

連結性とは何か？

西行櫻鱒

2025年3月

1 導入

「連結性」とは「数学的対象の一つながりであるという性質」のことです。素朴にいろいろな図形を考えると、それが一つながりであるかどうかを直観に従って判断できます。この営みを数学的な言明に落とし込むには、数学的対象の意味するところを明確にし、考えたい図形をその数学的対象の例（モデル）であることを確かめることと、その数学的対象の性質として連結性を定式化し、考えているモデルが連結であることを示すことの二つが重要になります。

2 概要

本講演は前半と後半に分かれます。先ず前半では、素朴な図形をいろいろと考えるところから始めます。それらの図形がどのような数学的構造を備えた対象として捉えられるかを観察し、それぞれの範疇に於いて連結性を定式化する方法を模索します。この際には具体的な場合から考え始めることにし、具体的な場合の「連結性」が導く帰結を保つよう、一般的な状況で通用する定式化を探していきます。

例えば、幾何学的対象を考える際には、いきなり漠然と全体を相手にするのではなく、実数直線 \mathbb{R} の部分集合に話を限定します。こうすることで実数の持つ豊富な構造を活用することができ、直観的な議論を数学的な議論に落とし込むことが比較的容易になります。

前半を通していろいろな連結性を定式化しますが、これらに共通する性質こそが我々が直観的に持っている「連結性」の本質であろうと推測されます。そこで後半では、前半の観察を踏まえて「連結性」の本質を抽象化した概念である**連結構造束**を導入し、前半で観察した諸概念が連結構造束を定めることを確かめます。これを通してより広い枠組みで連結性に類似した構造を見出す余地が生まれます。また、前半では掬いきれなかった既存の連結性の概念がどのように本講演で述べた連結性と関係するかを説明します。