局所表示可能圏ことはじめ

西行櫻鱒

2025 年 3 月

1　導入

圏論の扱う対象は一般の圏[*1]およびその間の函手，および自然変換といってよいでしょう。小圏に余完備性を課すと，posetal であること，即ち，任意の二つの対象の間の射集合が高々一元であることが従うので，（余）完備束[*2]に本質的に限られてしまいます。そこで余完備性を扱うためには，前順序集合論の範疇に留まるか，サイズの問題に取り組む必要があります。サイズの問題に対する対処法はいろいろと考えられています[*3]が，今回は，小さいとは限らない余完備な圏でありながらも集合論的に扱いやすいクラスとして，“よい” 対象たちによって “生成” されるものを考えます。

定義. 圏 $\mathcal{C}$ が局所表示可能圏であるとは，余完備であり，正則基数 κ と κ-表示可能対象の集合 $\mathcal{S}$ が存在し，$\mathcal{C}$ の任意の対象が $\mathcal{S}$ 上の κ-有向図式の $\mathcal{C}$ に於ける余極限として書かれることをいう。

この定義を踏まえると，“よい” という形容詞の指す意味は，それが集合サイズであって，かつ含まれる対象が κ-表示可能であるということになります。κ-表示可能性は，集合の圏 Set に於いては濃度が κ 未満であることにより特徴付けられように，ある意味で “小さい” 対象であるといえます。また “生成” の指す意味は，$\mathcal{C}$ の任意の対象 X が $\mathcal{S}$ 上の κ-有向図式の $\mathcal{C}$ に於ける余極限として書かれることですが，これは，余完備性の下では κ-表示可能対象からなる極限的生成子が存在することによって特徴づけられます。

2　概要

本講演では，ここで触れた概念の具体例を見ながら局所表示可能圏を導入します。その中で，Set や単体的集合の圏 sSet などの空間の圏[*4]や，アーベル群の圏 Ab や環の圏 Ring などの代数の圏が具体例であることを確かめます。次いで，抽象的に定義された局所表示可能圏が実は小圏上の前層圏の “よい” 反映的部分圏として特徴付けられることを示します（Adámek–Rosický の定理）。このように具体的な構造を明らかにする表現定理はその概念の限界と意義とを明確にする点で重要であり，時間の許す限り，Grothendieck トポスの表現定理たる Giraud の定理との関係や関連する話題を述べたいと考えています。

[*1] 本講演では，特に断らない限り，単に圏といったときは局所小な 1-圏を指すものとします。

[*2] 前順序集合に対しては，完備性と余完備性とは等価であることが知られています。

[*3] クラスを形式的に扱える NBG 集合論を用いる方法や，強到達不能基数の存在を仮定する方法があります。なお，Grothendieck 宇宙の存在性は，強到達不能基数の存在性と等価であることが知られています。

[*4] 講演でも述べますが，位相空間の圏 Top は局所表示可能でないことに注意します。本講演では Grothendieck トポスを指して空間の圏と呼ぶことにします。