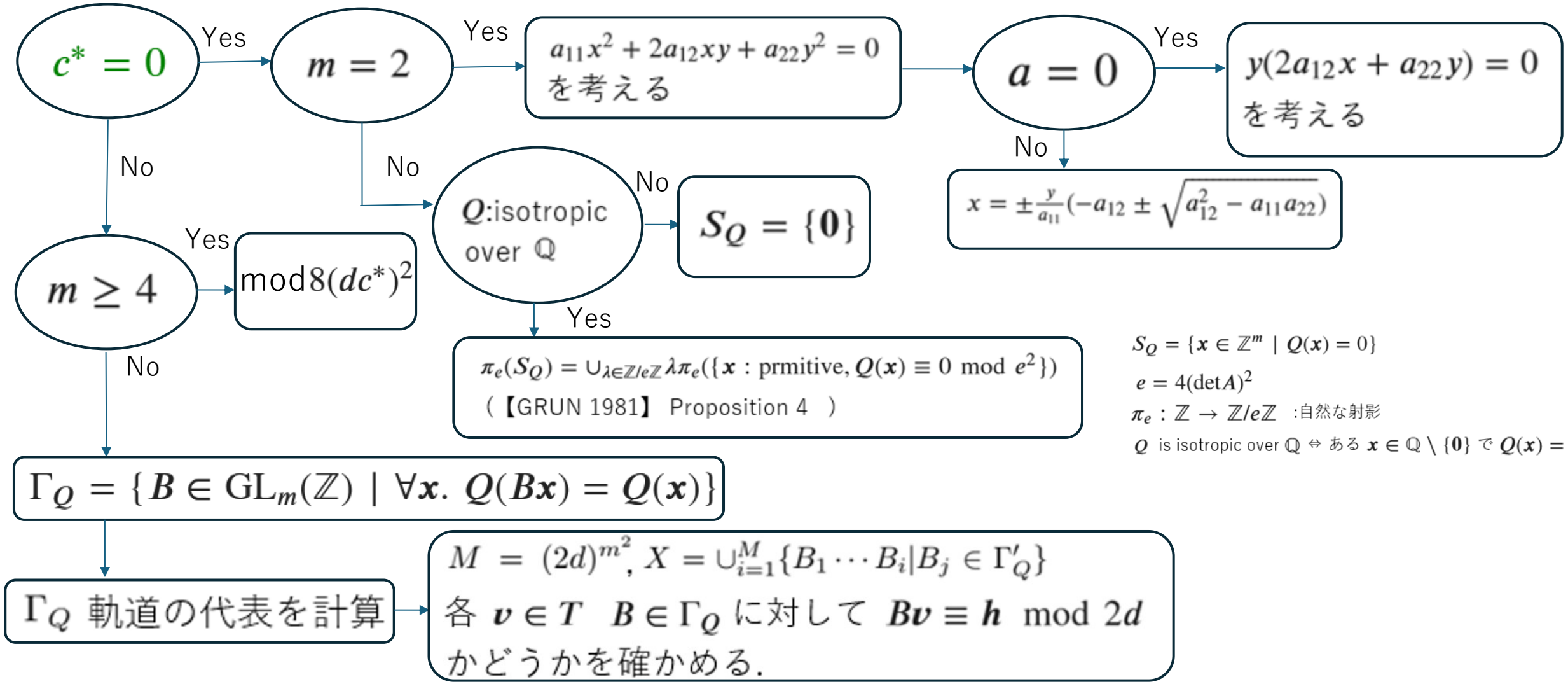
$e = 4(\det A)^2$

$\pi_e : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$:自然な射影

Q is isotropic over $\mathbb{Q}$ ⇔ ある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{0}\}$ で $Q(\boldsymbol{x}) = 0$

決定アルゴリズムのフローチャート

以下、二次形式は2変数以上でregularでかつindefiniteとする。



$S_Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m \mid Q(\boldsymbol{x}) = 0\}$

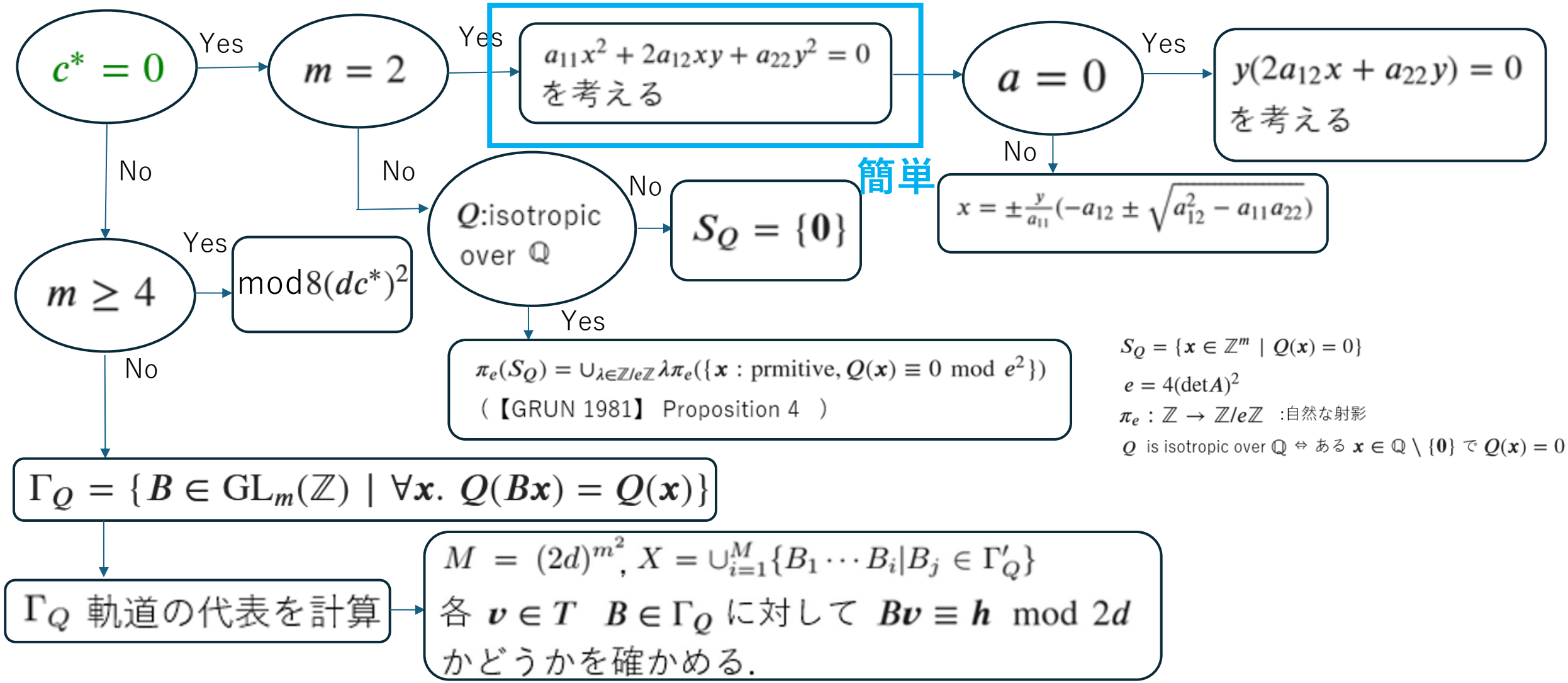
$e = 4(\det A)^2$

$\pi_e : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$:自然な射影

Q is isotropic over $\mathbb{Q}$ ⇔ ある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{0}\}$ で $Q(\boldsymbol{x}) = 0$

決定アルゴリズムのフローチャート

以下、二次形式は2変数以上でregularでかつindefiniteとする。



$S_Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m \mid Q(\boldsymbol{x}) = 0\}$

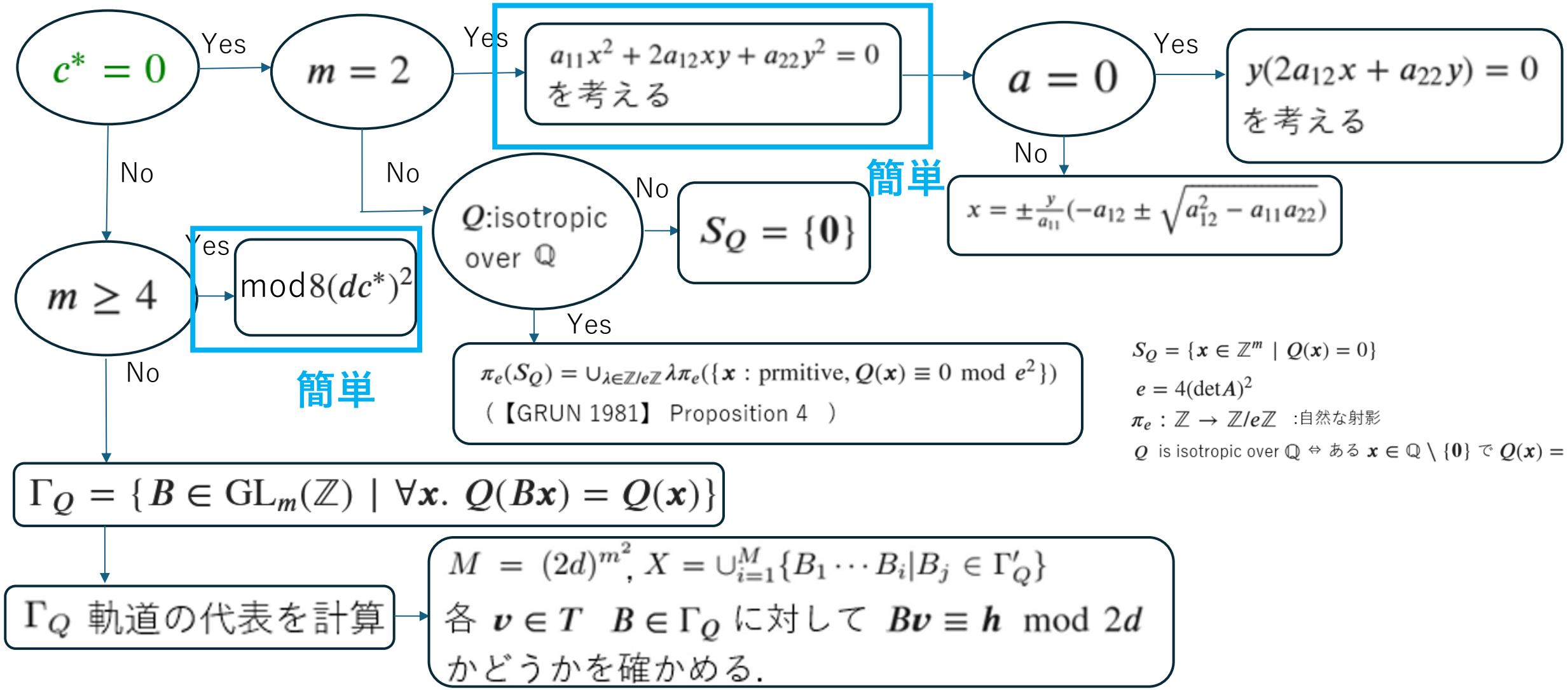
$e = 4(\det A)^2$

$\pi_e : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$:自然な射影

Q is isotropic over $\mathbb{Q}$ ⇔ ある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{0}\}$ で $Q(\boldsymbol{x}) = 0$

決定アルゴリズムのフローチャート

以下、二次形式は2変数以上でregularでかつindefiniteとする。



$S_Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m \mid Q(\boldsymbol{x}) = 0\}$

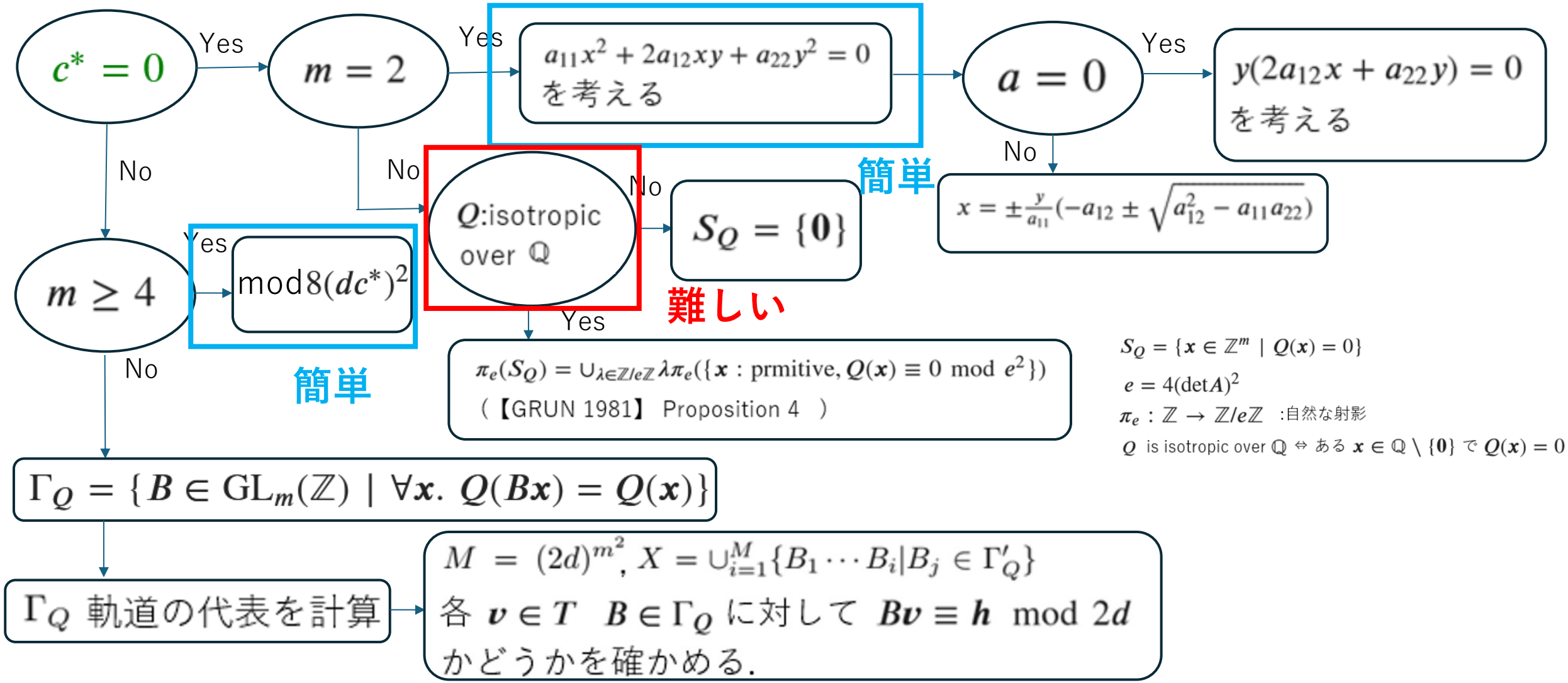
$e = 4(\det A)^2$

$\pi_e : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$:自然な射影

Q is isotropic over $\mathbb{Q}$ ⇔ ある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{0}\}$ で $Q(\boldsymbol{x}) = 0$

決定アルゴリズムのフローチャート

以下、二次形式は2変数以上でregularでかつindefiniteとする。



$S_Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m \mid Q(\boldsymbol{x}) = 0\}$

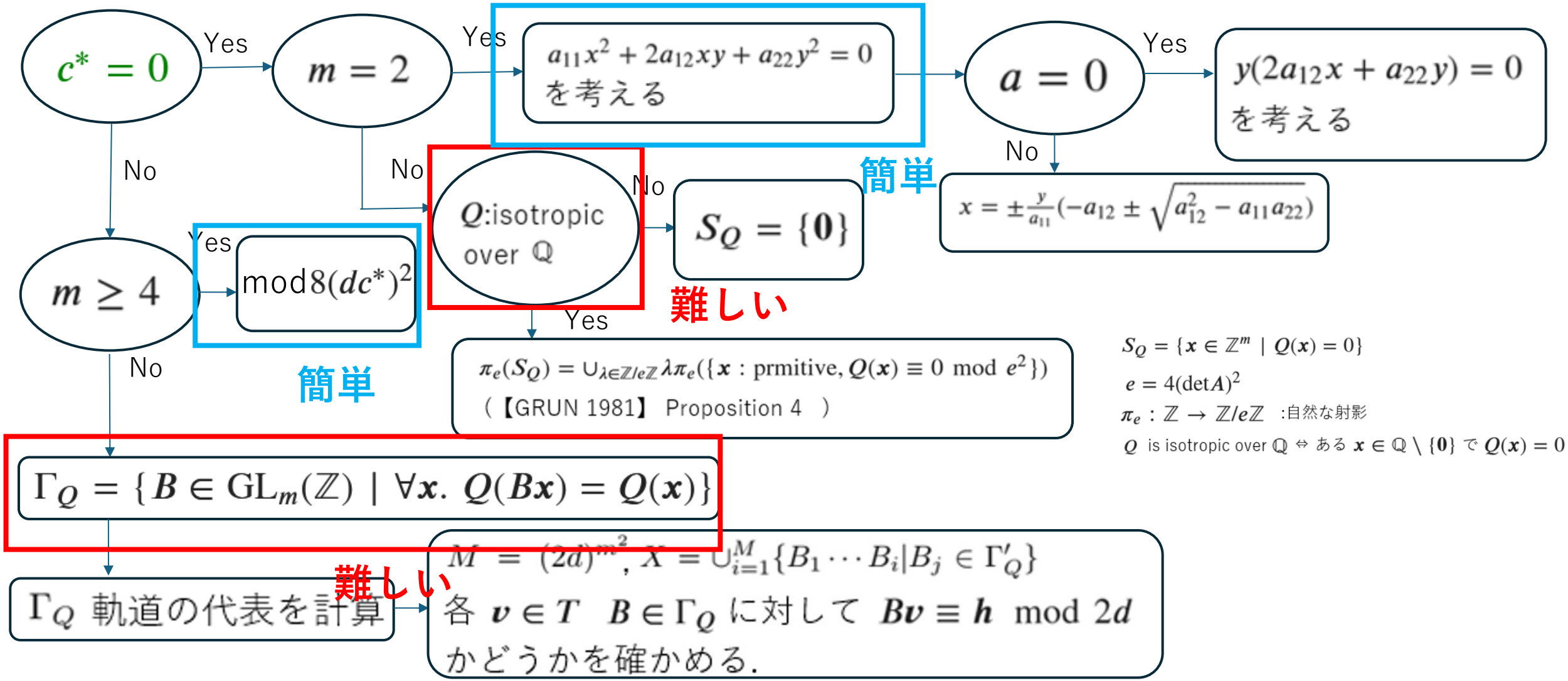
$e = 4(\det A)^2$

$\pi_e : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$:自然な射影

Q is isotropic over $\mathbb{Q}$ ⇔ ある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{0}\}$ で $Q(\boldsymbol{x}) = 0$

決定アルゴリズムのフローチャート

以下、二次形式は2変数以上でregularでかつindefiniteとする。



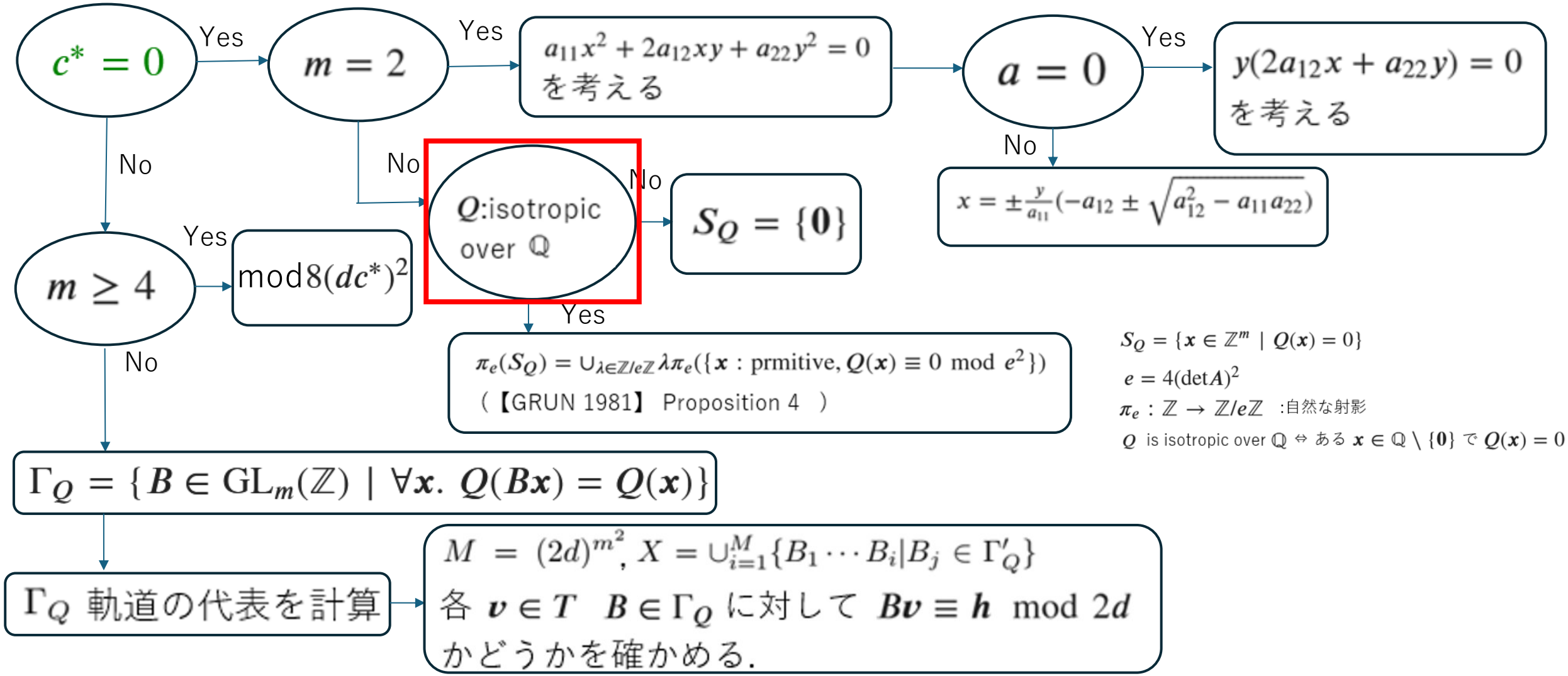
$S_Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m \mid Q(\boldsymbol{x}) = 0\}$

$e = 4(\det A)^2$

$\pi_e : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$:自然な射影

Q is isotropic over $\mathbb{Q}$ ⇔ ある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{0}\}$ で $Q(\boldsymbol{x}) = 0$

$c^* = 0$ の場合



$S_Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m \mid Q(\boldsymbol{x}) = 0\}$

$e = 4(\det A)^2$

$\pi_e : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$:自然な射影

Q is isotropic over $\mathbb{Q}$ ⇔ ある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{0}\}$ で $Q(\boldsymbol{x}) = 0$

3変数以上二次形式の零点計算(isotropicな場合)

命題（【GRUN 1981】Proposition 4）
Q を3変数以上でregularかつ$\mathbb{Q}$ 上isotropicな整数係数二次形式とする。
$d = d(Q)$, $e = 4d^2$ とし、$\pi_e : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ を自然な射影とする。
$S_Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m \mid Q(\boldsymbol{x}) = 0\}$ とおくと、
$\pi_e(S_Q) = \cup_{\lambda \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \lambda \pi_e(\{\boldsymbol{x} : \text{prmitive}, Q(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \bmod e^2\})$
である。

Hasseの原理(isotropic性の判定)

命題(Hasseの原理)

$\mathbb{Q}$ 上の二次形式は$\mathbb{R}$ 上isotropic でかつ任意の素数p について、
$\mathbb{Q}_p$ 上isotropicならば$\mathbb{Q}$ 上でもisotropicである。

5変数以上の場合は有理数体上isotropic(簡単な場合)

命題(【CASS 1978】CHAPTER 6 COROLLARY 1)

5変数以上のregularな$\mathbb{Q}$ 上の二次形式は任意の素数 p について、
$\mathbb{Q}_p$ 上isotropic

■ 2変数以上regular、indefiniteであれ$\mathbb{R}$ 上isotropicなので以下が成り立つ

命題

5変数以上のregularな$\mathbb{Q}$ 上の二次形式は$\mathbb{Q}$ 上isotropic

ヒルベルト記号(3,4変数の場合のisotropic判定)

定義 (ヒルベルト記号)

$a, b \in (\mathbb{Q}_p)^\times \qquad (a,b)_p = \begin{cases} 1 & ax^2+by^2-z^2 \text{ is isotropic over } \mathbb{Q}_p \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$

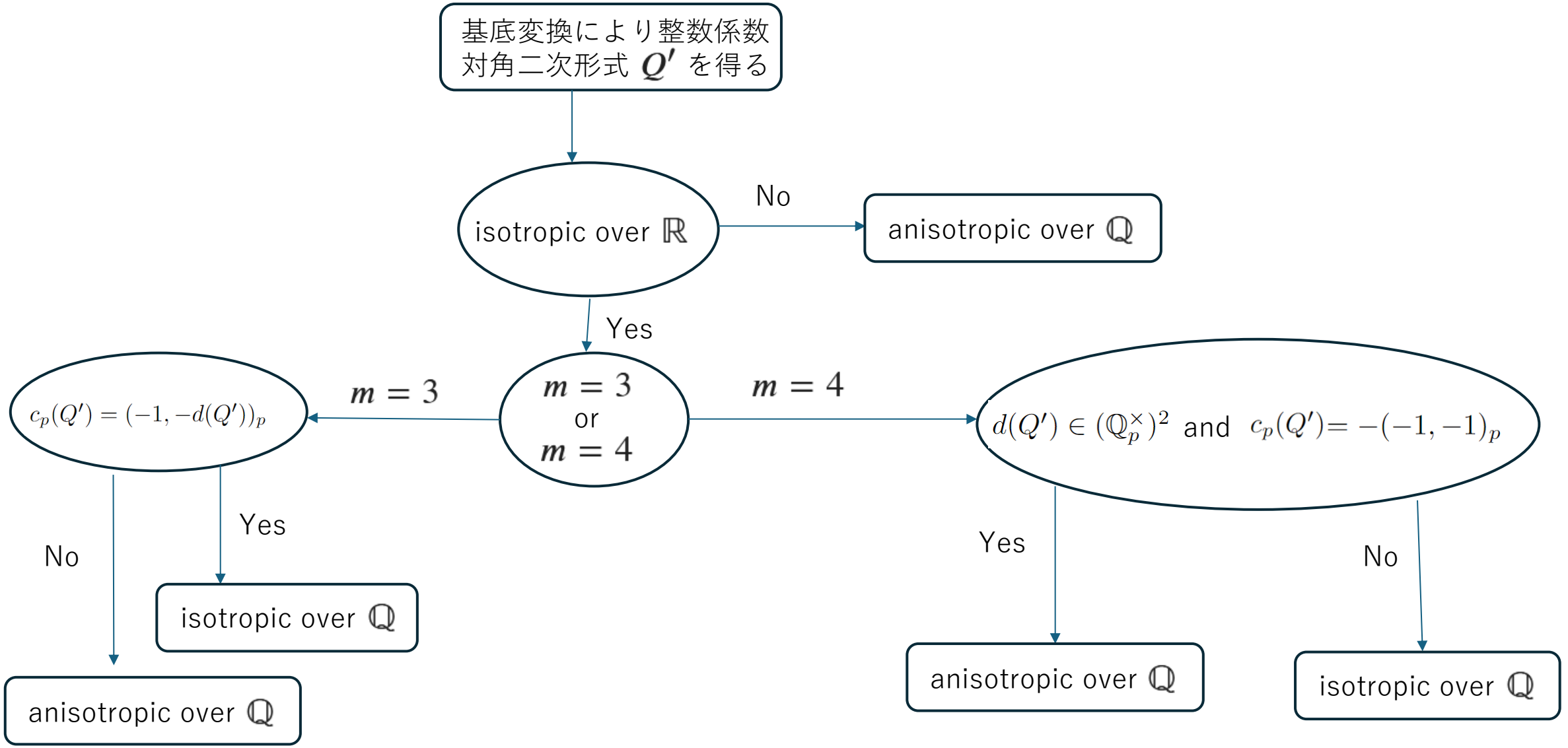
定義

regular な対角二次形式 $Q'(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^2$ および素数 $\boldsymbol{p}$ に対し、

$$c_p(Q') = \prod_{i<j} (a_i, a_j)_p$$

と定める。

3,4変数二次形式のisotropic性の判定フローチャート



isotropic判定の例

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ とする。

$V^{\perp} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Q}^3 \mid \forall t \in \mathbb{Q}\ (t, 0, 0)A\boldsymbol{u} = 0\}$ の基底は

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g(u_2, u_3) = Q(u_2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (u_2, u_3)\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$W^{\perp} = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{Q}^2 \mid \forall t \in \mathbb{Q}\ (t, 0)\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0\}$ の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$

isotropic判定の例

$\mathbb{Q}^3$ の基底 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{7}{5}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ が得られ、

$$Q'(u_1,u_2,u_3)=Q(u_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+u_2\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+u_3\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix})\ =u_1^2+29u_2^2+35u_3^2$$

Q が $\mathbb{Q}$ 上isotropic ⇔ Q' が $\mathbb{Q}$ 上isotropic

isotropic判定の例

各素数 p に対し、$(1,29)_p = (1,35)_p = (29,35)_p = (29,7)_p(29,5)_p = 1$
だから、任意の素数で $c_p(Q') = 1$

しかし、$(-1,-d(Q'))_7 = (-1,-1)_7(-1,29)_7(-1,7)_7(-1,5)_7 = -1$

なので、Q' は $\mathbb{Q}$ 上anisotropic。したがって Q もanisotropicである。

isotropic判定の例

各素数 p に対し、$(1,29)_p = (1,35)_p = (29,35)_p = (29,7)_p(29,5)_p = 1$
だから、任意の素数で $c_p(Q') = 1$

$1 \mod 7 \quad 4 \mod 5$

しかし、$(-1,-d(Q'))_7 = (-1,-1)_7(-1,29)_7(-1,7)_7(-1,5)_7 = -1$

なので、Q' は $\mathbb{Q}$ 上anisotropic。したがって Q もanisotropicである。

isotropic判定の例

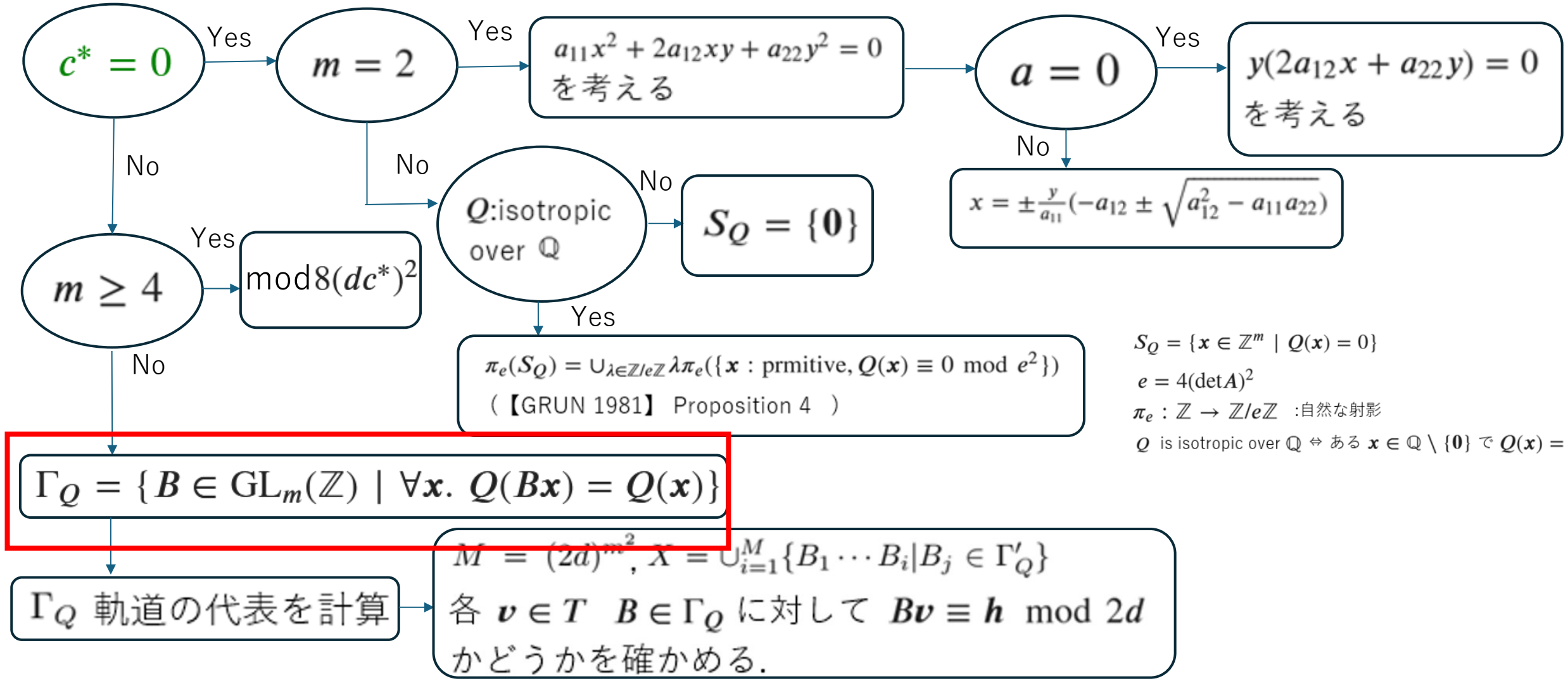
各素数 p に対し、$(1,29)_p = (1,35)_p = (29,35)_p = (29,7)_p(29,5)_p = 1$
だから、任意の素数で $c_p(Q') = 1$

$1 \mod 7 \quad 4 \mod 5$

しかし、$(-1,-d(Q'))_7 = (-1,-1)_7(-1,29)_7(-1,7)_7(-1,5)_7 = -1$

なので、Q' は $\mathbb{Q}$ 上anisotropic。したがって Q も -1 sotropicである。

$c^* \neq 0$ の場合



$S_Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m \mid Q(\boldsymbol{x}) = 0\}$

$e = 4(\det A)^2$

$\pi_e : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$:自然な射影

Q is isotropic over $\mathbb{Q}$ ⇔ ある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{\mathbf{0}\}$ で $Q(\boldsymbol{x}) = 0$

4変数以上の場合(簡単な場合)

■ 4変数以上の場合は簡単である。

Proposition (【GRUN 1981】Proposition 2)

$m \geq 4$ であってA がregularでindefiniteな場合、方程式$Q(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{x}) = c$ が整数解をもつ必要十分条件はその方程式が mod $8(dc^*)^2$ で解をもつことである。

定義（二次形式 Q の直交群 Γ_Q ）

$$G_Q = \{B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \mid \forall \boldsymbol{x}.\ Q(B\boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{x})\}$$

$$\Gamma_Q = \{B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}) \mid \forall \boldsymbol{x}.\ Q(B\boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{x})\}$$

■ $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ の部分群 G および $\mathbb{C}$ の部分環 R について $G \cap R$ を G_R で表す。

■ G_Q は $\mathbb{Q}$ -群であり、Γ_Q は G_Q のarithmetic subgroup の具体例である。

定義($\mathbb{Q}$ -群とそのarithmetic subgroup)

有限個の m^2 変数有理数係数多項式の共通零点集合と $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ の共通部分で表せる行列群を $\mathbb{Q}$ -群と呼ぶ。

G を $\mathbb{Q}$ -群、Γ を $G_{\mathbb{Q}}$ の部分群とする。$|\Gamma : \Gamma \cap G_{\mathbb{Z}}|$ と $|G_{\mathbb{Z}} : \Gamma \cap G_{\mathbb{Z}}|$ がともに有限であるとき、Γ を G をarithmetic subgroupという。

Arithmetic subgroupsの有限生成性

命題(【BHC 1962】, 【GRUN 1980】)

Γ を $\mathbb{Q}$ -群 G のarithmetic subgroupとする。

①(Borel, Chandraの古典的証明による結果)

Γ は有限生成である。

②(Grunewaldの構成的証明による結果)

さらに Γ が以下条件

- $G_{\mathbb{Z}}$ の部分群である。
- $g \in G_{\mathbb{Z}}$ が Γ に属するかを判定するアルゴリズムが存在する。
- $|G_{\mathbb{Z}} : \Gamma|$ が有限でありかつその上界が与えられている。

を満たすならば Γ の生成系を計算することができる。

二次形式の直交群は明らかに上記の条件を満たしている。

生成系計算の概要

生成系の計算過程には以下のステップがある。

- $G = N \ltimes H$と冪単な部分 N とreductive(冪単元が単位行列のみ)な部分H に半直積分解する。$N_{\mathbb{Z}}$と $H_{\mathbb{Z}}$ はそれぞれ別個に生成系を計算できる。
  この分解のところで G のザリスキ位相連結成分 G^0 を準素分解により計算し、そのLie環の冪零イデアルをとるプロセスがある。
- $N_{\mathbb{Z}}$と $H_{\mathbb{Z}}$ の生成系それぞれ別個に計算する。

- $N_{\mathbb{Z}}$と $H_{\mathbb{Z}}$ の生成系からなるwordの語数の上界が得られるように、包含関係 $(G_{\mathbb{Z}})^{\mu} \subseteq (N^{\mu})_{\mathbb{Z}}(H^{\mu})_{\mathbb{Z}} \subseteq (G^{\mu})_{\mathbb{Z}}$ を満たすような基底変換 $\mu \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{M}_m(\mathbb{Z})$ を算出する。($G^{\mu} = \mu^{-1} G \mu$)

Γ_Q -軌道

定義

$\mathbb{Z}^m$ 上の同値関係 $\sim_Q$ を $\boldsymbol{x} \sim_Q \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \ \exists B \in \Gamma_Q \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ と定める。

同値類 $C \in \mathbb{Z}^m / \sim_Q$ をΓ_Q -軌道という。

命題(【GRUN 1981】chapter 5)

$T_Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m \mid Q(\boldsymbol{x}) = c^*\}$ とおく。有限集合 $T \subset T_Q$ であって

少なくとも一つ T_Q のΓ_Q - 軌道の代表元を含むものを計算できる。

■ T_Q の計算には二つの二次形式が基底変換で移りあうかの判定を本質的に用る。

軌道計算のprimitiveな場合への帰着

定義

$$R_Q(c^*) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m \mid Q(\boldsymbol{x}) = c^*\}$$

$$R_Q^{(0)}(c^*) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m, \text{primitive} \mid Q(\boldsymbol{x}) = c^*\}$$

命題

$$R_Q(c^*) = \cup_{r^2 | c^*} r R_Q^{(0)}(c^* r^{-2})$$

$R_Q^{(0)}(c^* r^{-2})$ の Γ_Q -軌道の代表元計算アルゴリズム

$h = c^* r^{-2}$ とおく。

STEP1: 以下の条件を満たす有限集合 T_1 を計算する。
- T_1 は $d(\phi) = h^{m-2} d(Q)$ を満たす $m-1$ 変数二次形式 ϕ からなる。
- 任意の $m-1$ 変数regular二次形式 ϕ' はある T_1 の元と $\mathbb{Z}$ -equivalent

STEP2: $T_2 = \{\psi | \psi(\boldsymbol{x}) = (hx_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_m x_m)^2 + \phi(x_2, \ldots, x_m), \phi \in T_1, |v_j| \leq h\}$ とし、各 $\psi \in T_2$ に対し、これが hQ と $\mathbb{Z}$ -equivalentかを判定する。

STEP3: STEP2の判定でequivalentとなった二次形式の集合を T_3 とする。
各 $\psi \in T_3$ にたいしてこれを hQ に移す $B_\psi \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ を求め、
$T_0 = \{\mathbf{v} | \mathbf{v}$ はある $\psi \in T_3$ に対して B_ψ の1列目になる $\}$
を出力とする。

$c^* \neq 0 \quad m = 2, 3$ の場合の決定アルゴリズム

Γ_Q の生成系及び $T \subset T_Q$ が計算できているとする。

1: $M = (2d)^{m^2}$ とおく。$M \geq |\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}/2d\mathbb{Z})|$ である。

2: $\pi : \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}/2d\mathbb{Z})$ を自然な射影とする。
$X = \cup_{i=1}^{M} \{B_1 \cdots B_i | B_j \in \Gamma'_Q\}$ とおくと $\pi(X) = \pi(\Gamma_Q)$ である。

3: 各 $\boldsymbol{v} \in T, \boldsymbol{B} \in X$ に対して、$\boldsymbol{Bv} \equiv \boldsymbol{h} \mod 2\boldsymbol{d}$ かどうかをチェックする。

容易な拡張

二次不等式 $Q(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{x}) \geq c$ はラグランジュの四平方和定理によって二次方程式に帰着できる。

> 命題 (ラグランジュの四平方和定理)
> 任意の自然数は4つの整数の平方和で表すことができる。

単一の二次不等式を解きたい場合は二次方程式 $Q(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{x}) + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = c$ に帰着。

一次等式制約を加えた二次方程式

$$\begin{cases} Q(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{x}) = c \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{lm}x_m = 0 \end{cases}$$

についても、各一次制約の解の媒介変数表示を得ることで単一の二次方程式に帰着。

連立1次方程式の非負整数解数え上げ公式と連立2次方程式への拡張

モチベーション

任意の(高次)ディオファントス方程式は2次ディオファントス方程式の
連立方程式に帰着できる。

- 例: 方程式 $3xy^2 + z = 1$ は $\begin{cases} xy = u \\ 3uy + z = 1 \end{cases}$ と等価

モチベーション

任意の(高次)ディオファントス方程式は2次ディオファントス方程式の
連立方程式に帰着できる。

・例: 方程式 $3xy^2 + z = 1$ は $\begin{cases} xy = u \\ 3uy + z = 1 \end{cases}$ と等価

さらに、

$f(x_1, \ldots, x_m)$ が解を持つ

$\Leftrightarrow$ $f(x_1, \ldots, x_m), f(-x_1, \ldots, x_m), \ldots, f(-x_1, \ldots, -x_m)$ のどれかが非負整数解をもつ

が成り立つので解についてはひとまず非負整数解について考えたい。

ノーテーション上の注意

行列 A の ij 成分を a_{ij} などと大文字で行列を、小文字でその成分を表すことが多い。

・例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき $a_{21} = 3$

ベクトルは $\boldsymbol{b}$ のように太字で、その成分は b_i のように小文字で書くとする。
特に断りのない限りベクトルと言ったら縦ベクトルを表すとする。

・例: $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき $b_3 = 6$

ノーテーション上の注意

文脈上明らかな場合はベクトルの次元を明記しない場合がある。
たとえばゼロベクトルは次元を明記せずに $\boldsymbol{0}$ とかくことが多い。

ベクトルの各成分に対して不等式が成り立っているとき、$\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$
といった書き方をする。

・例: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$

ノーテーション上の注意

同じ次元のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し、$a_1^{b_1} \cdots a_m^{b_m}$ を $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}}$ で表す。

- 例: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ のとき $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}} = 1^4 \cdot 2^5 = 32$

ベクトル $\boldsymbol{v}$ について、$\ln(\boldsymbol{v})$ などは成分ごとに関数を適用したベクトルを表す。

- 例: $\boldsymbol{v} = (\exp(1), \exp(2), \exp(3))^\top$ とするとき、$\ln(\boldsymbol{v}) = (1, 2, 3)^\top$

連立1次方程式の非負整数解数え上げ

以下、連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\ (A \in \mathbb{Z}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m)$

であって、係数行列が以下の条件

$$\mathbb{K}_A = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m \mid A^\top \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}\} \neq \emptyset \qquad \text{【条件】}$$

を満たすものを考える。

【条件】のより簡易な判定法

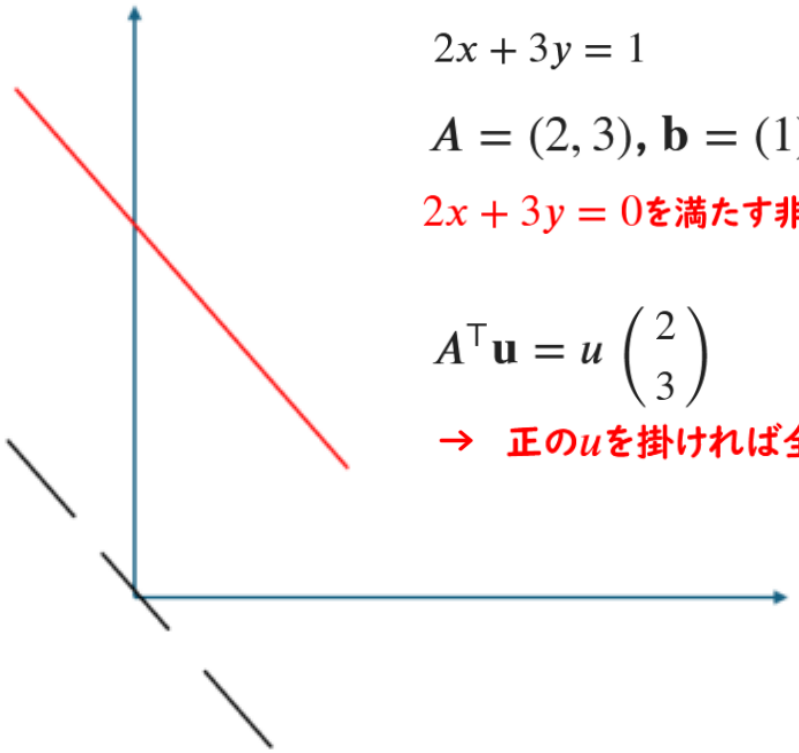
命題

以下は同値

1. 【条件】を満たす
2. $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{0}\}$

【条件】のより簡易な判定法

【条件】を満たしている



$2x + 3y = 1$

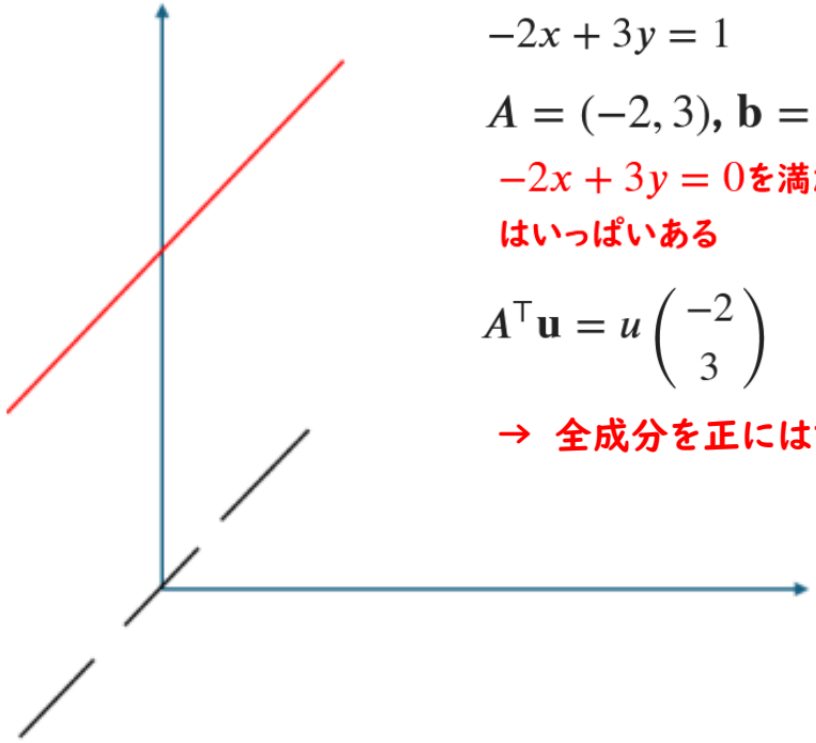
$A = (2, 3), \mathbf{b} = (1)$

$2x + 3y = 0$を満たす非負の(x, y)は$(0, 0)$のみ

$$A^{\top}\mathbf{u} = u\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

→ 正のuを掛ければ全成分が正

【条件】を満たしていない



$-2x + 3y = 1$

$A = (-2, 3), \mathbf{b} = (1)$

$-2x + 3y = 0$を満たす非負の(x, y)はいっぱいある

$$A^{\top}\mathbf{u} = u\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

→ 全成分を正にはできない!

Z変換とその逆変換

$\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$ に対して $\Omega(\boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ と定める。
明らかに $|\Omega(\boldsymbol{b})|$ が数えたかった解の個数である。

Z変換とその逆変換

$\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$ に対して $\Omega(\boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ と定める。
明らかに $|\Omega(\boldsymbol{b})|$ が数えたかった解の個数である。

$\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0}$ を固定し、写像 $f_{\boldsymbol{c}} : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}$ を $f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{b}) = \sum_{\boldsymbol{x} \in \Omega(\boldsymbol{b})} \exp(\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x})$ で定める。

Z変換とその逆変換

$\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$ に対して $\Omega(\boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ と定める。
明らかに $|\Omega(\boldsymbol{b})|$ が数えたかった解の個数である。

$\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0}$ を固定し、写像 $f_{\boldsymbol{c}} : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}$ を $f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{b}) = \sum_{\boldsymbol{x} \in \Omega(\boldsymbol{b})} \exp(\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x})$ で定める。

さらに、$f_{\boldsymbol{c}}$ に対して複素関数 $\mathcal{F}[f_{\boldsymbol{c}}](z_1, \ldots, z_m) = \mathcal{F}[f_{\boldsymbol{c}}](\boldsymbol{z})$ を

$$\mathcal{F}[f_{\boldsymbol{c}}](\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m} f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{b}) \boldsymbol{z}^{-\boldsymbol{b}}$$

で定める。(級数が収束する範囲において)

Z変換とその逆変換

注：文脈上混乱のおそれがない場合は $f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{b})$や $\mathcal{F}[f_{\boldsymbol{c}}](\boldsymbol{z})$ のことを省略した書き方で $f(\boldsymbol{b})$ $\mathcal{F}(\boldsymbol{z})$ などと書く。

命題

$f, \mathcal{F}$ を先に定めた通りとし、係数行列 A は【条件】を満たしているとする。

(このときある $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ について $A^\top \boldsymbol{u} > \boldsymbol{c}$ となることに注意)

$(|z_1|, \ldots, |z_m|) \in \{\boldsymbol{v} > \boldsymbol{0} \mid A^\top \ln(\boldsymbol{v}) > \boldsymbol{c}\}$ をみたす範囲で

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}}$$

が成り立つ。

(証明)

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^m} f(\boldsymbol{b})\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{b}}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^m} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{b}} \{\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{N}^n, A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}} \exp(\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x})\}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{N}^n} \exp(\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}) \boldsymbol{z}^{-A\boldsymbol{x}}$$

(証明)

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^m} f(\boldsymbol{b})\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{b}}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^m} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{b}}\{\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{N}^n, A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}} \exp(\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x})\}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{N}^n} \exp(\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}^{-A\boldsymbol{x}}$$

一方、この和の中身に着目すると、

$$\exp(\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}^{-A\boldsymbol{x}}$$
$$= \exp(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) z_1^{-(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)} \cdots z_m^{-(a_{m1}+\cdots+a_{mn}x_n)}$$
$$= \prod_{k=1}^n \{\exp(c_k) z_1^{-a_{ak}} z_2^{-a_{2k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}\}^{x_k}$$

(証明)

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^m} f(\boldsymbol{b})\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{b}}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^m} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{b}}\{\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{N}^n, A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}} \exp(\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x})\}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{N}^n} \exp(\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}^{-A\boldsymbol{x}}$$

一方、この和の中身に着目すると、

$$\exp(\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}^{-A\boldsymbol{x}}$$
$$= \exp(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) z_1^{-(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)} \cdots z_m^{-(a_{m1}+\cdots+a_{mn}x_n)}$$
$$= \prod_{k=1}^n \{\exp(c_k) z_1^{-a_{ak}} z_2^{-a_{2k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}\}^{x_k}$$

ここで、$(|z_1|,\ldots,|z_m|) \in \{\boldsymbol{v} > \boldsymbol{0} \mid A^\top \ln(\boldsymbol{v}) > \boldsymbol{c}\}$ という条件は

$|z_1^{a_{1k}} \cdots z_m^{a_{mk}}| > \exp(c_k)$ 、つまり $|\exp(c_k) z_1^{a_{1k}} \cdots z_m^{a_{mk}}| < 1$ が

$k = 1,\ldots,n$ で満たされていることを意味する。

したがって、無限等比級数の公式が適用出来て、

$$\mathcal{F} = \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{N}} \left(\prod_{k=1}^{n} \left\{ \exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} \cdots z_m^{-a_{mk}} \right\}^{x_k} \right)$$
$$= \sum_{x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{N}} \left(\prod_{k=2}^{n} \left\{ \exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} \cdots z_m^{-a_{mk}} \right\}^{x_k} \right) \times \left\{ \left(\exp(c_1) z_1^{-a_{11}} \cdots z_m^{-a_{m1}} \right)^0 + \left(\exp(c_1) z_1^{-a_{11}} \cdots z_m^{-a_{m1}} \right)^1 + \cdots \right\}$$
$$= \sum_{x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{N}} \left(\prod_{k=2}^{n} \left\{ \exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} \cdots z_m^{-a_{mk}} \right\}^{x_k} \right) \times \frac{1}{1 - \exp(c_1) z_1^{-a_{11}} \cdots z_m^{-a_{m1}}}$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}} \qquad \square$$

Z変換とその逆変換

命題（【Lasserre2001】）

A を【条件】を満たす行列とし、$R_1, \ldots, R_m$を $R_1^{a_{1k}} \cdots R_m^{a_{mk}} > \exp(c_k)$ が $k = 1, \ldots, n$ で成り立つような十分大きい積分半径とする。このとき、

$$f(\boldsymbol{b}) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \int_{|z_1|=R_1} \cdots \int_{|z_m|=R_m} \frac{z_1^{b_1-1} \cdots z_m^{b_m-1}}{\prod_{k=1}^{n} 1 - \exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}}$$

である。

(証明)

$$\int_{|z_1|=R_1} \cdots \int_{|z_m|=R_m} \mathcal{F}(\boldsymbol{z}) z_1^{Y_1} \cdots z_m^{Y_m} dz_1 \cdots z_m$$

$$= \int_{|z_1|=R_1} \cdots \int_{|z_m|=R_m} \sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^m} f(\boldsymbol{b}) z_1^{-b_1+Y_1} \cdots z_m^{-b_m+Y_m} dz_1 \cdots z_m$$

であるが、この和と積分は交換することができる。実際、

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) z_1^{Y_1} \cdots z_m^{Y_m} = \sum_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{N}} z_1^{Y_1} \cdots z_m^{Y_m} \prod_{k=1}^{n} \{\exp(c_k) z_1^{-a_{1k}} \cdots z_m^{-a_{mk}}\}$$

であるが。 $R_1^{a_{1k}} \cdots R_m^{a_{mk}} > \exp(c_k)$ の条件より、級数は積分範囲上で絶対収束

しかも、$\exp(c_k) R_1^{-a_{1k}} \cdots R_m^{-a_{mk}} < \gamma < 1 \ (k = 1, \ldots, n)$ となる公比をとれるので

一様収束

よってめでたくも和と積分が交換できて

$$\int_{|z_1|=R_1}\cdots\int_{|z_m|=R_m}\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^m} f(\boldsymbol{b})z_1^{Y_1-b_1}\cdots z_m^{Y_m-b_m}dz_1\cdots dz_m$$
$$=\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^m}\int_{|z_1|=R_1}\cdots\int_{|z_m|=R_m} f(\boldsymbol{b})z_1^{Y_1-b_1}\cdots z_m^{Y_m-b_m}dz_1\cdots dz_m$$

$w\neq -1$ のとき $\int_{|z|=R} z^w = 0$ 、$w=-1$ のとき $\int_{|z|=R} z^{-1} = 2\pi\sqrt{-1}$

であることを用いれば、

$$\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^m}\int_{|z_1|=R_1}\cdots\int_{|z_m|=R_m} f(\boldsymbol{b})z_1^{Y_1-b_1}\cdots z_m^{Y_m-b_m}dz_1\cdots dz_m = (2\pi\sqrt{-1})^m f(Y_1+1,\ldots,Y_m+1)$$

がなりたつ。ゆえに、

$$f(\boldsymbol{b}) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m}\int_{|z_1|=R_1}\cdots\int_{|z_m|=R_m}\frac{z_1^{b_1-1}\cdots z_m^{b_m-1}}{\prod_{k=1}^n 1-\exp(c_k)z_1^{-a_{1k}}\cdots z_m^{-a_{mk}}}$$

連立1次方程式の非負整数解数え上げ

命題（【Lasserre2001】）

$A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^{m}$ とし、A は以下の【条件】を満たすとする。

$R_1, \ldots, R_m \quad R_1^{a_{1k}} \cdots R_m^{a_{mk}} > 1$

このとき、連立方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の非負整数解の個数は

$$C(A, \mathbf{b}) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \int_{|z_1|=R_1} \cdots \int_{|z_m|=R_m} \frac{z_1^{b_1-1} \cdots z_m^{b_m-1}}{\Pi_{j=1}^{n}(1-z_1^{-a_{1j}} \cdots z_m^{-a_{mj}})} dz_1 \cdots dz_m$$

となる。

（証明）$\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ の場合を考えるとよい。

数え上げ公式の実積分表示

系(解の数え上げの実積分表示)

$r > 0$ は $r^{a_{1k}+\cdots+a_{mk}} > 1$ を満たす半径とする。先ほどと同じ設定において、

$$\boldsymbol{C(A, \mathbf{b})}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Pi_{j=1}^n \sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}} r^{\sum_{i=1}^m b_i} (\cos\{\sum_{i=1}^m b_i t_i - \sum_{j=1}^n \arcsin(\frac{r^{-\sum_{i=1}^m a_{ij}}\sin(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i)}{\sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}})\})dt_1 \cdots dt_m$$

とかける。

(証明)

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m}\int_{|z_1|=r}\cdots\int_{|z_m|=r}\frac{z_1^{b_1-1}\cdots z_m^{b_m-1}}{\Pi_{j=1}^{n}(1-z_1^{-a_{1j}}\cdots z_m^{-a_{mj}})}dz_1\cdots dz_m$$

に対して

$$z_i = r(\cos t_i + \sqrt{-1}\sin t_i),$$
$$dz_i = r(-\sin t_i + \sqrt{-1}\cos t_i)dt_i = r(\cos(t_i+\frac{\pi}{2}) + \sqrt{-1}\sin(t_i+\frac{\pi}{2}))dt_i$$

と変数変換して計算するとよい。

$$(\text{被積分関数の分子}) = r^{\sum_{i=1}^m b_i}\{\cos\{\sum_{i=1}^m b_i t_i + \frac{m\pi}{2}\} + \sqrt{-1}\sin\{\sum_{i=1}^m b_i t_i + \frac{m\pi}{2}\}\}$$

$$(\text{被積分関数の分母}) = \Pi_{j=1}^n\{(1 - r^{-\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i)) + \sqrt{-1}r^{-\sum_{i=1}^m a_{ij}}\sin(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i)\}$$
$$= \Pi_{j=1}^n[\sqrt{\{1 + r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1 - 2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}$$
$$\times\{\cos(\arcsin(\frac{r^{-\sum_{i=1}^m a_{ij}}\sin(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i)}{\sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}})) + \sqrt{-1}\sin(\arcsin(\frac{r^{-\sum_{i=1}^m a_{ij}}\sin(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i)}{\sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}}))\}]$$

したがって、

$$C(A,\mathbf{b}) = \frac{1}{(2\pi)^m}\{\cos(-\frac{m\pi}{2}) + \sqrt{-1}\sin(-\frac{m\pi}{2})\}$$
$$\times \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} \frac{dt_1\cdots dt_m}{\Pi_{j=1}^n \sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}} r^{\sum_{i=1}^m b_i}(\cos\{\sum_{i=1}^m b_i t_i + \frac{m\pi}{2} - \sum_{j=1}^n \arcsin(\frac{r^{-\sum_{i=1}^m a_{ij}}\sin(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i)}{\sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}})\}$$
$$+\sqrt{-1}\sin\{\sum_{i=1}^m b_i t_i + \frac{m\pi}{2} - \sum_{j=1}^n \arcsin(\frac{r^{-\sum_{i=1}^m a_{ij}}\sin(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i)}{\sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}})\})$$

実部だけ見ればよいので、

$$C(A,\mathbf{b})$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} \frac{1}{\Pi_{j=1}^n \sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}} r^{\sum_{i=1}^m b_i}(\cos\{\sum_{i=1}^m b_i t_i - \sum_{j=1}^n \arcsin(\frac{r^{-\sum_{i=1}^m a_{ij}}\sin(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i)}{\sqrt{\{1+r^{-2\sum_{i=1}^m a_{ij}}(1-2r^{\sum_{i=1}^m a_{ij}}\cos(\sum_{i=1}^m a_{ij}t_i))\}}})\})dt_1\cdots dt_m$$ □

注:係数行列の成分が非負でありかつ、各列に少なくとも一つ正整数がある場合は

$r > 1$ でよい。

例

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3 \;-\arcsin\left(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}\right) -\arcsin\left(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}\right) -\arcsin\left(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\right)\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\;\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\;\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\,dt_1dt_2dt_3$$

$$=8\pi^3$$

例

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3 \ -\arcsin(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}) \ -\arcsin(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}) -\arcsin(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}})\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}} dt_1dt_2dt_3$$

$$= 8\pi^3$$

連立方程式 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\3&6&8\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}14\\23\\39\end{pmatrix}$ の非負整数解の解の個数を求めると、

$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$ のひとつのみ

被積分関数と方程式の対応箇所をよく見ると、

$$\frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3\ -\arcsin\left(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}\right)\ -\arcsin\left(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}\right)-\arcsin\left(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\right)\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}$$

被積分関数と方程式の対応箇所をよく見ると、

$$\frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3 \quad -\arcsin\left(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}}\right) \quad -\arcsin\left(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}}\right) -\arcsin\left(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}\right)\}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}} \quad \sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}} \quad \sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}$$

$6=1+2+3 \quad 11=2+3+6 \quad 16=3+5+8 \quad 76=14+23+39 \qquad e>1$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\3&6&8\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}14\\23\\39\end{pmatrix}$$

被積分関数と方程式の対応箇所をよく見ると、

$$\frac{e^{76}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3\ -\arcsin(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}})\ -\arcsin(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}})-\arcsin(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}})\ \}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}$$

$$6=1+2+3 \quad 11=2+3+6 \quad 16=3+5+8 \quad 76=14+23+39 \qquad e>1$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\3&6&8\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}14\\23\\39\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{86}\cos\{14t_1+23t_2+39t_3\ -\arcsin(\frac{e^{-6}\sin(t_1+2t_2+3t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}})\ -\arcsin(\frac{e^{-11}\sin(2t_1+3t_2+6t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}})-\arcsin(\frac{e^{-16}\sin(3t_1+5t_2+8t_3)}{\sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}})\ \}}{\sqrt{\{1+e^{-12}(1-2e^{6}\cos(t_1+2t_2+3t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-22}(1-2e^{11}\cos(2t_1+3t_2+6t_3))\}}\ \sqrt{\{1+e^{-32}(1-2e^{16}\cos(3t_1+5t_2+8t_3))\}}}dt_1dt_2dt_3$$

$$=1$$

が得られる。

例

Erdős–Straus conjectureについて考える。

任意の整数 $N \geq 2$ について、方程式

$$(x+1)(y+1)(z+1) = N(y+1)(z+1)+N(x+1)(z+1)+N(x+1)(y+1)$$

が自然数解を持つことが、予想が肯定される必要十分条件であることが
式変形によりわかる。さらに式変形を進めることで方程式

$$(N-1)(xy+yz+xz)+(2N-1)(x+y+z)-xyz = 1-3N$$

が得られる。

$t = xy$ と変数を追加し、非負整数のパラメータ k_1, k_2, k_3, u_1, u_2

を使った連立一次方程式

$$\begin{cases} (2N-1+(N-1)k_3)x+(2N-1+(N-1)k_1)y+(2N-1+(N-1)k_2)z+k_3t=1-3N+u_1 \\ k_1y+t=u_2 \\ x=k_1 \\ y=k_2 \\ z=k_3 \\ 2k_3t=u_1 \\ 2k_1y=u_2 \end{cases}$$

を考えれる。

これの行列表現は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} 2N-1+(N-1)k_3 & 2N-1+(N-1)k_1 & 2N-1+(N-1)k_2 & k_3 \\ 0 & k_1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k_3 \\ 0 & 2k_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3N+u_1 \\ u_2 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

したがって、Erdős–Straus conjectureが肯定される必要十分条件は、
任意の $N \geq 2$ について、ある $k_1, k_2, k_3, u_1, u_2 \in \mathbb{N}$, $r > 1$ があって、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^7} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \Big[\sqrt{1 + r^{-2(2N-1+(N-1)k_3+1)}(1 - 2r^{2N-1+(N-1)k_3+1}\cos((N-1+(N-1)k_3)t_1 + t_3))}^{-1} \\
&\quad \times \sqrt{1 + r^{-2(2N-1+(N+2)k_1+1)}(1 - 2r^{2N-1+(N+2)k_1+1}\cos((N-1+(N-1)k_1)t_1 + k_1t_2 + t_4 + 2k_1t_7))}^{-1} \\
&\quad \times \sqrt{1 + r^{-2(2N-1+(N-1)k_2+1)}(1 - 2r^{2N-1+(N-1)k_2+1}\cos((N-1+(N-1)k_2)t_1 + t_5))}^{-1} \\
&\quad \times \sqrt{1 + r^{-2(3k_3+1)}(1 - 2r^{3k_3+1}\cos(k_3t_1 + t_2 + 2k_3t_6))}^{-1} \\
&\quad \times r^{1-3N+2u_1+2u_2+k_1+k_2+k_3} \\
&\quad \times \cos\{(1-3N+u_1)t_1 + u_2t_2 + k_1t_3 + k_2t_4 + k_3t_5 + u_1t_6 + u_2t_7 \\
&\quad -\arcsin\Big(r^{2N-1+(N-1)k_3+1} \sin((N-1+(N-1)k_3)t_1 + t_3) \sqrt{1 + r^{-2(2N-1+(N-1)k_3+1)}(1 - 2r^{2N-1+(N-1)k_3+1}\cos((N-1+(N-1)k_3)t_1 + t_3))}^{-1} \Big) \\
&\quad -\arcsin\Big(r^{2N-1+(N+2)k_1+1} \sin((N-1+(N-1)k_1)t_1 + k_1t_2 + t_4 + 2k_1t_7) \sqrt{1 + r^{-2(2N-1+(N+2)k_1+1)}(1 - 2r^{2N-1+(N+2)k_1+1}\cos((N-1+(N-1)k_1)t_1 + k_1t_2 + t_4 + 2k_1t_7))}^{-1} \Big) \\
&\quad -\arcsin\Big(r^{2N-1+(N-1)k_2+1} \sin((N-1+(N-1)k_2)t_1 + t_5) \sqrt{1 + r^{-2(2N-1+(N-1)k_2+1)}(1 - 2r^{2N-1+(N-1)k_2+1}\cos((N-1+(N-1)k_2)t_1 + t_5))}^{-1} \Big) \\
&\quad -\arcsin\Big(r^{3k_3+1} \sin(k_3t_1 + t_2 + 2k_3t_6) \sqrt{1 + r^{-2(3k_3+1)}(1 - 2r^{3k_3+1}\cos(k_3t_1 + t_2 + 2k_3t_6))}^{-1} \Big) \} \Big] \, dt_1dt_2dt_3dt_4dt_5dt_6dt_7 \geq 1
\end{aligned}
$$

が成り立つことである。

例

魔法陣とは $n \times n$ マスの正方形のマス目に数字を配置し、
縦・横・対角線のいずれの列についても
その列の数字の合計が同じになるものであって、さらに各マス目に
１から n^2 までが過不足なく使われているものをいう。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

3×3の魔法陣の一例

この魔法陣の総パターン数を数え上げてみよう。

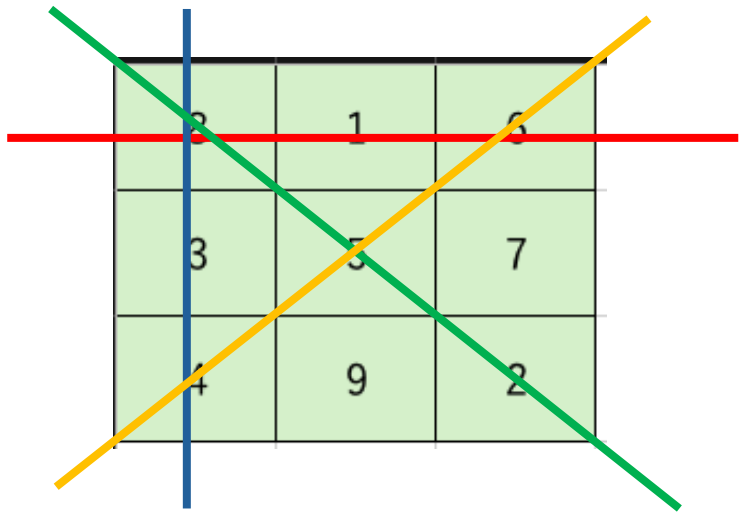
i 行 j 列目のマス目に入る数値を x_{ij} で表す。

各縦・横・対角線の和は $\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n^2} l = \frac{1}{2}n(n^2+1)$ なので、

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \frac{1}{2}n(n^2+1) \quad (j=1,\ldots,n), \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{1}{2}n(n^2+1) \quad (i=1,\ldots,n)$$

$$\sum_{l=1}^{n} x_{ll} = \frac{1}{2}n(n^2+1), \qquad \sum_{l=1}^{n} x_{l\,n+1-l} = \frac{1}{2}n(n^2+1)$$

が得られる。



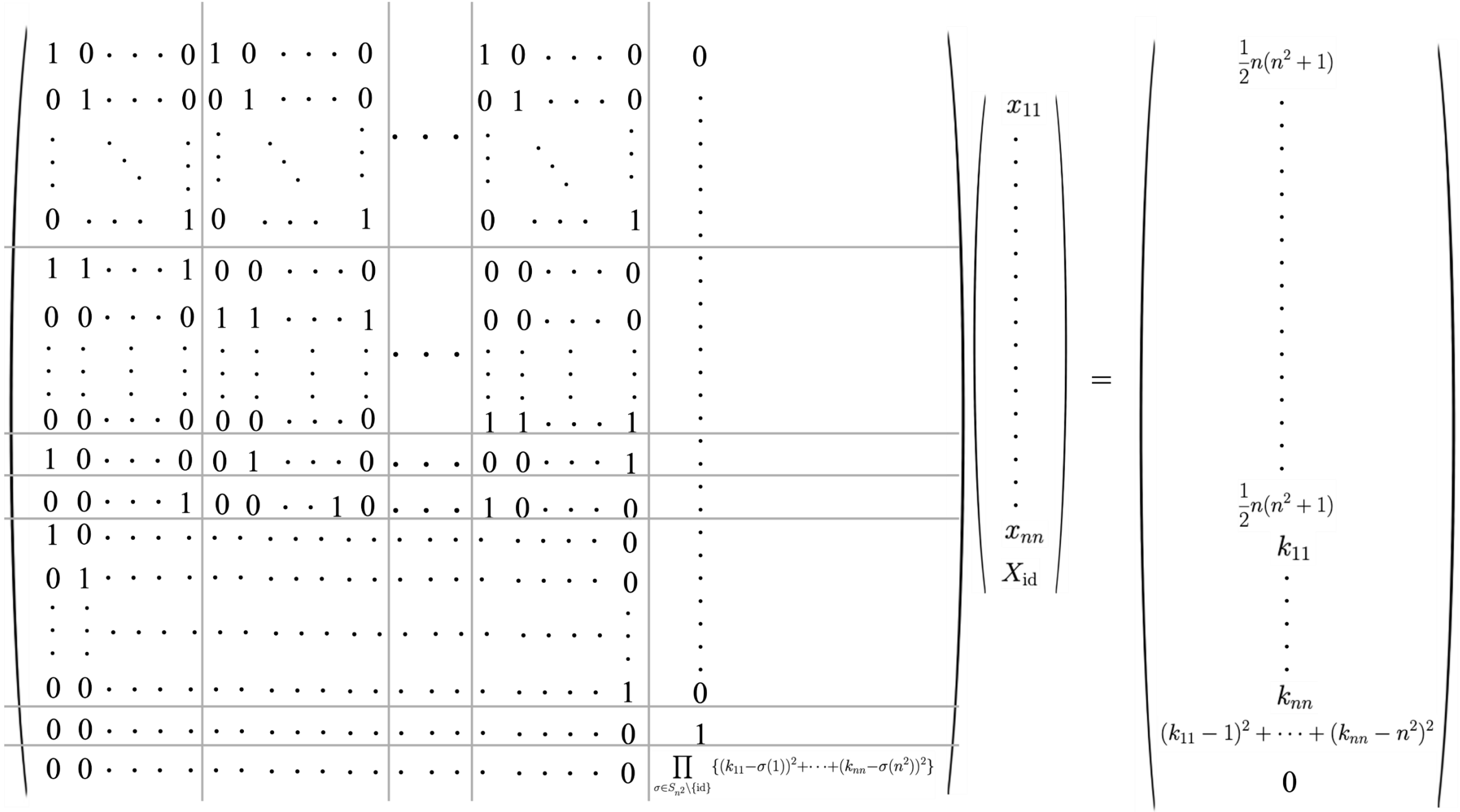
また、x_{ij} は1 から n^2 までの値を過不足なくとるので、ある $\sigma \in S_{n^2}$
にたいして $(x_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(x_{nn}-\sigma(n^2))^2=0$ がなりたつので方程式

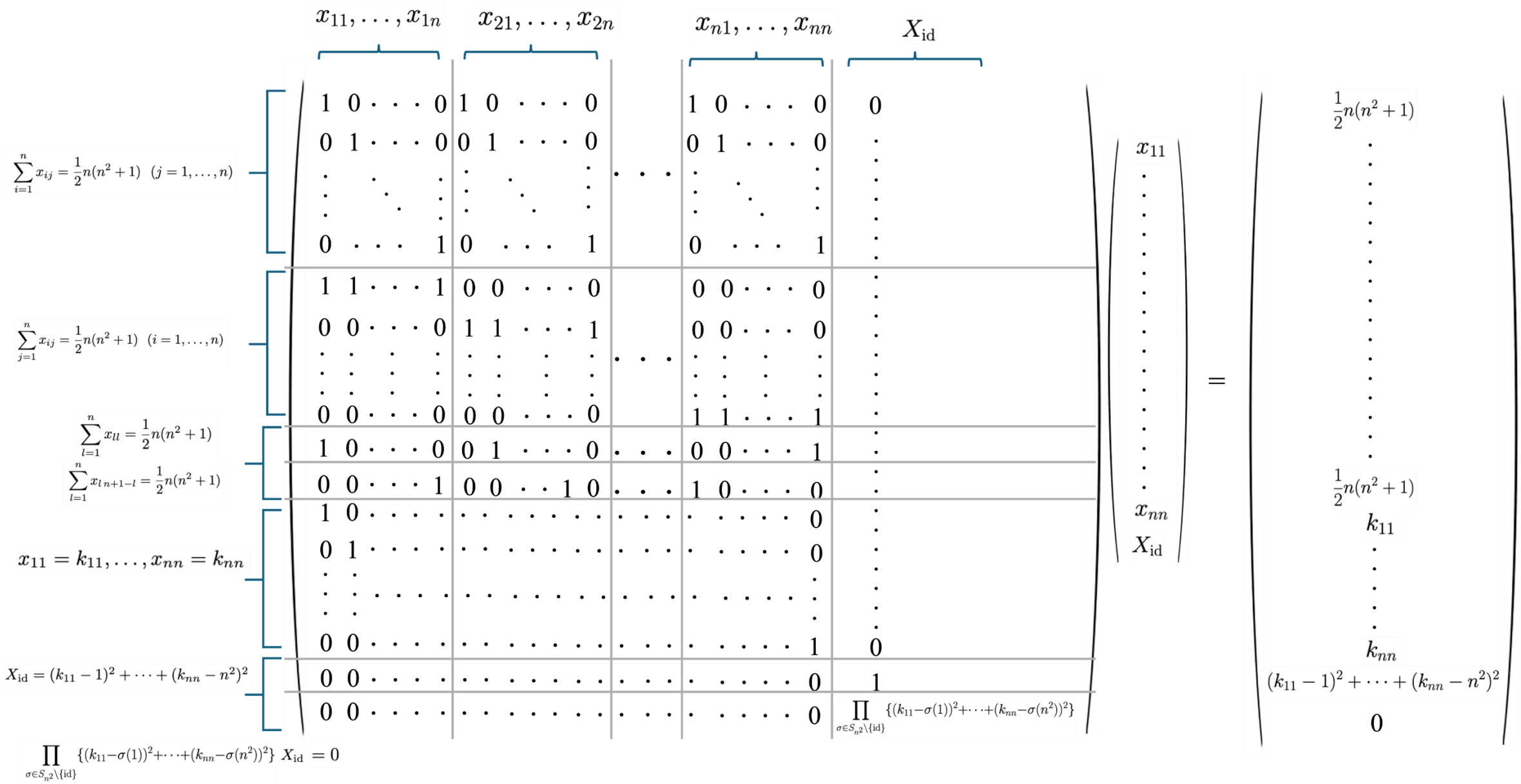
$$\prod_{\sigma\in S_{n^2}}\{(x_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(x_{nn}-\sigma(n^2))^2\}=0$$

が得られる。非負整数パラメータ $k_{11},\ldots,k_{nn}$ をつかって
$x_{11}=k_{11},\ldots,x_{nn}=k_{nn}$ とし、変数 X_{id} を $X_{\mathrm{id}}=(k_{11}-1)^2+\cdots+(k_{nn}-n^2)^2$
で定めると以下が得られる。

$$\prod_{\sigma\in S_{n^2}\setminus\{\mathrm{id}\}}\{(k_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(k_{nn}-\sigma(n^2))^2\}\ X_{\mathrm{id}}\ =0$$

これと先述の和の条件を併せて連立一次方程式を記述するとこのようになる


$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & 0 & \cdots & & 1 & & 0 & \cdots & & 1 & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 1 & 1 & \cdots & 1 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \prod_{\sigma \in S_{n^2} \setminus \{\mathrm{id}\}} \{(k_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(k_{nn}-\sigma(n^2))^2\} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{nn} \\ X_{\mathrm{id}} \end{pmatrix}$
$=$
$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}n(n^2+1) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}n(n^2+1) \\ k_{11} \\ \vdots \\ k_{nn} \\ (k_{11}-1)^2+\cdots+(k_{nn}-n^2)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$


$x_{11},\ldots,x_{1n}$
$x_{21},\ldots,x_{2n}$
$x_{n1},\ldots,x_{nn}$
X_{id}
$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \frac{1}{2}n(n^2+1)\ \ (j=1,\ldots,n)$
$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{1}{2}n(n^2+1)\ \ (i=1,\ldots,n)$
$\sum_{l=1}^{n} x_{ll} = \frac{1}{2}n(n^2+1)$
$\sum_{l=1}^{n} x_{l\,n+1-l} = \frac{1}{2}n(n^2+1)$
$x_{11}=k_{11},\ldots,x_{nn}=k_{nn}$
$X_{\mathrm{id}} = (k_{11}-1)^2+\cdots+(k_{nn}-n^2)^2$
$\prod_{\sigma\in S_{n^2}\setminus\{\mathrm{id}\}} \{(k_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(k_{nn}-\sigma(n^2))^2\}\ X_{\mathrm{id}} = 0$
x_{11}
x_{nn}
X_{id}
$\prod_{\sigma\in S_{n^2}\setminus\{\mathrm{id}\}} \{(k_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(k_{nn}-\sigma(n^2))^2\}$
$=$
$\frac{1}{2}n(n^2+1)$
$\frac{1}{2}n(n^2+1)$
k_{11}
k_{nn}
$(k_{11}-1)^2+\cdots+(k_{nn}-n^2)^2$
0

したがって、$n \times n$ マスの魔法陣の総パターン数は

$$\sum_{k_{11},\ldots,k_{nn}\in\mathbb{N}} \Bigg[\frac{1}{(2\pi)^{n^2+2n+4}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \prod_{1\le i,j\le n} \sqrt{1+r^{-2(\delta_{i,j}+\delta_{i,n+1-j}+3)}(1-2r^{\delta_{i,j}+\delta_{i,n+1-j}+3}\cos(t_j+t_{n+i}+\delta_{i,j}t_{2n+1}+\delta_{i,n+1-j}t_{2n+2}+t_{2n+2+(i-1)n+j}))}^{-1}$$

$$\times \sqrt{1+r^{-2(1+\prod_{\sigma\in S_{n^2}\setminus \mathrm{id}}\{(k_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(k_{nn}-\sigma(n^2))^2\})}(1-2r^{1+\prod_{\sigma\in S_{n^2}\setminus \mathrm{id}}\{(k_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(k_{nn}-\sigma(n^2))^2\}}\times\cos(t_{n^2+2n+3}+(\prod_{\sigma\in S_{n^2}\setminus \mathrm{id}}\{(k_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(k_{nn}-\sigma(n^2))^2\})t_{n^2+2n+4}))}^{-1}$$

$$\times r^{n(n+1)(n^2+1)+k_{11}+\cdots+k_{nn}+(k_{11}-1)^2+\cdots(k_{nn}-n^2)^2}$$

$$\times \Big(\cos\Big\{\frac{n(n^2+1)}{2}(t_1+\cdots+t_{2(n+1)})$$

$$-\sum_{1\le i,j\le n}\arcsin\Big(\frac{r^{-(\delta_{i,j}+\delta_{i,n+1-j}+3)}\sin(t_j+t_{n+i}+\delta_{i,j}t_{2n+1}+\delta_{i,n+1-j}t_{2n+2}+t_{2n+2+(i-1)n+j})}{\sqrt{1+r^{-2(\delta_{i,j}+\delta_{i,n+1-j}+3)}(1-2r^{\delta_{i,j}+\delta_{i,n+1-j}+3}\cos(t_j+t_{n+i}+\delta_{i,j}t_{2n+1}+\delta_{i,n+1-j}t_{2n+2}+t_{2n+2+(i-1)n+j}))}}\Big)$$

$$-\arcsin\Big(\frac{r^{1+\prod_{\sigma\in S_{n^2}\setminus \mathrm{id}}\{(k_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(k_{nn}-\sigma(n^2))^2\}}\sin(t_{n^2+2n+3}+(\prod_{\sigma\in S_{n^2}\setminus \mathrm{id}}\{(k_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(k_{nn}-\sigma(n^2))^2\})t_{n^2+2n+4}))}{\sqrt{1+r^{-2(1+\prod_{\sigma\in S_{n^2}\setminus \mathrm{id}}\{(k_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(k_{nn}-\sigma(n^2))^2\})}(1-2r^{1+\prod_{\sigma\in S_{n^2}\setminus \mathrm{id}}\{(k_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(k_{nn}-\sigma(n^2))^2\}}\times\cos(t_{n^2+2n+3}+(\prod_{\sigma\in S_{n^2}\setminus \mathrm{id}}\{(k_{11}-\sigma(1))^2+\cdots+(k_{nn}-\sigma(n^2))^2\})t_{n^2+2n+4}))}}\Big)\Big\}\Big)\ dt_1\cdots dt_{n^2+2n+4}\Bigg]$$

($r>1$は任意)

(ただし、対称移動等で重なる分も重複して数えていることには注意)

二次連立方程式の解の数え上げに向けて

Erdős–Straus conjecture と魔法陣の例で行った議論を一般化したい。
二次連立方程式

$$\begin{cases} \sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(1)} x_k = c^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i,j} a_{ij}^{(m)} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(m)} x_k = c^{(m)} \end{cases} \quad \cdots (\star)$$

$(a_{ij}^{(l)}, b_k^{(l)}, c^{(l)} \in \mathbb{Z})$

を考える。

この(☆)に対して、非負整数パラメータ$k_1, \ldots, k_n$ をfixした連立一次方程式

$$
\begin{cases}
\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(1)} x_k = c^{(1)} \\
. \\
. \\
\sum_{i,j} a_{ij}^{(m)} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(m)} x_k = c^{(m)} \\
x_1 = k_1 \\
. \\
. \\
x_n = k_n
\end{cases}
$$

を考え、無理やり一次方程式の話に帰着させる

$a'^{(l)}_{ij} = a^{(l)}_{ij} + \alpha^{(l)}_{ij} > 0, b'^{(l)}_{k} = b^{(l)}_{k} + \beta^{(l)}_{k} > 0$ となるように $\alpha^{(l)}_{ij}, \beta^{(l)}_{k} > 0$ をとって

$$
\begin{cases}
\sum_{i,j} a'^{(1)}_{ij} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b'^{(1)}_{k} x_k = c^{(1)} + u^{(1)} \\
. \\
. \\
\sum_{i,j} a'^{(m)}_{ij} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b'^{(m)}_{k} x_k = c^{(m)} + u^{(m)} \\
x_1 = k_1 \\
. \\
. \\
x_n = k_n \\
\sum_{i,j} \alpha^{(1)}_{ij} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \beta^{(1)}_{k} x_k = u^{(1)} \\
. \\
. \\
\sum_{i,j} \alpha^{(m)}_{ij} k_i x_j + \sum_{k=1}^{n} \beta^{(m)}_{k} x_k = u^{(m)}
\end{cases}
\quad \cdots (\bigcirc)
$$

とすると【条件】も満たす。

$$g_{lj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{\prime(l)} k_i + b_j^{\prime(l)}, h_{lj} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^{\prime(l)} k_i + \beta_j^{\prime(l)}$$

$$\delta = (c^{(1)} + u^{(1)}, \ldots, c^{(m)} + u^{(m)}, k_1, \ldots, k_n, u^{(1)}, \ldots, u^{(m)})$$

とおくと係数行列は

$$\Lambda = \Lambda(k_1, \ldots, k_n)$$

$$= \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mn} \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}$$

であり、方程式(〇)は $\Lambda \mathbf{x} = \delta$ とかけて以下が成り立つ

二次連立方程式が非負整数解を持つ条件

定理

$r > 1$ とし、

$$C_r(k_1,\dots,k_n,u^{(1)},\dots,u^{(m)}) = \frac{1}{(2\pi)^{2m+n}} \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} \frac{r^{\sum_{i=l}^{m}(2c^{(l)}+u^{(l)})+\sum_{j=1}^{n}k_j}}{\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\{1+r^{-2(\sum_{l=1}^{m}(g_{lk}+h_{lk})+1)}(1-2r^{(\sum_{l=1}^{m}(g_{lk}+h_{lk})+1)}\cos(\sum_{l=1}^{m}(g_{lk}t_l+h_{lk}t_{m+n+l})+t_{m+k}))\}}}$$
$$\times(\cos\{\sum_{l=1}^{m}\{(c^{(l)}+u^{(l)})t_l+u^{(l)}t_{m+n+l}\}+\sum_{j=1}^{n}k_jt_{m+j}$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\arcsin(\frac{r^{-(\sum_{l=1}^{m}(g_{lk}+h_{lk})+1)}\sin(\sum_{l=1}^{m}(g_{lk}t_l+h_{lk}t_{m+n+l})+t_{m+k})}{\sqrt{\{1+r^{-2(\sum_{l=1}^{m}(g_{lk}+h_{lk})+1)}(1-2r^{(\sum_{l=1}^{m}(g_{lk}+h_{lk})+1)}\cos(\sum_{l=1}^{m}(g_{lk}t_l+h_{lk}t_{m+n+l})+t_{m+k}))\}}})\})dt_1\cdots dt_{2m+n}$$

とする。このとき、

もともと考えていた二次連立方程式(☆)が非負整数解をもつ

$$\Leftrightarrow \exists k_1,\dots,k_n,u^{(1)},\cdots,u^{(m)} \in \mathbb{N}\ C_r(k_1,\dots,k_n,u^{(1)},\dots,u^{(m)}) \geq 1$$

二次連立方程式が非負整数解を持つ条件

定理

$r > 1$ とする。二次連立方程式(☆)の非負整数解の個数は

$$\sum_{k_1 \ldots k_n, u^{(1)} \ldots u^{(m)} \in \mathbb{N}} \Big[\frac{1}{(2\pi)^{2m+n}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{r^{\sum_{i=l}^{m} (2c^{(l)} + u^{(l)}) + \sum_{j=1}^{n} k_j}}{\prod_{k=1}^{n} \sqrt{\{1 + r^{-2(\sum_{l=1}^{m} (g_{lk} + h_{lk}) + 1)} (1 - 2r^{(\sum_{l=1}^{m} (g_{lk} + h_{lk}) + 1)} \cos(\sum_{l=1}^{m} (g_{lk} t_l + h_{lk} t_{m+n+l}) + t_{m+k}))\}}} \times \Big(\cos\Big\{ \sum_{l=1}^{m} \{ (c^{(l)} + u^{(l)}) t_l + u^{(l)} t_{m+n+l} \} + \sum_{j=1}^{n} k_j t_{m+j} - \sum_{k=1}^{n} \arcsin\Big(\frac{r^{-(\sum_{l=1}^{m} (g_{lk} + h_{lk}) + 1)} \sin(\sum_{l=1}^{m} (g_{lk} t_l + h_{lk} t_{m+n+l}) + t_{m+k})}{\sqrt{\{1 + r^{-2(\sum_{l=1}^{m} (g_{lk} + h_{lk}) + 1)} (1 - 2r^{(\sum_{l=1}^{m} (g_{lk} + h_{lk}) + 1)} \cos(\sum_{l=1}^{m} (g_{lk} t_l + h_{lk} t_{m+n+l}) + t_{m+k}))\}}} \Big) \Big\} \Big) dt_1 \cdots dt_{2m+n} \Big]$$

で書ける。(無限個になる場合も含む)

非負整数解の個数の不偏推定量

$X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ を非負整数値をとる独立同じ分布な確率変数とし、その確率関数を $P(X = x) = p(x)\ (\forall x \in \mathbb{N}\ p(x) > 0)$ とする。

(たとえばポワソン分布などがこういった分布にあたる)

$r > 1$ を固定し確率変数 $C' = \frac{C_r(X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m)}{p(X_1)\cdots p(X_n)p(Y_1)\cdots p(Y_m)}$ を考えると以下が成り立つ

定理

連立方程式(☆)の非負整数解の個数 $= \mathbb{E}[C']$
(解を無数に持つ場合は期待値無限大とする)

連立方程式(☆)が非負整数解をもつ $\Leftrightarrow \mathbb{V}[C'] = \infty$

(期待値が無限大の場合は分散は無限大とする)

(証明)

前半は

$$\mathbb{E}[C'] = \sum_{k_1,\dots,k_n,u^{(1)},\dots,u^{(m)}\in\mathbb{N}} \frac{C_r(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m)}{p(X_1)\cdots p(X_n)p(Y_1)\cdots p(Y_m)} p(X_1)\cdots p(X_n)p(Y_1)\cdots p(Y_m)$$
$$= \sum_{k_1,\dots,k_n,u^{(1)},\dots,u^{(m)}\in\mathbb{N}} C_r(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m)$$

から得られる。

後半について、解がない場合は C' は0しか値をとらないので期待値が0でない

自然数 μ である場合のみ考えればよい。この場合も方程式の解でない自然数の組が無数にあるので、分散の計算中で

$\frac{\mu^2}{p(X_1)\cdots p(X_n)p(Y_1)\cdots p(Y_m)}$ が無限個足されるので主張が得られる

□

積分曲線の半径も $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ と同じ分布の確率変数
からサンプリングすることを考え、

$$C''(R, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m) = \frac{C_{R+2}(X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m)}{p(R)p(X_1)\cdots p(X_n)p(Y_1)\cdots p(Y_m)}$$

とおくと以下が得られる。

系

連立方程式(☆)が非負整数解をもつ $\Leftrightarrow \mathbb{E}[C''] = \infty$

解を持たない場合の期待値は0である。

(証明)

積分結果が半径によらないので、一つでも解があれば1が無限個足されるから ▫

演習：以下の計算をしてみましょう。

$$\sum_{k_1,k_2,u\in\mathbb{N}}\Big[\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi^{k_1+k_2+2u-5}\cos\{(u-5)t_1+ut_2+k_1t_3+k_2t_2-\arcsin\Big(\frac{\pi^{k_1+5}\sin((k_1+1)t_1+3t_2+t_3)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}}\Big)-\arcsin\Big(\frac{\pi^{k_2+7}\sin((k_2+1)t_1+5t_2+t_4)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}\Big)\}}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}dt_1dt_2dt_3dt_4\Big]$$

演習：以下の計算をしてみましょう。

$$\sum_{k_1,k_2,u\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi^{k_1+k_2+2u-5}\cos\{(u-5)t_1+ut_2+k_1t_3+k_2t_2-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_1+5}\sin((k_1+1)t_1+3t_2+t_3)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}}\right)-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_2+7}\sin((k_2+1)t_1+5t_2+t_4)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}\right)\}}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}dt_1dt_2dt_3dt_4\right]$$

最強の高専教員

演習：以下の計算をしてみましょう。

$$\sum_{k_1,k_2,u\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi^{k_1+k_2+2u-5}\cos\{(u-5)t_1+ut_2+k_1t_3+k_2t_2-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_1+5}\sin((k_1+1)t_1+3t_2+t_3)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}}\right)-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_2+7}\sin((k_2+1)t_1+5t_2+t_4)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}\right)\}}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}dt_1dt_2dt_3dt_4\right]$$

最強の高専教員

演習：以下の計算をしてみましょう。

$$\sum_{k_1,k_2,u\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi^{k_1+k_2+2u-5}\cos\{(u-5)t_1+ut_2+k_1t_3+k_2t_2-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_1+5}\sin((k_1+1)t_1+3t_2+t_3)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}}\right)-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_2+7}\sin((k_2+1)t_1+5t_2+t_4)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}\right)\}}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}dt_1dt_2dt_3dt_4\right]$$

最強の高専教員

連立一次方程式

$$\begin{cases}(k_1+1)x+(k_2+1)y=u-5\\3x+5y=u\\x=k_1\\y=k_2\end{cases}$$

が見える。

演習：以下の計算をしてみましょう。

$$\sum_{k_1,k_2,u\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi^{k_1+k_2+2u-5}\cos\{(u-5)t_1+ut_2+k_1t_3+k_2t_2-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_1+5}\sin((k_1+1)t_1+3t_2+t_3)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}}\right)-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_2+7}\sin((k_2+1)t_1+5t_2+t_4)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}\right)\}}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}dt_1dt_2dt_3dt_4\right]$$

最強の高専教員

つまり、方程式

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4=0$$

すなわち

$$(x-1)^2+(y-2)^2=0$$

の解の個数を数え上げればよい。

演習：以下の計算をしてみましょう。

$$\sum_{k_1,k_2,u\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi^{k_1+k_2+2u-5}\cos\{(u-5)t_1+ut_2+k_1t_3+k_2t_2-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_1+5}\sin((k_1+1)t_1+3t_2+t_3)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}}\right)-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_2+7}\sin((k_2+1)t_1+5t_2+t_4)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}\right)\}}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}dt_1dt_2dt_3dt_4\right]$$

$=1$

最強の高専教員

演習：以下の計算をしてみましょう。

$$\sum_{k_1,k_2,u\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi^{k_1+k_2+2u-5}\cos\{(u-5)t_1+ut_2+k_1t_3+k_2t_2-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_1+5}\sin((k_1+1)t_1+3t_2+t_3)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}}\right)-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_2+7}\sin((k_2+1)t_1+5t_2+t_4)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}\right)\}}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}dt_1dt_2dt_3dt_4\right]$$

$=1$

最強の高専教員

高専中退

演習：以下の計算をしてみましょう。

$$\sum_{k_1,k_2,u\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi^{k_1+k_2+2u-5}\cos\{(u-5)t_1+ut_2+k_1t_3+k_2t_2-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_1+5}\sin((k_1+1)t_1+3t_2+t_3)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}}\right)-\arcsin\left(\frac{\pi^{k_2+7}\sin((k_2+1)t_1+5t_2+t_4)}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}\right)\}}{\sqrt{1+\pi^{-2(k_1+5)}(1-2\pi^{k_1+5}\cos((k_1+1)t_1+3t_2+t_3))}\sqrt{1+\pi^{-2(k_2+7)}(1-2\pi^{k_2+7}\cos((k_2+1)t_1+5t_2+t_4))}}dt_1dt_2dt_3dt_4\right]$$

$=1$

最強の高専教員

高専中退

講演の準備期間は短いって
わかってたのに・・・

どうしてもっと前もってちゃんと
準備しようと
思わなかったんだろう・・・

END

参考文献

【GRUN 1981】Grunewald et.al. ” How to solve a quadratic equation in integers” Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 89 (1) pp 1-5, 1981
【CASS 1978】Cassels ”RATIONAL QUADRATIC FORMS” Academic Press London, 1978
【COLO 2003】Colon et.al. ”Linear Invariant Generation Using Non-Linear Constraint Solving” CAV 2003: CVCS pp 420 – 432, 2003
【GRUN 1980】Grunewald et.al. ”Some General Algorithms. I: Arithmetic Groups ” Annals of Mathematics 112 (3) pp 531-583 , 1980
【SERR 1978】Serre ”A Course in Arithmetic” Springer, 1978
【MATI 1970】Matijasevic J.V. ”Enumerable sets are Diophantine” English translation: Soviet Math. Doklady, 11 pp 354-357,1970
【MATI 1971】Matijasevic J.V. ”Diophantine representation of enumerable predicates”(Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 35 pp 3-30,1971
【DAVI 1973】M.Davis ”Hilbert’s Tenth Problem is Unsolvable” The American Mathematical Monthly, 80 (3) 233-269, 1973
【BHC 1962】Borel, Chandra “Arithmetic subgroups of algebraic groups” Ann of Math, 75, pp485-535,
【Lasserre 2001】 Lasserre, Zeron “On counting integral points in a convex rational polytope”, Mathematics of Operations Research Vol. 28, No. 4 (Nov., 2003), pp. 853-870
Nakamura 2024 】Nakamura ”On algorithms to solve Quadratic Diophantine equation” Master thesis, Japan Advanced Institute of Science and Technology 2024
https://dspace02.jaist.ac.jp/dspace/handle/10119/19420
【芥見 2018】芥見下々 “呪術廻戦” 集英社 2018
【山田 2020】山田 鐘人 (原著), アベ ツカサ (イラスト), “葬送のフリーレン”,小学館サービス 2020