Abstruct : 中山の補題のいろいろ

akari0koutya

2025 年 3 月 4 日

この講演で紹介する中山の補題あるいはクルル-東屋の定理とは, 次のような, A を単位的 (非可換) 環としたときに, 有限生成 (左)A 加群と A のイデアルあるいは特に (Jacobson) 根基との関係性を与える代数学において非常に重要な主張である.

Theorem 1 : 中山の補題 ver.1

A を単位的可換環, M を有限生成 A 加群. I を A のイデアルとする. このとき, $M = IM$ ならば, ある $a \in I$ が存在し, $aM = 0$ かつ $a = 1 \pmod{I}$ が成り立つ.

Theorem 2 : 中山の補題 ver.2

A を単位的 (非可換) 環, M を有限生成左 A 加群, I を A の (Jacobson) 根基に含まれる両側イデアルとする. このとき, $MI = M$ ならば $M = 0$ が成り立つ.

この講演は入門枠であるため, 前半に基本的な線形代数学を既知として, (非可換) 環論の初歩と加群論をコンパクトに説明し, その後, 中山の補題とそのいくつかのバージョンの紹介と, そこから導かれる,Vasconcelos による次の結果を紹介する :

Theorem 3

A を可換環, M を有限生成 A 加群, A 線型写像 $f : M \to M$ とする. このとき, f が全射ならば, f は単射, すなわち同型射である.

Theorem 4

A を可換環とする. このとき, 有限生成 A 加群 M の任意の単射自己準同型写像が全射, すなわち同型射である必要十分条件は A が クルル次元 0 であることである.

最後に時間的余裕があれば, 少し入門から外れるが, 基本的なスキームなどの言葉を既知として, 中山の補題の幾何的解釈を与えようと思う.