diffeology の微分形式

ちょーさん

2024/10/20

Q. diffeology とは？

A. 「微分構造」のこと

微分構造といえば普通は多様体を考える.

定義 1.1 (微分多様体)

M をハウスドルフ空間として，写像の族 $\Phi = \{\varphi_\lambda \colon U_\lambda \to U'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が次の条件を満たしているとする.

(1) 各 $\lambda \in \Lambda$ について U_λ は M の開集合，U'_λ は $\mathbb{R}^m$ の開集合で $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \to U'_\lambda$ は同相写像である.

(2) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は M の開被覆である.

(3) 各 $\lambda, \mu \in \Lambda$ について以下の関数が滑らかである.

$$(\varphi_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu}) \circ (\varphi_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu})^{-1} \colon \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

このとき組 (M, Φ) を滑らかな m 次元微分多様体という.

introduction

しかし，多様体の概念は「キモい」

- まず定義がテクニカルすぎる
- 部分多様体とかの定義もテクニカル
- 商とか和とかとれない
- とくに多様体の圏は性質が悪い
- そもそも有限次元しか扱えないのが不便

よってより自然な微分構造概念を考えたい

$\Rightarrow$ 多様体の一般化として diffeology を考える

diffeology の定義

多様体では微分構造として「座標近傍系」を考えたが，それに倣って diffeology では「plot 系」を考える．

定義 2.1 (diffeology)

X を集合とする．ユークリッド空間の開集合からの写像の集合 $\mathcal{D}^X$ が以下を満たすとき $\mathcal{D}^X$ を X 上の *diffeology* という．

(1) 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ からの任意の *constant map* $P \colon U \to X$ について $P \in \mathcal{D}^X$

(2) $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合として，任意の $P \colon U \to X \in \mathcal{D}^X$ と $f \colon V \to U \in C^\infty(V, U)$ について $P \circ f \colon V \to X \in \mathcal{D}^X$

(3) $U_i \subset \mathbb{R}^n$ を開集合の族として，任意の $P \colon \cup_i U_i \to X$ について $\forall i \ P|_{U_i} \colon U_i \to X \in \mathcal{D}^X$ ならば $P \in \mathcal{D}^X$

$\mathcal{D}^X$ が X 上の *diffeology* のとき組 $(X, \mathcal{D}^X)$ を *diffeological space* という．このとき $\mathcal{D}^X$ の元を X の *plot* と呼ぶ．

例 2.2 (多様体の diffeology)

M を多様体とする．このとき

$$\mathcal{D}^M = \{P\colon U \to M \mid \exists n \in \mathbb{N}\ U \subset \mathbb{R}^n \textit{ is open}, P \textit{ is smooth}\}$$

とするとこれは M 上の *diffeology* である．

例 2.3 (diffeological space の位相)

$(X, \mathcal{D}^X)$ を *diffeological space* とする．このとき

$$\mathcal{O}^X = \{O \subset X \mid \forall P\colon U \to X \in \mathcal{D}^X\ P^{-1}(O) \textit{ is open in } U\}$$

とするとこれは X 上の開集合系を定める．

smooth map

diffeological space の間の写像には smooth 性が定義できる．

定義 2.4 (smooth map)

$(X, \mathcal{D}^X), (Y, \mathcal{D}^Y)$ を *diffeological space* とする．写像 $f\colon X \to Y$ が以下を満たすとき写像 f は *smooth* であるという．

$$\forall P \in \mathcal{D}^X \ \ f \circ P \in \mathcal{D}^Y$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "P"] \arrow[dr, dashed, "f \circ P"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

diffeological space を対象，smooth map を射として圏が定まる．この圏を **Diff** と書く．

smooth map

例 2.5

M, N を多様体とする．このとき写像 $f\colon M \to N$ は滑らかならば *smooth* である．

例 2.6

$(X, \mathcal{D}^X), (Y, \mathcal{D}^Y)$ を *diffeological space* とする．このとき写像 $f\colon X \to Y$ は *smooth* ならば連続である．

とくに以下のような関手が考えられる．

$$\mathbf{Mfd} \xrightarrow{m} \mathbf{Diff} \xrightarrow{D} \mathbf{Top}$$

誘導 diffeology

部分空間への diffeology の誘導が考えられる.

定義 2.7 (sub-diffeology)

$(X, \mathcal{D}^X)$ は *diffeological space* で $A \subset X$ は部分集合とする．このとき $\iota\colon A \to X$ を包含写像として

$$\mathcal{D}^A = \{P\colon U \to A \mid \iota \circ P \in \mathcal{D}^X\}$$

とおくとこれは A 上の *diffeology* である．$\mathcal{D}^A$ を $\mathcal{D}^X$ の *sub-diffeology* といい $(A, \mathcal{D}^A)$ を $(X, \mathcal{D}^X)$ の *diffeological subspace* という.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\iota"] \\
U \arrow[ur, "P"] \arrow[r, dashed, "\iota \circ P"'] & X
\end{tikzcd}$$

誘導 diffeology

商空間への diffeology の誘導が考えられる．

定義 2.8 (quotient diffeology)

$(X, \mathcal{D}^X)$ は *diffeological space* で $\sim$ は X 上の同値関係とする．このとき $\pi \colon X \to X/\sim$ を商射影として

$$\forall u \in U \;\; u \in \exists V \subset U \colon \textit{open} \; \exists Q \colon V \to X \in \mathcal{D}^X \;\; P|_V = \pi \circ Q$$

を満たす写像 $P \colon U \to X/\sim$ 全体の集合を $\mathcal{D}^{X/\sim}$ とおくとこれは $X/\sim$ 上の *diffeology* である．$\mathcal{D}^{X/\sim}$ を $\mathcal{D}^X$ の *quotient diffeology* という．

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "Q"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, "P"'] & X/\sim \end{tikzcd}$$

difeological space の微分形式

difeological space における微分形式概念として色々なものが提案されている．今回はそのうちで Souriau により定義された微分形式を紹介する．

定義 3.1

$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，X を *diffeological space*，p を自然数とする．

(1) X の *plot* の集合 $\mathcal{D}^X(U)$ を次で定める．

$$\mathcal{D}^X(U) = \{P \colon U \to X \mid P \text{ は } \textit{plot}\}$$

(2) U 上 *standard form* の集合 $\wedge^p(U)$ を次で定める．

$$\wedge^p(U) = \left\{ \sigma \colon U \to \wedge^p\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R}dx_i\right) \middle| \sigma \text{ は } \textit{smooth} \right\}$$

difeological space の微分形式

$\mathcal{D}^X$ と $\wedge^p$ は以下のように反変関手とみなせる．次の圏を考える．

$\mathbf{Euc}$ ：Euclid 空間の開集合と smooth な写像の圏

$\mathbf{Set}$ ：集合と写像の圏

このとき $\mathcal{D}^X$ と $\wedge^p$ はこれらの圏の間の反変関手となっている．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Euc}^{\mathrm{op}} \arrow[rr, bend left, "\mathcal{D}^X"] \arrow[rr, bend right, "\wedge^p"'] & & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

なお射の対応はどちらも smooth map による引き戻しで与える．

difeological space の微分形式

定義 3.2 (form)

X を *diffeological space*, p を自然数とする．自然変換 $\omega\colon \mathcal{D}^X \Rightarrow \wedge^p$ を X 上の *p-form* という．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Euc}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left, "\mathcal{D}^X"] \arrow[r, bend right, "\wedge^p"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\omega"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

X 上の p-*form* 全体の集合を $\Omega^p(X)$ と書く．

つまり X 上の p-form ω は各開集合 $U \in \mathbf{Euc}$ に対して

$$\omega_U\colon \mathcal{D}^X(U) \to \wedge^p(U)$$

が与えられて自然性を満たすものである．

多様体の場合

多様体 M の p-形式 ω とは滑らかな切断 $\omega\colon M \to \wedge^p T^*M$ のことだった.
このとき局所座標 $(\varphi\colon U \to U')$ ごとに ω は standard form

$$\omega_\varphi\colon U' \to \wedge^p\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R}dx_i\right)$$

を与えているとみなせる.
さらにこのような局所的な form の与え方は M での座標変換に対して" 自然に" 振る舞う, つまり全体に貼り合うのだった.

多様体の場合

逆に，局所座標 $(\varphi\colon U \to U')$ ごとにこのような standard form ω_φ を与えて座標変換で貼り合うとする．つまり，同相写像 $f\colon V' \to U'$ に対して $\psi = f^{-1} \circ \varphi\colon U \to V'$ は新たな局所座標となるが，これに対し $\omega_\varphi = \omega_\psi \circ f$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
V' \arrow[rr, "f"] & & U' \\
& U \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
V' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\omega_\psi"'] & & U' \arrow[dl, "\omega_\varphi"] \\
& \wedge^p \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R} dx_i\right) &
\end{tikzcd}
$$

このとき $\{\omega_\varphi\}_\varphi$ は M 上の微分形式 ω を与える．

外微分

Souriau-de Rham 複体に外微分 $d\colon \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X)$ を定義する．
standard form には通常の外微分が定義されていた．

定義 3.3 (外微分)

X を diffeological space，p を自然数とする．次で定まる写像 $d\colon \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X)$ を外微分という．

$$(d\omega)_U = d \circ \omega_U \qquad (\omega \in \Omega^p(X), U \in \mathbf{Euc})$$

つまり外微分の form は

$$(d\omega)_U(P) = d\left(\omega_U(P)\right)$$

で与えられる．

外微分

diffeological space X に対して $\Omega^p(X)$ の直和を $\Omega^*(X)$ と書く.

$$\Omega^*(X) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Omega^p(X)$$

これに外微分 d を備えた $(\Omega^*(X), d)$ を X の Souriau-de Rham 複体という.

定理 3.4

diffeological space X に対して以下が成り立つ.

(1) d は $\mathbb{R}$ 線形写像

(2) $\omega \in \Omega^0(X)$ と $P \in \mathcal{D}^X(U)$ に対して $d\omega_U(P)$ は全微分

(3) $\omega \in \Omega^p(X), \tau \in \Omega^*(X)$ に対して $d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau$

(4) $dd = 0$

de Rham cohomology

この定理より Souriau-de Rham 複体は一つの DGA であり，そのコホモロジーが定義できる.

定義 3.5

diffeological space X に対して

$$H^*_{dR}(X) = \mathrm{Ker}\, d / \mathrm{Im}\, d$$

を X の *de Rham cohomology* という.

定理 3.6

diffeological space X に対して以下が成り立つ.

(1) $\Omega^0(X) \cong C^\infty(X, \mathbb{R})$

(2) $H^0_{dR}(X) \cong \mathrm{Map}(\pi_0^\infty(X), \mathbb{R})$

ただし $\pi_0^\infty(X)$ は X の *smooth path-connected component* 全体の集合.

form の引き戻し

多様体の場合と同様に Souriau-de Rham 複体でも smooth map による引き戻しが定義できる.

定義 4.1 (引き戻し)

diffeological space の間の *smooth map* $f\colon X \to Y$ に対し，写像 $f^*\colon \Omega^*(Y) \to \Omega^*(X)$ を次で定義する．:
$\omega \in \Omega^*(Y), U \in \mathbf{Euc}, P \in \mathcal{D}^X(U)$ に対し

$$(f^*\omega)_U(P) = \omega_U(P) \circ f$$

X 上の *form* $f^*\omega$ を Y 上の *form* ω の f による引き戻し *(pullback)* という.

form の引き戻し

定理 4.2 (引き戻しの性質)

diffeological space の間の *smooth map* $f\colon X \to Y$ に対して以下が成り立つ.

(1) f^* は $\mathbb{R}$ 線形写像

(2) $\omega \in \Omega^*(X), \tau \in \Omega^*(X)$ に対して $f^*(\omega \wedge \tau) = f^*\omega \wedge f^*\tau$

(3) $f^* \circ d = d \circ f^*$

とくに smooth map f に対して f^* は DGA-map である.

位相空間の等化写像にあたるものが diffeology でも定義できる.

定義 4.3 (subduction)

diffeological space の間の全射な *smooth map* $f\colon X \to Y$ に対し，次が成り立つとき f を *subduction* という. *:*
開集合 $U \in \mathbf{Euc}$ と写像 $P\colon U \to Y$ に対し

$$P \in \mathcal{D}^Y \;\Leftrightarrow\; \forall u \in U\ u \in \exists V \subset U\colon \textit{open}\ \exists Q\colon V \to X \in \mathcal{D}^X\ P|_V = f \circ Q$$

smooth map f が subduction であることは f が商射影であることと同値.

subduction

subduction の性質として以下が成り立つ.

定理 4.4

subduction $f\colon X \to Y$ に対し，引き戻し $f^*\colon \Omega^*(Y) \to \Omega^*(X)$ は単射.

定理 4.5

subduction $f\colon X \to Y$ と *form* $\alpha \in \Omega^*(X)$ に対し，以下は同値.

(1) $\exists \beta \in \Omega^*(Y)\ \alpha = f^*\beta$

(2) $\forall P, Q\colon U \to X \in \mathcal{D}^X\ \ f \circ P = f \circ Q \Rightarrow \alpha_U(P) = \alpha_U(Q)$

diffeological bundle

diffeology におけるファイバー束の概念を定義する.

定義 4.6 (diffeological bundle)

X, Y, F を *diffeological space*, $p\colon X \to Y$ を *smooth map* とする．次が成り立つとき p を F をファイバーとする *diffeological bundle* という．:
任意の *plot* $P\colon U \to Y \in \mathcal{D}^Y$ に対して P に沿った p の *pullback* $\bar{p}$ が F をファイバーとする局所自明性をもつ.

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y U & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle \bar{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \underset{P}{\longrightarrow} & Y \end{array}$$

定理 4.7 (HLP)

$p\colon X \to Y$ を *diffeological bundle* とする．*smooth map* からなる以下の実線部分の図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{(\mathrm{id},0)}"'] & X \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & Y
\end{tikzcd}$$

に対して点線の *smooth map* $\tilde{H}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to X$ が存在して
$f = \tilde{H} \circ (\mathrm{id}, 0)$, $H = p \circ \tilde{H}$ となる．

diffeological group

定義 4.8 (diffeological group)

群 G が *diffeological space* でもあり，群の積と逆元が *smooth* であるとき G を *diffeological group* という．

diffeological group は多様体における Lie 群，位相空間における位相群の類似であり，diffeological space の圏の群対象である．

定理 4.9

diffeological group G とその部分群 H に対して，$H \to G \to G/H$ は *diffeological bundle* である．

de Rham の定理

定理 5.1 (de Rham の定理)

向き付きコンパクト多様体 M に対して，その（通常の）*de Rham* コホモロジーと $\mathbb{R}$ 係数特異コホモロジーは同型である．

$$H^*_{dR}(M) \cong H^*(M;\mathbb{R})$$

多様体ではこの de Rham の定理が成り立つが diffeological space の Souriau-de Rham 複体ではこれは成り立たないことが知られている．
以下では実際にこの反例をみていく．

smooth singular complex

準備として diffeology で扱いやすいように smooth な特異複体を定義しておく．通常の特異単体が $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ からの写像であることに注意する．

定義 5.2 (smooth singular chain complex)

X を基点つき *diffeological space* とするとき，集合

$$S_n(X) = \mathbb{R}C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, X)/\langle \mathrm{const}_* \rangle$$

を（$\mathbb{R}$ 係数の）n 次の基点つき *smooth singular chain complex* という．
これは写像 $\partial\colon S_{n+1}(X) \to S_n(X)$ を $\sigma \in S_{n+1}(X)$ に対して

$$\partial\sigma = \sum_i (-1)^i \sigma(t_0, \cdots, t_i, 0, t_{i+1}, \cdots, t_n + 1)$$

と定めることで *chain complex* をなす．

smooth singular complex

chain complex が定義されればその双対として cochain complex も定義される.

定義 5.3 (smooth singular cochain complex)

X を基点つき *diffeological space* とするとき，集合

$$S^n(X) = (S_n(X))^*$$

を（$\mathbb{R}$ 係数の）n 次の基点つき *smooth singular cochain complex* という. これは写像 $d\colon S_n(X) \to S_{n+1}(X)$ を $d = \partial^*$ と定めることで *cochain complex* をなす.

cochain complex なので自然にコホモロジーが定義できる.

$$H^*(X) = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$$

これを de Rham コホモロジーと比較することにする.

irrational torus

以降では無理数 $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ を一つ固定して話を進める.
2 次元トーラス $\mathbb{T}^2$ は $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で構成される Lie 群なのだった．さらに部分集合 $R_\theta \subset \mathbb{T}^2$ を

$$R_\theta = \{(x, \theta x) \mid x \in \mathbb{R}\}/\mathbb{Z}^2$$

とするとこれは $\mathbb{T}^2$ の部分群である.

定義 5.4 (irrational torus)

diffeological space $\mathbb{T}^2_\theta$ を以下で定義する.

$$\mathbb{T}^2_\theta = \mathbb{T}^2/R_\theta$$

diffeology は射影 $\pi\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2_\theta$ が *subduction* となるように入れる.

ここからはこの irrational torus $\mathbb{T}^2_\theta$ が de Rham の定理の反例となることを示す.

irrational torus の smooth singular cohomology

irrational torus $\mathbb{T}^2_\theta$ の smooth singular cohomology は以下の Fact を用いることで計算できる.

命題 5.5

基点付き *diffeological bundle* $F \to X \to Y$ について

$$0 \to S_*(F) \to S_*(X) \to S_*(Y) \to 0$$

は短完全列である.

この命題から簡単なホモロジー代数の議論により以下の長完全列が得られることがわかる.

$$\cdots \to H^n(Y) \to H^n(X) \to H^n(F) \to H^{n+1}(Y) \to \cdots$$

irrational torus の smooth singular cohomology

$\mathbb{T}^2_\theta$ に関する次の"diffeological bundle"を考える.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\iota} \mathbb{T}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2_\theta$$

ここで ι は $\iota(x) = (x, \theta x)$ で与えられる．前命題より長完全列

$$\cdots \longrightarrow H^n\left(\mathbb{T}^2_\theta\right) \xrightarrow{\pi^*} H^n\left(\mathbb{T}^2\right) \xrightarrow{\iota^*} H^n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}\left(\mathbb{T}^2_\theta\right) \longrightarrow \cdots$$

を得る．$H^n(\mathbb{R})$ が（ほぼ）消えることに注意すれば

$$H^*\left(\mathbb{T}^2_\theta\right) \cong H^*(\mathbb{T}^2) \cong \wedge(t_1, t_2)$$

がわかる.

irrational torus の de Rham cohomology

de Rham cohomology が計算しやすいように irrational torus の別の表示を与える．$\mathbb{R}$ の部分群として $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ を考える．

命題 5.6

以下の *diffeomorphism* がある．

$$\mathbb{T}^2_\theta \cong \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z})$$

proof) 写像 $\varphi \colon \mathbb{T}^2/R_\theta \to \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z})$ を

$$\varphi([x, y]) = [y - \theta x]$$

写像 $\psi \colon \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}) \to \mathbb{T}^2/R_\theta$ を

$$\psi([x]) = [0, x]$$

とすればこれらは smooth で互いに逆写像を与えることがわかる．□

irrational torus の de Rham cohomology

次の補題が今回の最重要補題になる.

補題 5.7

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ を *dense* な部分群とする．このとき *subduction* $\pi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$ は *DGA* 同型

$$\pi^* \colon \Omega^*(\mathbb{R}^n/\Gamma) \xrightarrow{\sim} (\wedge^* \mathbb{R}^n, d \equiv 0)$$

を誘導する.

proof) 定理 4.4 より $\pi^* \colon \Omega^*(\mathbb{R}^n/\Gamma) \to \Omega^*(\mathbb{R}^n)$ は単射なので
$\operatorname{Im} \pi^* = \operatorname{Ker} d$ を示せばよい.
このうち $\operatorname{Im} \pi^* \subset \operatorname{Ker} d$ を示すには form $\alpha \in \Omega^*(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ と plot
$P \colon U \to \mathbb{R}^n$ に対して $a = \pi^* \alpha$ が constant form であること，即ち

$$a_U(P)(u) = \sum_I a_I^P(u) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

と表示したときに各係数関数 a_I^P が定数であることを示せばよい.

irrational torus の de Rham cohomology

[Step1] まず $P = \mathrm{id}$ の場合を示す．このとき $U = \mathbb{R}^n$ であることに注意.
任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して写像

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x + \gamma \end{aligned}$$

を考えると，これは $\mathbb{R}^n/\Gamma$ 上不変な変換である．そこでこの写像について $a \in \Omega^*(\mathbb{R}^n)$ の自然性を用いることで

$$a_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{id})(x + \gamma) = a_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{id})(x)$$

つまり $a_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{id})$ が Γ 不変な form であることがわかる.
Γ は $\mathbb{R}^n$ 上 dense であることから Γ 不変な form は constant である.

[Step2] P が一般の plot の場合を示す．このときは $P\colon U \to \mathbb{R}^n$ 自身について $a \in \Omega^*(\mathbb{R}^n)$ の自然性を用いることで

$$a_U(P) = a_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{id}) \circ P$$

となることがわかる．$a_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{id})$ は constant だったので $a_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{id}) \circ P$ も constant である.

以上により $\mathrm{Im}\,\pi^* \subset \mathrm{Ker}\,d$ が示された.

逆の包含 $\mathrm{Im}\,\pi^* \supset \mathrm{Ker}\,d$ を示すには定理 4.5 を用いる．plot $P, Q\colon U \to \mathbb{R}^n$ が $\pi \circ P = \pi \circ Q$ となっていると仮定しよう．このとき form $a \in \mathrm{Ker}\,d \subset \Omega^*(\mathbb{R}^n)$ について Step2 の議論から

$$a_U(P) = a_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{id}) \circ P$$
$$a_U(Q) = a_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{id}) \circ Q$$

となる．$da = 0$ より $a_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{id})$ は constant form なので $a_U(P) = a_U(Q)$ がわかる．よって $a \in \mathrm{Im}\,\pi^*$ である．□

irrational torus の de Rham cohomology

$\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ は dense な部分群なのでこの補題より DGA 同型

$$\Omega^*(\mathbb{T}^2_\theta) \cong \Omega^*(\mathbb{R}/(\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z})) \cong (\wedge^*\mathbb{R}, d \equiv 0)$$

がわかる．よってコホモロジーは

$$H^*_{dH}(\mathbb{T}^2_\theta) \cong \wedge^*\mathbb{R}$$

となる．
これは明らかに先に得た $H^*(\mathbb{T}^2_\theta) \cong \wedge(t_1, t_2)$ と同型でない．