

ディオファントス方程式の解の存在判定と 数え上げについて

N.Y(X:@N_Y_Big_Apple)

整数係数多項式 f を用いて $f=0$ という形で書ける方程式をディオファントス方程式といい、ディオファントス方程式の解を整数の範囲で探索するという問題は Hilbert の第 10 問題と呼ばれ、数論及び計算論における重要な問題である。

残念ながら 1970 年に、ディオファントス方程式の整数解の有無を判定する一般的なアルゴリズムは存在しないことが Matijasevic によって示されている。(このことを決定不能という)この決定不能性は多項式の次数を 4 次に制限しても変わらない。

一方、多項式を 2 次に制限した場合は整数解の有無を判定するアルゴリズムが存在することが 1981 年に Grunewald により示されており、Nakamura の修士論文によってアルゴリズムの詳細がサーベイされている。

今回の講演では前半に Grunewald が示した 2 次ディオファントス方程式におけるアルゴリズムの概要をはなし、後半には決定不能な場合についても解の個数を数え上げる公式を実積分と無限級数を組み合わせた形で書き下せるということについて話す。

参考文献

- 【GRUN 1981】 Grunewald et.al. "How to solve a quadratic equation in integers"
Mathematical Proceedings
of the Cambridge Philosophical Society 89 (1) pp 1-5, 1981
112 (3) pp 531-583 , 1980
- 【MATI 1970】 Matijasevic J.V. "Enumerable sets are Diophantine" English translation:
Soviet Math. Doklady, 11 pp 354-357,1970
- 【MATI 1971】 Matijasevic J.V. "Diophantine representation of enumerable
predicates"(Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 35 pp 3-30,1971
- 【Lasserre 2001】 Lasserre, Zeron "On counting integral points in a convex rational
polytope",
Mathematics of Operations Research Vol. 28, No. 4 (Nov., 2003), pp. 853-870
- Nakamura 2024】 Nakamura "On algorithms to solve Quadratic Diophantine equation"
Master thesis, Japan Advanced Institute of Science and Technology 2024
<https://dSPACE02.jaist.ac.jp/dSPACE/handle/10119/19420>