極限

天下のパクり屋たか

令和 6 年 10 月 20 日

自己紹介

i. Twitter: @takapad0123
ii. 所属: 静岡大学博士 1 年
   a. 専門: 集合論 特に, 実数上の組み合わせ論/基数不変量.

本講演に関して:

a 聞きながらの Twitter 歓迎です. #tsudoimath1 や #集合論 でツイートしよう! (講演中にコメントを拾います.)
b 本講演のスライドなどの写真/切り抜きツイートは OK です.
c 講演中に F5/ctrl+R をするので, うるいかもしれませんが悪しからず.
d 運営様にカンパをお願いします.

記法 1

順序集合 $\langle \Lambda, \lambda \rangle$, 論理式 φ に対して, 次の記法を導入する:

1 $\forall^\infty \lambda \in \Lambda\ \varphi(\lambda)$ *iff* $\exists \lambda \in \Lambda \forall \nu \in \Lambda(\lambda <_\Lambda \nu \implies \varphi(\nu))$,

2 $\exists^\infty \lambda \in \Lambda\ \varphi(\lambda)$ *iff* $\forall \lambda \in \Lambda \exists \nu \in \Lambda(\lambda <_\Lambda \nu \implies \varphi(\nu))$,

特に, $\Lambda = \mathbb{N}$ のときは,

1 $\forall^\infty n \in \mathbb{N}\ \varphi(n)$ *iff* $\exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}(n < m \implies \varphi(m))$,

2 $\exists^\infty n \in \mathbb{N}\ \varphi(n)$ *iff* $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}(n < m \implies \varphi(m))$,

記法 2

自然数全体からなる集合を ω とかく. この時, ω は $\in$-に関して整列集合である.

定義 3 (ε-N)

実数上の数列 $\langle x_n \,;\, n \in \mathbb{N} \rangle$ が $x \in \mathbb{R}$ に収束 *(converges)* するとは:

$$\forall \varepsilon_{>0} \forall^{\infty} n \in \mathbb{N} \; |x - x_n| < \varepsilon$$

定義 4 (ε-δ)

函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $x \in \mathbb{R}$ で連続 *(continuous)* であるとは,

$$\forall \varepsilon_{>0} \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R} \; (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

特に, 任意の点で連続であるとき, 函数 f を連続函数であるという.

定理 5

連続函数 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, 合成函数 $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続函数である.

定義 6

組 (X, d) が距離空間であるとは, X が集合で 函数 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ が次を満たす:

1 $d(x, y) \geq 0$ ($\forall x, y \in X$),

2 $d(x, y) = 0$ iff $x = y$ ($\forall x, y \in X$),

3 $d(x, y) = d(y, x)$ (forall $x, y \in X$), and

4 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ ($\forall x, y, z \in X$),

例 7

$d_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \langle x, y \rangle \mapsto |x - y|$ は $\mathbb{R}$ の距離である. またこれを実数に関する 「通常の距離」 といい, ユークリッド距離 *(Euclidean metric)* と呼ぶ.

定義 8

距離空間 (X, d_X) について, 数列 $\langle x_n \in X \,;\, n \in \mathbb{N} \rangle$ が $y \in X$ に収束するとは,

$$\forall \varepsilon >_{\mathbb{R}} 0 \forall^{\infty} n \in \mathbb{N}\ d_X(x_n, y) <_{\mathbb{R}} \varepsilon$$

定理 9

実数空間において, ε-N 論法で定義される収束と通常の距離で定義される収束は同義である.

定義 10

距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ と 函数 $f\colon X \to Y$ とする.
f が点 $x \in X$ で連続であるとは,

$$\forall \varepsilon_{>0} \exists \delta_{>0} \forall x' \in X \quad d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

である.

定理 11

函数 $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ が連続であることは, $\mathbb{E}$ 上の任意の数列 $\langle x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\rangle$ と点 x に対して 次を満たすときと同値である:

$$\langle x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\rangle \to x \implies \langle f(x_n)\,;\, n \in \mathbb{N}\rangle \to f(x)$$

Proof.

「連続ならば点列連続」 と 「点列連続ならば連続」 を示す.

□

Proof.

「連続ならば点列連続」と「点列連続ならば連続」を示す.
「連続ならば点列連続」を示す.
f が連続と $\langle x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\rangle \to x$ を仮定し, 次を証明すればよい.

$$\forall \varepsilon > 0 \forall^{\infty} n \in \mathbb{N}\ d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon \tag{*}$$

任意の $\varepsilon_{>0}$ に対して, f は x で連続なので, 次を満たす $\delta_{>0}$ が取れる

$$\forall x' \in \mathbb{E}\ \ d(x, x') < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \varepsilon \tag{A}$$

また, $\langle x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\rangle$ は x に収束してるので, 次をみたす.

$$\forall^{\infty} n \in \mathbb{N}\ d(x, x_n) < \delta \tag{B}$$

A, B より * が得られる.

Proof.

「連続ならば点列連続」 と 「点列連続ならば連続」 を示す.
「点列連続ならば連続」を示す.
f が点列連続を仮定し, 各 x と $\varepsilon_{>0}$ に対して, 次を証明すればよい.

$$\exists\delta_{>0}\forall x' \in X \quad d(x,x') < \delta \implies d(f(x),f(x')) < \varepsilon \tag{*}$$

そうでないとする.
このとき, 自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, x_n を次のように選択することができる.

$$d(x,x_n) < 1/n+1 \text{ かつ } d(f(x),f(x_n)) \geq \varepsilon \tag{C}$$

この時, $\langle x_n\,;\,n \in \mathbb{N}\rangle$ は x に収束してるので, 点列連続より, $\langle f(x_n)\,;\,n \in \mathbb{N}\rangle$ は $f(x)$ に収束するが, これは C の後半と矛盾を孕む. □

定義 12 (開集合族)

集合 X と集合族 $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ について, $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ が位相空間であるとは:

(a) $\emptyset \in \mathcal{O}$,

(b) $X \in \mathcal{O}$,

(c) $\cap\{U_i\,;\, i < n\} \in \mathcal{O}$ for all $U_i \in \mathcal{O}$, $i < n$, for each $n \in \mathbb{N}$,

(d) $\cup\{U_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\} \in \mathcal{O}$ for all nonempty $\{U_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{O}$

例 13

i. 集合 X に対して, $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ は位相構造である,

ii. 集合 X に対して, $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X) = \{A\,;\, A \subset X\}$ は位相構造である.

定理 14

距離空間 (X,d) に対して, 次のように開集合族を定めると位相構造となる:

$$O \in \mathcal{O} \text{ iff } \forall x \in O \exists \varepsilon >_{\mathbb{R}} 0\ B(x,\varepsilon) \subset O.$$

ここで, $B(x,\varepsilon) = \{y \in X\,;\, d(x,y) < \varepsilon\}$ である.

Proof.

$\emptyset \in \mathcal{O}$ は定義から分かる.
$X \in \mathcal{O}$ について: 任意の $x \in X$ に対して, $x \in B(x,\varepsilon_x)$ となる ε_x は存在する. このとき, $X \subset \bigcup\{B(x,\varepsilon_x)\,;\, x \in X\} \subset X$ が成立するので $X \in \mathcal{O}$ である.
$\bigcap\{U_i\,;\, i < n\} \in \mathcal{O}$ について: 有限個の $O_i \in \mathcal{O}$, $i < n$ を取り, $O = \bigcap\{O_i\,;\, i < n\}$ とする. $x \in O$ に対して, 各 $i < n$ に対して, ε_i が存在して, $B(x,\varepsilon_n) \subset O_i$ を満たす. このとき, 十分小さい $\varepsilon (< \varepsilon_i)$ について, $B(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon_i) \subset O_i$ となるので, $B(x,\varepsilon) \subset O$ を得る.
$\bigcup\{U_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\} \in \mathcal{O}$ について: 任意個 $O_\lambda \in \mathcal{O}$, $\lambda \in \Lambda \neq \emptyset$, を取り, $\mathcal{O} = \bigcup\{O_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\}$ とする. 任意の $x \in \mathcal{O}$ に対して, $x \in O_\lambda$ を満たす λ が取れるので, ある ε が存在して, $x \in B(x,\varepsilon) \subset O_\lambda \subset O$ を満たす.

定義 15

$\langle \Lambda, <_\Lambda \rangle$ が有向集合 *((up-)directed set)* であるとは,

i. $<_\Lambda \subset \Lambda \times \Lambda$,

ii. $x <_\Lambda y$ かつ $y <_\Lambda z$ ならば $x <_\Lambda z$ がすべての $x, y, z \in \Lambda$ で成立する,

iii. 任意の $x, y \in \Lambda$ に対して, $x <_\Lambda z$ かつ $y <_\Lambda z$ を満たす $z \in \Lambda$ が存在する.

定義 16

位相空間 X に対して, $\{x_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ がネット *(net)* であるとは, Λ が有向集合かつ $x_\lambda \in X$ である. 特に $\{x_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ が次を満たすとき超ネット *(ultranet)* という.

$$\exists\lambda \in \Lambda \forall\lambda' > \lambda\ x_\lambda \in A$$

がすべての部分集合 $C \subset X$ に対して, $A = C$ または $A = X \setminus C$ で成り立つ.

定義 17

2 つの有向集合 $\langle M, <_M\rangle$ と $\langle \Lambda, <_\Lambda\rangle$ に対して, 函数 $\varphi\colon M \to \Lambda$ が*:*

i. 単調増加 *(increasing)* であるとは, $\mu <_M \mu' \implies \varphi(\mu) <_\Lambda \varphi(\mu')$ *for all* $\mu, \mu' \in M$*,*

ii. 共終的 *(cofinal)* であるとは, $\forall\lambda \in \Lambda \exists\mu \in M\ \lambda <_\Lambda \varphi(\mu)$*.*

位相空間 X 上で定義されたネット $\{x_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ と単調増加共終函数 φ に対して定まるネット $\{x_{\varphi(\mu)}\,;\,\mu \in M\}$ を部分ネットという.

定義 18

位相空間 X, ネット $\{x_\lambda\,;\,\lambda\in\Lambda\}$ と点 x に対して次を定義する.

i. x が $\{x_\lambda\,;\,\lambda\in\Lambda\}$ の極限点 *(limit points)* であるとは,

$$\forall U\in\mathcal{O}\ (x\in U\implies\forall^\infty\lambda>\lambda\ x_\lambda\in U)$$

ii. x が $\{x_\lambda\,;\,\lambda\in\Lambda\}$ の集積点 *(cluster points)* であるとは,

$$\forall U\in\mathcal{O}\ (x\in U\implies\exists^\infty\lambda\in\Lambda\ x_\lambda\in U)$$

系 19

x が $\{x_\lambda\,;\,\lambda\in\Lambda\}$ の集積点であるとき, ある有向点列 M と増加共終函数 $\varphi\colon M\to\Lambda$ が存在して, 部分ネット $\{x_{\varphi(\mu)}\,;\,\mu\in M\}$ は x を極限点としてもつ.

系

x が $\{x_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ の集積点であるとき，ある有向点列 M と増加共終函数 $\varphi\colon M \to \Lambda$ が存在して，部分ネット $\{x_{\varphi(\mu)}\,;\,\mu \in M\}$ は x を極限点としてもつ．

系

x が $\{x_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ の集積点であるとき，ある有向点列 M と増加共終函数 $\varphi\colon M \to \Lambda$ が存在して，部分ネット $\{x_{\varphi(\mu)} ; \mu \in M\}$ は x を極限点としてもつ．

Proof.

$\{x_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ をネットとし，$x \in X$ をその集積点とする．
有向集合 $(M, <_M)$ と増加共終函数 φ を次のように定める:

- i $M = \{(\lambda, U) ; \lambda \in \Lambda \wedge x_\lambda \in U \in \mathcal{O}\}$,
- ii $(\lambda, U) <_M (\lambda', U')$ iff $\lambda <_\Lambda \lambda'$ かつ $U \supset U'$,
- iii $\varphi\colon M \to \Lambda; (\lambda, U) \mapsto \lambda$.

$\{x_{\varphi(\lambda,U)} ; (\lambda, U) \in M\}$ が x に収束することを示す．
$U \ni x$ を開集合とし，$\lambda \in \Lambda$ を $x_\lambda \in U$ となるように取る．
このとき，任意の $(\lambda', U') >_M (\lambda, U)$ に対して，$x_{\lambda'} \in U' \subset U$ が成立する． □

定義 20 (ハウスドルフ (Hausdorff))

位相空間 X が T_2 であるとは, 任意 2 点 $x, y \in X$ に対して, 開集合 $U, V \in \mathcal{O}$ が存在し, $x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset$ である.

定理 21

位相空間 X に対して次は同値:

イ. T_2,

ロ. 任意の収束するネットの収束先が一意.

定義 20 (ハウスドルフ (Hausdorff))

位相空間 X が T_2 であるとは, 任意 2 点 $x, y \in X$ に対して, 開集合 $U, V \in \mathcal{O}$ が存在し, $x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset$ である.

定理 21

位相空間 X に対して次は同値:

イ. T_2,

ロ. 任意の収束するネットの収束先が一意.

Proof.

イ → ロ: $\{x_\lambda\, ;\, \lambda \in \Lambda\}$ を X 上のネットとし, x_0, x_1 を極限点とする.
もし, $x_0 \neq x_1$ であるとすると, $x_i \in U_i$ $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ を満たす $U_i \in \mathcal{O}$ for $i < 2$, が存在する.
x_i に収束するので, $x_\nu \in U_i$ forall $\nu >_\Lambda \lambda_i$ を満たす $\lambda_i \in \Lambda$ が取れる $(i < 2)$.
このとき, $\lambda > \lambda_0, \lambda_1$ に対して, $x_\lambda \in U$ かつ $x_\lambda \in V$ を満たすので, 矛盾を孕む.

□

定義 20 (ハウスドルフ (Hausdorff))

位相空間 X が T_2 であるとは，任意 2 点 $x, y \in X$ に対して，開集合 $U, V \in \mathcal{O}$ が存在し，$x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset$ である．

定理 21

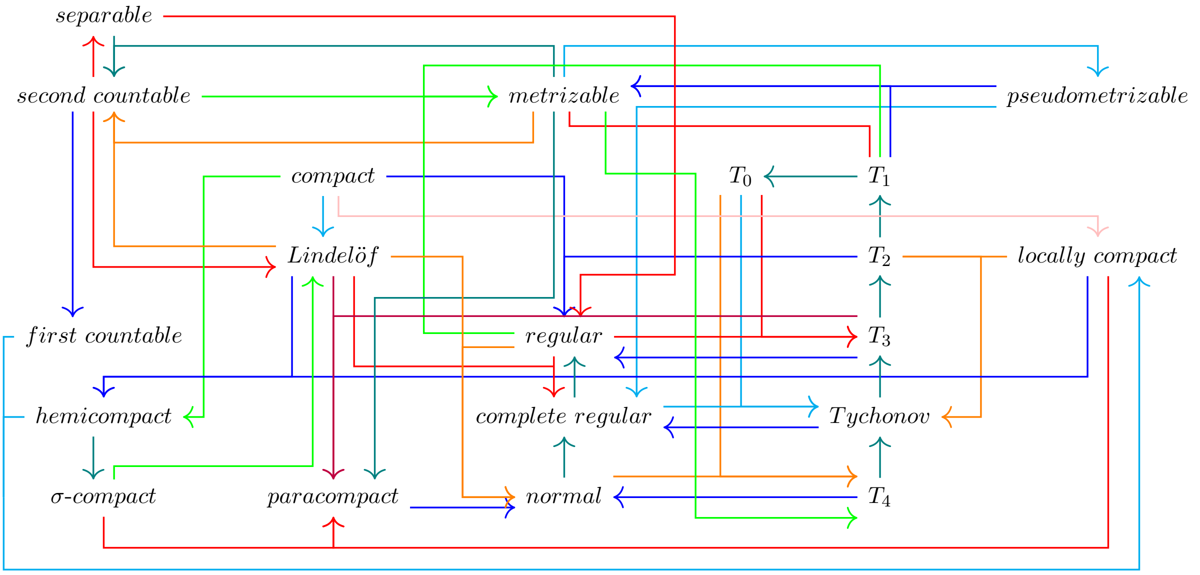
位相空間 X に対して次は同値:

イ．T_2,

ロ．任意の収束するネットの収束先が一意．

Proof.

2 点 $x_0, x_1 \in X$ が存在し，任意の開集合 $U \in \mathcal{O}$ に対して，$x_0 \in U$ iff $x_1 \in U$.
このとき，x_0 に収束するネットは x_1 にも収束するので，矛盾を孕む．□


separable
second countable
metrizable
pseudometrizable
compact
T_0
T_1
Lindelöf
T_2
locally compact
first countable
regular
T_3
hemicompact
complete regular
Tychonov
σ-compact
paracompact
normal
T_4

定義 22

X を位相空間, A を部分集合とする. A がコンパクト集合 *(compact set)* であるとは, 任意の開集合族 $\mathcal{F}$ に対して, 次を満たすときである.

$$A \subset \cup \mathcal{F} \implies \exists F' \subset \mathcal{F}\ |\mathcal{F}'| < \aleph_0 \wedge A \subset \cup \mathcal{F}'$$

特に, X がコンパクト集合のとき, X をコンパクト空間という.

定理 23

X を位相空間とし, A をその部分集合とする. このとき, 次の *3* つは同値である:

(a) A がコンパクトである,

(b) A 上の任意のネット $\{x_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\} \subset A$ は集積点を A の中に持つ,

(c) A 上の任意の超ネットは収束点を A の中に持つ.

Proof.

(a) $\Longrightarrow$ (b). $\{x_\lambda\,;\,\lambda\in\Lambda\}$ を A 上のネットとする．集積点全体の集まりは次のように表せる．(非常に非自明)

$$\cap\{\mathrm{Cl}\,X_\lambda\,;\,\lambda\in\Lambda\}\quad \text{where } X_\lambda=\{x_{\lambda'}\,;\,\lambda<\lambda'\wedge\lambda'\in\Lambda\}\subset A$$

もし，集積点を持たないとすると，$\cup\{X\setminus\mathrm{Cl}\,X_\lambda\,;\,\lambda\in\Lambda\}=A$ となる．よって，コンパクト性より，有限個の λ_i, $i\in n$, が存在して 次を満たす．

$$X\setminus\mathrm{Cl}(\cap\{X_{\lambda_i}\,;\,i\in n\})=\cup\{X\setminus\mathrm{Cl}\,X_{\lambda_i}\,;\,i\in n\}=A$$

さらに，Λ は有向集合であったので，$\lambda_i<\lambda$ を満たす $\lambda\in\Lambda$ に対して，$\cap\{X_{\lambda_i}\,;\,i\in n\}\supset X_\lambda$ を満たすので，

$$X_\lambda\subset\mathrm{Cl}\,X_\lambda\subset X\setminus A$$

となり，矛盾を孕む．

Proof.

(b) $\Longrightarrow$ (a). $\{U_i\,;\,i \in I\}$ を A の開被覆とする．有向集合 Λ を次のように定める:

(1) $\Lambda = \{J\,;\,J \subset I \wedge |J| < \aleph_0\}$, and

(2) $J <_\lambda J'$ iff $J \subset J'$

ここで，もし A がコンパクトでないとすれば，各 $A \setminus \cup\{U_j\,;\,j \in J\}$, $J \in \Lambda$, は空集合ではないので，ネットが取れる．

$$\langle x_J \in A \setminus \cup\{U_j\,;\,j \in J\}\,;\,J \in \Lambda\rangle$$

仮定より，集積点 $x \in A$ が存在し，$i \in I$ を $x \in U_i$ となるように取る．この時，J, J' を次のように取れる:

(i) $\{i\} = J <_\Lambda J'$,

(ii) $x_{J'} \in U_i$.

このとき，$x_{J'} \in A \setminus \cup\{U_j\,;\,j \in J'\}$ と $i \in J'$ を満たすので，矛盾を孕む． □

定理 24

X をコンパクト集合とし, $f\colon X \to \mathbb{R}$ を連続写像とする. このとき, $f[X]$ は最大値と最小値を持つ.

Proof.

最大値を持つことを示す.
もし最大値も持たないと仮定する.
順序集合 $(\Lambda, <)$ を $\Lambda = X$ かつ $x <_\Lambda y$ iff $f(x) <_\mathbb{R} f(y)$ と定義する.
このとき, Λ は有向集合である.
X 上のネット $\{x_x\,;\, x \in \Lambda\}$ に対して, $\{x_\mu\,;\, \mu \in M\}$ を部分超ネットとする.
X はコンパクト集合であるので, 収束点を x とする.
このとき, f は連続なので,

$$\{f(x_\mu)\,;\, \mu \in M\} \to f(x)$$

であるが, これはネットが増大列であることに反するので矛盾を孕む.

□

事実 25

自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は通常の順序に関して整列集合である．すなわち，「全順序」かつ「任意の空でない部分集合は最小値を持つ」．

特に，自然数全体の集まり $\mathbb{N}$ は $\in$ が通常の順序となっている．

事実 25

自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は通常の順序に関して整列集合である．すなわち，「全順序」 かつ 「任意の空でない部分集合は最小値を持つ」．

特に，自然数全体の集まり $\mathbb{N}$ は $\in$ が通常の順序となっている．

真実 26

i. $0 := \emptyset$,

ii. $1 := \{0\}$,

iii. $2 := \{0, 1\} = 1 \cup \{1\}$,

iv. $n + 1 := n \cup \{n\}$,

v. $\mathbb{N} = \omega$.

つまり，$0 \in 1 \in 2 \cdots \in n \in \cdots \in \omega$ となっている．

定義 27

順序数集合 A が順序数 *(ordinal)* であるとは，「A が $\in$-整列集合」 かつ 「$x \in y$ かつ $y \in A$ ならば $x \in A$」 である.

例 28

次は順序数である:

a. $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$,

b. $2 = \{0, 1\}$,

c. $\langle \mathbb{N}, \in \rangle =: \omega$,

d. $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$.

事実 29

順序数全体の集まり (クラス) を ON と書く．このとき 次の性質を持つ:

イ．ON は真クラスである (集合ではない),

ロ．$\alpha \in \mathrm{ON}$ ならば, 任意の $\beta \in \alpha$ は順序数である．

ハ．$\alpha \in \mathrm{ON}$ ならば $\alpha \in S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{ON}$ である,

ニ．順序数からなる集合 A に対して, $\min A = \cap A$ は順序数である,

ホ．順序数からなる集合 A に対して, $\sup A = \cup A$ は順序数である,

ヘ．ON は $\in$-整列である．すなわち,「$\in$-に関して全順序」かつ「任意の空でない部分集合は最小値を持つ」,

ト．すべての順序数 $\alpha \in \mathrm{ON}$ は次のタイプにわけられる:

g–i $\alpha = 0 = \emptyset$,
g–ii $\alpha = S(\beta) = \beta \cup \{\beta\}$ *for some* $\beta \in \mathrm{ON}$, *(後続順序数)*
g–iii それ以外．*(極限順序数)*

チ．順序数 $\alpha \in \mathrm{ON}$ に対して, $\alpha = \cup\{\beta \in \mathrm{ON}\,;\, \beta \in \alpha\}$ を満たす．

定義 30

順序数 α が基数 *(cardinal)* であるとは, 任意の $\beta \in \alpha$ に対して, 単射 $f \colon \alpha \to \beta$ が存在しないことである.

例 31

a. 任意の自然数は基数である,
b. ω は基数である,
c. $\omega + 1$ は<u>基数ではない</u>.

事実 32

任意の集合 A に対して, ある基数 α と函数 $f \colon A \to \alpha$ が存在して, f は全単射である. この時, 存在する基数は一意的であり $|A|$ と書き, A にサイズ *(*濃度*)* と呼ぶ.
特に 順序数 α に対して, $|\alpha| = \alpha$ または $|\alpha| \in \alpha$ である.

定理 33 (Cantor)

すべて集合 A に対して, $|A| \in |\mathcal{P}(A)|$.

定理 33 (Cantor)

すべて集合 A に対して, $|A| \in |\mathcal{P}(A)|$.

Proof.

A を集合とし, もし $\mathcal{P}(A)$ から $|A|$ への単射 f が存在したとする.
次のような集合を考える:

$$D = \{x \in A\,;\, \exists x\ x = f(Y) \land Y \in \mathcal{P}(A) \land f(Y) \notin Y\}$$

このとき,

$$\begin{aligned} f(D) \in D \quad &\Leftrightarrow \quad f(Y) \notin Y \land f(Y) = f(D) \quad \text{for some } Y \in \mathcal{P}(A) \\ &\Leftrightarrow \quad f(D) \notin D. \end{aligned}$$

が成立し, 矛盾を孕む. □

事実 34

基数全体からなる集まり (クラス) を Card とと書く．このとき次の性質を持つ:

イ．真クラスである (集合ではない),

ロ．$\alpha \in \mathrm{Card}$ ならば $\alpha \in \beta$ となる $\beta \in \mathrm{Card}$ が存在する,

ハ．Card は $\in$-整列である,

ニ．ω は可算無限基数である,

ホ．すべての無限基数は極限順序数である．

事実 34

基数全体からなる集まり (クラス) を Card とと書く．このとき次の性質を持つ:

イ．真クラスである (集合ではない),

ロ．$\alpha \in \mathrm{Card}$ ならば $\alpha \in \beta$ となる $\beta \in \mathrm{Card}$ が存在する,

ハ．Card は $\in$-整列である,

ニ．ω は可算無限基数である,

ホ．すべての無限基数は極限順序数である．

定義 35

Card は $\in$-整列であるので, 次が定義出来る:

i. ω_1 は最小の不可算基数である, $\omega_1 = \min\{\alpha \in \mathrm{Card}\,;\, \alpha \ni \omega\}$,

ii. ω_{n+1} は最小の ω_n より大きい基数である $(n \in \omega)$.

定義 36

無限順序数 α に対して, 共終数 *(cofinality)* $\mathrm{cf}(\alpha)$ は次を満たす順序数の中で最小の基数 κ である:

$$\text{函数 } f\colon \kappa \to \alpha \text{ が存在して, } \sup\{f(\xi)\,;\,\xi \in \kappa\} = \alpha \text{ である.}$$

基数 α が $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ のとき 正則 *(regular)* といい, $\mathrm{cf}(\alpha) \in \alpha$ のとき 特異基数 *(singular)* という.

定義 36

無限順序数 α に対して, 共終数 *(cofinality)* $\mathrm{cf}(\alpha)$ は次を満たす順序数の中で最小の基数 κ である:

$$\text{函数 } f\colon \kappa \to \alpha \text{ が存在して, } \sup\{f(\xi)\,;\,\xi \in \kappa\} = \alpha \text{ である.}$$

基数 α が $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ のとき 正則 *(regular)* といい, $\mathrm{cf}(\alpha) \in \alpha$ のとき 特異基数 *(singular)* という.

事実 37

α を無限順序数とする.

a. $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$ が成立する,

b. $\omega \le \mathrm{cf}(\alpha) \le |\alpha| \le \alpha$ が成立する.

定理 38

鳩ノ巣原理有限個の集合 $A_0, \cdots A_{n-1}$ に対して, $A = \cup\{A_i\,;\, i < n\}$ が無限集合であるとき, すくなくとも一つの A_i は無限集合である.

定理 39

κ を正則基数とする. 集合族 $\mathcal{A}$ が次を満たすとき,

i 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して, $|A| \in \kappa$,

ii $|\mathcal{A}| \in \kappa$.

このとき, $|\cup \mathcal{A}| \in \kappa$.

定義 40

順序数 γ に対して, 次を定める:

i. $\aleph_0 = \omega$ ($\gamma = 0$ のとき),
ii. $\aleph_{\alpha+1} = \cap\{\beta\,;\, \aleph_\alpha \in \beta\}$ ($\alpha = \gamma + 1$ が後続順序数であるとき),
iii. $\aleph_\gamma = \cup\{\alpha_\beta\,;\, \beta \in \gamma\}$ (γ が極限順序数のとき).

定理 41

順序数 α に対して, $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$ が成立し, 極限順序数 γ に対して, $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) = \mathrm{cf}(\gamma)$ が成立する.

Proof.

ここでは, 極限順序数 γ のときを証明する.

定義と主張

$\mathrm{cf}(\alpha) \leq \kappa$ ならば, $\langle \alpha_\xi \in \alpha\,;\, \xi \in \kappa \rangle$ が存在して, $\alpha = \bigcup\{\alpha_\xi\,;\, \xi \in \kappa\}$.

$\aleph_\gamma = \bigcup\{\aleph_\beta\,;\, \beta \in \gamma\}$, $\qquad \mathrm{cf}(\alpha_\gamma) = \mathrm{cf}(\gamma)$

つづき.

$\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leq \mathrm{cf}(\gamma) =: \kappa$ を示す.
列 $\langle \beta_\xi \in \xi\,;\, \beta \in \kappa \rangle$ を $\bigcup\{\beta_\xi\,;\, \xi \in \kappa\} = \gamma$ を満たすように取る.
このとき, $\bigcup\{\aleph_{\xi_\gamma}\,;\, \gamma \in \kappa\} = \aleph_\gamma$ が成立するので, $\leq$ が示せる.

$\square$

定義と主張

$\mathrm{cf}(\alpha) \leq \kappa$ ならば, $\langle \alpha_\xi \in \alpha\,;\, \xi \in \kappa \rangle$ が存在して, $\alpha = \bigcup\{\alpha_\xi\,;\, \xi \in \kappa\}$.

$\aleph_\gamma = \bigcup\{\aleph_\beta\,;\, \beta \in \gamma\}$, $\qquad\qquad \mathrm{cf}(\alpha_\gamma) = \mathrm{cf}(\gamma)$

つづき.

$\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leq \mathrm{cf}(\gamma) =: \kappa$ を示す.
列 $\langle \beta_\xi \in \xi\,;\, \beta \in \kappa \rangle$ を $\bigcup\{\beta_\xi\,;\, \xi \in \kappa\} = \gamma$ を満たすように取る.
このとき, $\bigcup\{\aleph_{\xi_\gamma}\,;\, \gamma \in \kappa\} = \aleph_\gamma$ が成立するので, $\leq$ が示せる.
$\kappa := \mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \geq \mathrm{cf}(\gamma)$ を示す.
列 $\langle \beta_\xi \in \aleph_\gamma\,;\, \xi \in \kappa \rangle$ を $\bigcup\{\beta_\xi\,;\, \xi \in \kappa\} = \aleph_\gamma$ を満たすように取る.
各 $\xi \in \kappa$ に対して, $\gamma_\xi \in \gamma$ を $\xi \in \aleph_{\gamma_\xi}$ となるように選択する.
このとき, $\bigcup\{\gamma_\xi\,;\, \xi \in \kappa\} = \gamma$ が成立するので, $\geq$ が示せる. □

定義 42

群 $G_0 = \langle G_0, \cdot_{G_0}, \mathrm{id}_{G_0} \rangle, G_1 = \langle G_1, \cdot_{G_1}, \mathrm{id}_{G_1} \rangle$ と 群準同型写像 $\varphi\colon G_0 \to G_1$ とする．核 *(kernel)* とは，

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{ g \in G_0\,;\, \varphi(g) = \mathrm{id}_{G_1} \}$$

さらに，写像 $\ker\varphi\colon\ \mathrm{Ker}\,\varphi \to G_0$ を $g \mapsto g$ で定める．

事実 43

任意の群 H と群準同型写像 $\psi\colon H \to G_0$ に対して，$\varphi \circ \psi = 0$ ならば，一意的な $\psi'\colon H \to \ker\varphi$ が存在し，$\ker\varphi \circ \psi' = \psi$ を満たす:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,\varphi \arrow[r, "\ker\varphi"] & G_0 \arrow[r, "\varphi"] & G_1 \\
H \arrow[u, dotted, "\psi'"] \arrow[ur, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

また，$\langle \mathrm{Ker}\,\varphi, \ker\varphi \rangle$ は上の性質を満たす群および準同型写像である．

定義 44 (Hom-functor)

A を群とする．群 G と群準同型写像 $\varphi\colon G \to H$ に対して，次を定める：

1. $\mathrm{Hom}(A, G) = \{\psi\colon A \to G\,;$ 「ψ は群準同型」$\}$,
2. $\mathrm{Hom}(A, \varphi)\colon \mathrm{Hom}(A, G) \to \mathrm{Hom}(A, H); \psi \mapsto \varphi \circ \psi$.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi\circ\psi"] & \\ \mathrm{Hom}(A, G) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}(A,\varphi)"] & & \mathrm{Hom}(A, H) \end{tikzcd}$$

定理 45

$\mathrm{Hom}(A, -)$ 函手は核を保存する．すなわち，群準同型写像 $\varphi\colon G_0 \to G_1$ に対して，

$$\operatorname{Ker} \mathrm{Hom}(A, \varphi) = \mathrm{Hom}(A, \ker \varphi)$$

を満たす．

[Kun11] Kenneth Kunen.
Set theory, volume 34 of *Studies in Logic (London)*.
College Publications, London, 2011.

[Mac71] Saunders MacLane.
Categories for the working mathematician, volume Vol. 5 of *Graduate Texts in Mathematics*.
Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.

[Wil04] Stephen Willard.
General topology.
Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004.
Reprint of the 1970 original [Addison-Wesley, Reading, MA; MR0264581].