

非線形シュレーディンガー方程式超入門、 あと私の研究とか

雑魚 PDE マン@kuzu_zacho

第 6 回 すうがく徒のつどい

目次

① 第一部：非線形シュレーディンガー方程式超入門

② 第二部：無限粒子系超入門

第一部：非線形シュレーディンガー方程式超入門

偏微分方程式とは

- 二次方程式…… $3x^2 + 4x + 1 = 0$ みたいなやつ。→未知「数」 x を求めたい
- 偏微分方程式 (PDE) = 多変数関数 u が満たす方程式。例：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ (ラプラス方程式)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ (熱方程式)}$$

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \text{ (シュレーディンガー方程式)}.$$

→未知「関数」 $u(x, y, z)$ または $u(t, x, y, z)$ を求めたい。

復習：偏微分とは。関数 $u(t, x, y, z)$ に対して、こんな感じで定義する：

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t, x + h, y, z) - u(t, x, y, z)}{h}.$$

PDE の様々な側面

PDE は、数学や自然科学の様々な場面で現れる。

例 1 熱方程式は熱が物質中を伝播する様子を記述する。

例 2 複素幾何の難しい問題がある非線形 PDE に帰着されるらしい。

- ▶ 詳しいことはすてふ@sgt_stephen3rd に質問するとよい。

PDE に対する態度 (数学の人からみた偏見込み) :

- 自然科学の人……PDE が現象をどのように予測・説明できるかに興味がある。
- 数値計算の人……どうすれば PDE を数値的に上手く解けるかに興味がある
- 数学の人……PDE を純粋に数学的な対象として取り扱うことに興味がある。

数学の一分野としてのPDE

数学の一分野としてPDEを研究することの難しさ

- あるPDEが(特定の条件の下で)解を持つかどうかは一般には自明ではない。
 - ▶ 物理学者は、「そのPDEは現象を記述しているのだから解があるに決まっている」と言うのかもしれないが……。
- また、解が存在したとしても、解を良く知られた関数で具体的に書き下すことは(特殊な状況を除いて)不可能である。そのため、解のより詳細な性質を厳密に証明することはしばしばとても難しくなる。
 - ▶ 例えば、静止した水面に外から力を加えなければ静止したままなのは明らかだが、これを数学的に証明しようとするると非自明な議論が必要になる。
 - ▶ ある温度の針金は外から熱を加えなければ同じ温度のままであるはずだが、数学的には何もしていないのにものすごい勢いで高温になることがあり得る。
 - ▶ その他、PDEの分野には、**実験的には知られているが数学的には証明できていない未解決問題**や**現実的にはありえないのに数学的にはあり得てしまう変な現象**が色々ある。

PDE の分類

PDE はいくつかのタイプに分類されており、それぞれの分類ごとに異なったアプローチで研究されていることが多い(ただし分類に縛られない研究もある)。

分類はつぎの二軸で考えると分かりやすい。

- ① 「線形」か「非線形」かによる分類(後で詳しく述べる)。
- ② 「型」による分類。最も典型的には、「楕円型」「放物型」「双曲型」「分散型」に分類される。
 - ▶ この分類は網羅的なものではない。例えば Navier–Stokes 方程式などは敢えてこの分類に入れず「流体力学由来の方程式」として別枠で扱われることが多いと思う。

例えば、講演者の専門は「非線形」「分散型」偏微分方程式です、ということになる。

本講演での問題設定

記号について. これまで空間座標を (x, y, z) と書いていたが、これからは $x = (x_1, x_2, x_3)$ と書く。偏微分の記号を次のようにおく：

$$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}, \quad \Delta := \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2 := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (1)$$

本講演では、次の非線形シュレーディンガー方程式 (NLS) の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = (w * |u|^2)u, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (\text{IVP})$$

- 未知関数は $u = u(t, x) : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \rightarrow \mathbb{C}$ であり、 w はある固定された関数。
- **初期値は関数** $u_0 : \mathbb{R}_x^3 \rightarrow \mathbb{C}$.
- 畳み込みを次のように定義する： $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^3} f(x-y)g(y)dy$.

方程式の背景

$$i\partial_t u + \Delta u = (w * |u|^2)u \quad (\text{NLS})$$

- ボース・アインシュタイン凝縮を記述する方程式。(※その他の解釈もあり得る。)
- $u(t, x)$ は (各時刻 t における) 波動関数、 w は相互作用を表す。
- 一般的な NLS の入門テキストでは、

$$i\partial_t u + \Delta u = \lambda|u|^{p-1}u$$

という方程式を考えることが多いと思う。

- ▶ (講演者の理解では) 物理的には (NLS) の方が自然である。
- ▶ 今日話す内容に関しては、どちらの方程式を扱っても大きな違いはない。
- ▶ 一般的な入門テキストと全く同じことを話してもなあ……みたいなところがある。

何が線形で何が非線形なのか

- **線形**シュレーディンガー方程式： $i\partial_t u + \Delta u = 0$

→左辺が未知関数 u の微分 $\partial_t u, \partial_{x_1}^2 u, \partial_{x_2}^2 u, \partial_{x_3}^2 u$ の一次結合で書けている。

▶ 復習： $\Delta := \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$ であった。

- **非線形**シュレーディンガー方程式： $i\partial_t u + \Delta u - (w * |u|^2)u = 0$

→左辺が未知関数 u の微分 $\partial_t u, \partial_{x_1}^2 u, \partial_{x_2}^2 u, \partial_{x_3}^2 u$ の一次結合で書けていない！

▶ $-(w * |u|^2)u$ という 3 次の項 (=非線形項) がある。

解の定義1：線形シュレーディンガー方程式を解く

まず、線形シュレーディンガー方程式の初期値問題を考えよう。

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

ここで、初期値 $u_0(x)$ はとても「良い」関数であると仮定する。
フーリエ変換を用いて PDE を ODE に帰着させる標準的な議論から、

$$u(t, x) = e^{it\Delta} u_0 := \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-it|\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi) \right]$$

となる。ここで、

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad (\text{フーリエ変換})$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi} f(\xi) d\xi, \quad (\text{逆フーリエ変換}).$$

※上の計算は自分で手を動かして確認すると良い

解の定義2：デュアメルを使う

デュアメルの原理を用いると、少なくとも形式的に

$$i\partial_t u + \Delta u + (w * |u|^2)u = 0$$

$$\iff u(t) = \Phi[u](t) := e^{it\Delta} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-t_1)\Delta} [(w * |u(t_1)|^2)u(t_1)] dt_1$$

が成り立つ (※自分で手を動かして確認してみよう)。

→単に $u(t, x)$ に対する方程式になった！そこで、右辺を解の定義とする。

定義

$T > 0$ とする。 $u(t) \in C([0, T]; L_x^2)$ が (NLS) の解であるとは、 $u(t) = \Phi[u](t)$ が ($C([0, T]; L_x^2)$ の意味で) 成り立つことである。

補足説明1：バナッハ空間

- 復習：和と複素数倍が定義されている空間を複素ベクトル空間と言うのだった (正確な定義を忘れた人は線形代数の教科書を復習すること)。
- 定義：次が成り立つとき、 $\|\cdot\|_X : X \rightarrow [0, \infty]$ は複素ベクトル空間 X 上のノルムであると言う。
 - ▶ (三角不等式) すべての $x, y \in X$ に対して、 $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$.
 - ▶ (斉次性) すべての $x \in X$ と $a \in \mathbb{C}$ に対して、 $\|ax\|_X = |a|\|x\|_X$.
 - ▶ (単射性) $\|x\|_X = 0 \iff x = 0$.
- 定義： $\|\cdot\|_X$ が X のノルムであるとき、 X を (正確には $(X, \|\cdot\|_X)$ を) ノルム空間と呼ぶ。
- ノルム空間 X が、ノルムの誘導する距離について完備であるとき、 X をバナッハ空間と呼ぶ。
 - ▶ ノルム空間 X は、 $d(x, y) := \|x - y\|_X$ で定義される距離によって距離空間になる。

補足説明2： L^p 空間

- 定義： $p \in [1, \infty]$ に対して $L_x^p := L^p(\mathbb{R}_x^3) := \{u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \mid \|u\|_{L_x^p} < \infty\}$ と定める。ここで

$$\|f\|_{L_x^p} := \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ if } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_x^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^3} |f(x)|.$$

- 定義：また、 $T > 0$ とバナッハ空間 X に対して次のように定義する：

$$C([0, T]; X) := \{u : [0, T] \rightarrow X \mid u \text{ は連続}\}, \quad \|u\|_{C([0, T]; X)} := \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

- 次の事実が成り立つ： L_x^p や $C([0, T]; L_x^p)$ などはすべてバナッハ空間。

補足：上のような空間を、関数空間と呼ぶ。

局所適切性について

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = (w * |u|^2)u \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (\text{IVP})$$

初期値問題において最初に調べるべき問題は**局所適切性** (LWP=Local Well-Posedness) である。

LWP とは、「**任意の初期値に対して解が一意的に存在し、初期値を少し動かしても解は少ししか動かないこと**」である。

上の表現では厳密性に欠けるので、今回は次のように LWP を定式化しよう：

- 任意の初期値 $u_0 \in L_x^2$ に対して、ある $T = T(\|u_0\|_{L_x^2}) > 0$ が存在し、(IVP) の一意な解 $u \in C([0, T]; L_x^2)$ が存在する。
- 任意の $R > 0$ に対して、解写像 $\mathbb{F} : \{u_0 \in L_x^2 \mid \|u_0\|_{L_x^2} \leq R\} \rightarrow C([0, T]; L_x^2)$ はリップシツ連続である。

命題 (縮小写像の原理)

X をバナッハ空間、 E を X の閉集合とする。 $\Phi : X \rightarrow X$ が次を満たすと仮定する：

- $\Phi(E) \subset E$.
- ある $c \in (0, 1)$ が存在して、すべての $u, v \in E$ に対して $\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_X \leq c\|u - v\|_X$ が成り立つ。

このとき、 $u = \Phi(u)$ となる $u \in E$ が一意に存在する。

縮小写像の原理を、 E を適切に選んだ上で、

$$\Phi[u](t) := e^{it\Delta} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-t_1)\Delta} [(w * |u(t_1)|^2)u(t_1)] dt_1$$

に適用するのが基本戦略である。

局所適切性の証明においては、多くの場合、 $\Phi(E) \subset E$ の証明が最も本質的である !!

$\Phi(E) \subset E$ であることを、「評価が閉じる」と呼ぶ。

ストリッカーズ評価を用いない LWP

命題

$w \in L_x^\infty$ ならば、次が成り立つ。任意の $u_0 \in L_x^2$ に対して、ある $T = T(\|u\|_{L_x^2})$ が存在して、(NLS) の一意な解 $u \in C([0, T]; L_x^2)$ が存在する。さらに、任意の $R > 0$ に対して、解写像 $\mathbb{F} : \{u \in L_x^2 : \|u_0\|_{L_x^2} \leq R\} \rightarrow C([0, T]; L_x^2)$ はリプシッツ連続である。

方針：縮小写像の原理を $X = C([0, T]; L_x^2)$, $E := \{u \in C([0, T]; L_x^2) \mid \|u\|_{C([0, T]; L_x^2)} \leq R\}$ かつ

$$\Phi[u](t) := e^{it\Delta} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-t_1)\Delta} [(w * |u(t_1)|^2)u(t_1)] dt_1$$

に適用することで、不動点 $u = \Phi[u]$ を求める。(T, R は後で定める !!)

証明のアイデア

最も本質的な部分である、 $\Phi(E) \subset E$ のみ示す。まず、次に注意：

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L_x^2} = \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-it|\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi) \right] \right\|_{L_x^2} = \left\| e^{-it|\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi) \right\|_{L_\xi^2} = \|\widehat{u}_0(\xi)\|_{L_\xi^2} = \|u_0\|_{L_x^2}.$$

従って、 $u \in E := \{u \in C([0, T]; L_x^2) \mid \|u\|_{C([0, T]; L_x^2)} \leq R\}$ であるとき、

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi[u]\|_{L_x^2} &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|e^{it\Delta} u_0\|_{L_x^2} + \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t e^{i(t-t_1)\Delta} [(w * |u(t_1)|^2)u(t_1)] dt_1 \right\|_{L_x^2} \\ &\leq \|u_0\|_{L_x^2} + \int_0^T \left\| e^{i(t-t_1)\Delta} [(w * |u(t_1)|^2)u(t_1)] \right\|_{L_x^2} dt_1 \\ &= \|u_0\|_{L_x^2} + \int_0^T \|(w * |u(t_1)|^2)u(t_1)\|_{L_x^2} dt_1. \end{aligned}$$

さて、ヘルダーの不等式

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \text{ のとき } \|fg\|_{L_x^r} \leq \|f\|_{L_x^p} \|g\|_{L_x^q}$$

およびヤングの畳み込み不等式

$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \text{ のとき } \|f * g\|_{L_x^r} \leq \|f\|_{L_x^p} \|g\|_{L_x^q}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \|(w * |u(t_1)|^2)u(t_1)\|_{L_x^2} &\leq \|w * |u(t_1)|^2\|_{L_x^\infty} \|u(t_1)\|_{L_x^2} \\ &\leq \|w\|_{L_x^\infty} \| |u(t_1)|^2 \|_{L_x^1} \|u(t_1)\|_{L_x^2} = \|w\|_{L_x^\infty} \|u(t_1)\|_{L_x^2}^3 \end{aligned}$$

である。従って、

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi[u]\|_{L_x^2} &\leq \|u_0\|_{L_x^2} + \|w\|_{L_x^\infty} \int_0^T \|u(t_1)\|_{L_x^2}^3 dt_1 \\ &\leq \|u_0\|_{L_x^2} + \|w\|_{L_x^\infty} T \left(\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L_x^2} \right)^3 = \|u_0\|_{L_x^2} + \|w\|_{L_x^\infty} TR^3. \end{aligned}$$

以上の議論から、

$$\|u\|_{C([0, T]; L_x^2)} \leq R \implies \|\Phi[u]\|_{C([0, T]; L_x^2)} \leq \|u_0\|_{L_x^2} + T\|w\|_{L_x^\infty} R^3$$

となることが分かった。そこで

$$R := 2(\|u_0\|_{L_x^2} + 1), \quad T = \frac{R}{2(\|w\|_{L_x^\infty} R^3 + 1)}$$

と定めると、

$$\|u\|_{C([0, T]; L_x^2)} \leq R \implies \|\Phi[u]\|_{C([0, T]; L_x^2)} \leq R$$

であることが分かった。これはまさに $\Phi(E) \subset E$ ということである。 □

問題点：

- $w \in L_x^\infty$ という強い要請が必要。
- 物理的には L_x^∞ に属さない w も多々ある。

ストリッカーズ評価

これまで空間3次元で議論してきたが、ここでは一般の d 次元空間におけるストリッカーズ評価を述べる。

Theorem (ストリッカーズ評価)

$d \geq 1$ は空間次元とする。 $p, q, \tilde{p}, \tilde{q} \in [2, \infty]$ が

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{2}{\tilde{p}} + \frac{d}{\tilde{q}} = \frac{d}{2}, \quad \text{ただし } (d, p, q), (d, \tilde{p}, \tilde{q}) \neq (2, 2, \infty)$$

を満たすとする。このとき、任意の $T \in [0, \infty]$ に対して次が成立する。

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L_t^p([0, T]; L_x^q)} \leq C_d \|u_0\|_{L_x^2}, \quad \left\| \int_0^t e^{i(t-t_1)\Delta} u(t_1) dt_1 \right\|_{L_t^p([0, T]; L_x^q)} \leq C_d \|u\|_{L_t^{\tilde{p}'}([0, T]; L_x^{\tilde{q}'})}$$

- $p \in [0, \infty]$ に対して、 $p' \in [1, \infty]$ を $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ で定める。
- $\|u\|_{L_t^p L_x^q} := \left\| \|u(t, x)\|_{L_x^q} \right\|_{L_t^p}$ と定義する (先に L_x^q ノルムを取り、後で L_t^p ノルムを取る)。

ストリッカーズ評価を用いた LWP

命題

ある $p \in (6/5, \infty]$ があって $w \in L_x^p$ ならば、次が成り立つ。任意の $u_0 \in L_x^2$ に対して、ある $T = T(\|u\|_{L_x^2})$ が存在して、(NLS) の一意な解 $u \in C([0, T]; L_x^2)$ が存在する。さらに、任意の $R > 0$ に対して、解写像 $\mathbb{F} : \{u \in L_x^2 : \|u_0\|_{L_x^2} \leq R\} \rightarrow C([0, T]; L_x^2)$ はリプシッツ連続である。

方針：指数の計算を追いやすくするため、 $p = \frac{3}{2} > \frac{6}{5}$ とする。※ $\frac{3}{2}$ に深い意味はない。
縮小写像の原理を $E := \{u \mid \|u\|_{C([0, T]; L_x^2)} + \|u\|_{L_t^4([0, T]; L_x^3)} \leq R\}$ かつ

$$\Phi[u](t) := e^{it\Delta} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-t_1)\Delta} [(w * |u(t_1)|^2)u(t_1)] dt_1$$

に適用することで、不動点 $u = \Phi[u]$ を求める。(T, R は後で定める !!)

証明のアイデア

最も本質的な部分である、 $\Phi(E) \subset E$ のみ示す。 $u \in E$ とすると、ストリックーツ評価から

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi[u]\|_{L_x^2} &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|e^{it\Delta} u_0\|_{L_x^2} + \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t e^{i(t-t_1)\Delta} [(w * |u(t_1)|^2)u(t_1)] dt_1 \right\|_{L_x^2} \\ &\leq \|u_0\|_{L_x^2} + C \|(w * |u|^2)u\|_{L_t^{4/3}([0, T]; L_x^{3/2})}. \end{aligned}$$

ヘルダーの不等式とヤングの畳み込み不等式から、

$$\begin{aligned} \|(w * |u|^2)u\|_{L_t^{4/3}([0, T]; L_x^{3/2})} &\leq \|w * |u|^2\|_{L_t^{4/3}([0, T]; L^6)} \|u\|_{C([0, T]; L_x^2)} \\ &\leq \|w\|_{L_x^{3/2}} \| |u|^2 \|_{L_t^{4/3}([0, T]; L_x^2)} \|u\|_{C([0, T]; L_x^2)} \\ &\leq \|w\|_{L_x^{3/2}} \|u\|_{L_t^{8/3}([0, T]; L_x^4)}^2 \|u\|_{C([0, T]; L_x^2)} \leq T^\varepsilon \|w\|_{L_x^{3/2}} \|u\|_{L_t^3([0, T]; L_x^4)}^2 \|u\|_{C([0, T]; L_x^2)} \end{aligned}$$

を得る。ここで $\varepsilon = \frac{1}{26} > 0$.

同様に、ストリッカーズ評価から、

$$\begin{aligned} \|\Phi[u]\|_{L_t^4([0, T]; L_x^3)} &\leq \|e^{it\Delta} u_0\|_{L_t^4([0, T]; L_x^3)} + \left\| \int_0^t e^{i(t-t_1)\Delta} [(w * |u(t_1)|^2)u(t_1)] dt_1 \right\|_{L_t^4([0, T]; L_x^3)} \\ &\leq C\|u_0\|_{L_x^2} + CT^\varepsilon \|w\|_{L_x^{3/2}} \|u\|_{L^3([0, T]; L_x^4)}^2 \|u\|_{C([0, T]; L_x^2)}. \end{aligned}$$

以上から、 $u \in E$ ならば

$$\begin{aligned} &\|\Phi[u]\|_{C([0, T]; L_x^2)} + \|\Phi[u]\|_{L_t^4([0, T]; L_x^3)} \\ &\leq C\|u_0\|_{L_x^2} + CT^\varepsilon \|w\|_{L_x^{3/2}} \|u\|_{L^3([0, T]; L_x^4)}^2 \|u\|_{C([0, T]; L_x^2)} \\ &\leq C\|u_0\|_{L_x^2} + CT^\varepsilon \|w\|_{L_x^{3/2}} R^3. \end{aligned}$$

従って、 R と T を

$$R := 2C(\|u_0\|_{L_x^2} + 1), \quad T := \frac{R}{2^{1/\varepsilon}(C\|w\|_{L_x^{3/2}} R^3 + 1)^{1/\varepsilon}}$$

で定めれば、

$$\|u\|_{C([0, T]; L_x^2)} + \|u\|_{L_t^4([0, T]; L_x^3)} \leq R \implies \|\Phi[u]\|_{C([0, T]; L_x^2)} + \|\Phi[u]\|_{L_t^4([0, T]; L_x^3)} \leq R. \quad \square$$

第一部のまとめ

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = (w * |u|^2)u, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (\text{IVP})$$

ここまでの議論をまとめると：

- ストリッカーツ評価を使わなければ、素直に議論すると $w \in L_x^\infty$ の場合しか LWP が示せなかった。
- しかし、物理的に重要な w は L_x^∞ に属さないこともある。
- ストリッカーツ評価を用いると、 $w \in L_x^p$ (ただし $p \in (\frac{6}{5}, \infty]$) に対して LWP が言えた。

進んだ注意：

- 物理的には、 $w = \delta$ (ディラックのデルタ関数) の場合も重要である。
このとき $(\delta * |u|^2) = |u|^2 u$ となる。
- $w \in L_x^1$ また $w = \delta$ の場合に LWP を言うためには、初期値に滑らかさを課す必要がある。

第二部：無限粒子系超入門

多粒子系の世界へ

- (NLS) $i\partial_t u + \Delta u = (w * |u|^2)u$ はボース・アインシュタイン凝縮を (も) 記述する。
- ボース・アインシュタイン凝縮はボソンに対して起こる現象。
 - ▶ この世の粒子はすべてボソンかフェルミオンに分けられる。
 - ▶ 複数のボソンは同じ波動関数を持ちうる
(すべてのボソンが同じ波動関数を持つのがボース・アインシュタイン凝縮)
 - ▶ 一方で、フェルミオンの波動関数は常に直交している (パウリの排他原理)。
- フェルミオンの波動関数を記述する方程式はどうなるのか？

N 個のフェルミオンの波動関数は、次のハートリー方程式で (近似的に) 記述される：

$$\left\{ \begin{array}{l} i\partial_t u_1 + \Delta u_1 = \left(w * \sum_{j=1}^N |u_j|^2 \right) u_1, \quad u_1 : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \rightarrow \mathbb{C}, \\ \vdots \\ i\partial_t u_N + \Delta u_N = \left(w * \sum_{j=1}^N |u_j|^2 \right) u_N, \quad u_N : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \rightarrow \mathbb{C}. \end{array} \right.$$

ハイゼンベルグ描像へ

- $\mathcal{B}(L_x^2)$ を L_x^2 上の有界線形作用素全体のなす集合とする。
- $(u_n)_{n=1}^N \subset C([0, T]; L_x^2)$ をハートリー方程式の解とする。
- $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{B}(L_x^2)$ を次のように定める：

$$\gamma(t) := \sum_{n=1}^N |u_n(t)\rangle\langle u_n(t)|, \quad |f\rangle\langle f|g := \langle f|g\rangle_{L_x^2} f.$$

すると、 γ は次の方程式を満たす：

$$i\partial_t \gamma = [-\Delta + w * \rho_\gamma, \gamma], \quad \gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{B}(L_x^2). \quad (\text{NLH})$$

ここで $\rho_\gamma(t, x) := k(t, x, x)$, $(\gamma(t)u)(x) := \int_{\mathbb{R}^3} k(t, x, y)u(y)dy$ である。

(NLH) は関数に対する方程式ではなく、作用素に対する方程式であることに注意。

無限粒子系の世界へ 1/2

次の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} i\partial_t \gamma = [-\Delta + w * \rho_\gamma, \gamma], & \gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{B}(L_x^2), \\ \gamma(0) = \gamma_0 \in \mathcal{B}(L_x^2). \end{cases}$$

- $\text{Tr}(\gamma)$ は粒子数に対応している
 - ▶ 行列に対するトレースを、あるクラスの有界線形作用素に拡張することができる。
- 有限粒子系、つまり $\text{Tr}(\gamma) < \infty$ に対しては LWP は比較的容易に分かる。
- 無限粒子系、つまり $\text{Tr}(\gamma) = \infty$ のときはどうなる？

無限粒子系の世界へ 2/2

$$i\partial_t \gamma = [-\Delta + w * \rho_\gamma, \gamma], \quad \gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{B}(L_x^2). \quad (\text{NLH})$$

無限粒子系 $\text{Tr}(\gamma) = \infty$ のケースを考えるモチベーション：

- 現実世界では、粒子数 N が非常に大きく実質的に無限大であるような状況がありうる。
- 次の命題が成立する：

命題

$w \in L_x^1$ とする。このとき、すべての $f \in L_x^1 \cap L_x^\infty$ に対して、 $\gamma_f := \mathcal{F}^{-1} f \mathcal{F} \in \mathcal{B}(L_x^2)$ は (NLH) の定常解である。

- $\gamma_f : L_x^2 \rightarrow L_x^2$ は $u \mapsto \mathcal{F}_\xi^{-1}(f(\xi)\widehat{u}(\xi))$ で定義される。
- (NLH) は無限個の定常解を持つ。
- $f \geq 0$ かつ $f \not\equiv 0$ のとき $\text{Tr}(\gamma_f) = \infty$ 。従って、 γ_f という定常解を考えるなら、常に無限粒子系を扱うことになる。

補足説明：定常解の安定性

- 偏微分方程式論において、**特殊な解の性質を調べる**のは基本的な問題意識である。
- 特殊な解の代表例の一つが**定常解 (=時間に依存しない解)**である。
 - ▶ 例えば、ラプラス方程式 $\Delta u = 0$ の解は、熱方程式 $\partial_t u = \Delta u$ の定常解である。
 - ▶ 今回の主題の設定では、 $[-\Delta + w * \rho_\gamma, \gamma] = 0$ となる $\gamma : L_x^2 \rightarrow L_x^2$ が定常解である。
- 定常解 γ_f に初期摂動 Q_0 を加えたとする。時間が経てばだんだん摂動 $Q(t)$ が小さくなっていくとき、 γ_f は**(漸近) 安定である**という。
 - ▶ (適切な比喻であるか心もとないが) 静止した水面 (=定常解) に小石を投げる (=初期摂動を加える) とする。このとき、時間が経てば水面はもとの静止した水面に戻っていく。これが**(漸近) 安定である**、ということである。
- γ_f の**(漸近) 安定性**は活発に研究されている。しかも、この問題は**ランダウ減衰**と密接な関係を持っている。

脱線：特異極限問題とランダウ減衰

- 偏微分方程式論において、特異極限問題もよくある問題設定である。
- 例えば、(NLH) を換算プランク定数 \hbar を省略せずに書くと次のようになる：

$$i\hbar\partial_t\gamma = [-\hbar^2\Delta + \hbar^3w * \rho_\gamma, \gamma]. \quad (\hbar\text{-NLH})$$

- $(\hbar\text{-NLH})$ の解 $\gamma^\hbar(t)$ に適切な変換を施してから $\hbar \rightarrow 0$ の極限をとると (=特異極限)、**ブラゾフ方程式**が得られる。

$$\partial_t g + v \cdot \nabla_x g + (\nabla w * \rho_g) \cdot (\nabla_\xi g) = 0, \quad \rho_g(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} g(t, x, \xi) d\xi.$$

- ブラゾフ方程式には**ランダウ減衰**という現象が知られており、活発な研究対象になっている (**フィールズ賞の受賞業績にもなっている**。)
- (NLH) の γ_f の漸近安定性の問題は、**ランダウ減衰の量子力学におけるアナロジー**と言える。

密度関数について 1/2

- $\gamma \in B(L^2_x)$ が自己共役コンパクト作用素で $\gamma \geq 0$ ならば、次が成り立つ：

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |u_n\rangle \langle u_n|, \quad (a_n \geq 0, \quad (u_n)_{n=1}^{\infty} \text{ は正規直交系}), \quad \text{Tr}(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

- $\text{Tr}(\gamma) < \infty$ のとき、 ρ_γ は L^1_x の元として意味が確定する。実際、

$$\|\rho_\gamma\|_{L^1_x} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n |u_n(x)|^2 \right\|_{L^1_x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \|u_n\|_{L^2_x}^2 = \text{Tr}(\gamma) < \infty.$$

- しかし、 $\text{Tr}(\gamma) = \infty$ のとき、 $\rho_\gamma(x)$ の定義は必ずしも自明ではない。

密度関数について 2/2

- 線形な方程式

$$\begin{cases} i\partial_t\gamma = [-\Delta, \gamma], & \gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{B}(L_x^2), \\ \gamma(0) = \gamma_0 \in \mathcal{B}(L_x^2). \end{cases}$$

の解は $\gamma(t) = e^{it\Delta}\gamma_0e^{-it\Delta}$ で与えられる。

- そこで、 $\rho_{e^{it\Delta}\gamma_0e^{-it\Delta}}$ にどう意味を与えるかが、(NLH) に取り組む第一歩である。
- 簡単な計算から、次が分かる：

$$\rho_{e^{it\Delta}\gamma_0e^{-it\Delta}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |e^{it\Delta} u_n|^2, \quad \text{ここで } \gamma_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |u_n\rangle\langle u_n|.$$

直交ストリッカーツ評価

実は、次の定理が知られている：

定理 (2014, Lieb–Lewin–Frank–Seiringer; 2017, Frank–Sabin)

$d \geq 1$ を空間次元とする。 $p, q \in [1, \infty]$ は次を満たすとする：

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}, \quad \alpha := \frac{q}{q/2 + 1}, \quad 1 \leq \frac{q}{2} < \frac{d+1}{d-1}.$$

このとき、次が成り立つ：

$$\|\rho e^{it\Delta} \gamma_0 e^{-it\Delta}\|_{L_t^{p/2} L_x^{q/2}} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n |e^{it\Delta} u_n|^2 \right\|_{L_t^{p/2} L_x^{q/2}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

注意： $\alpha = 1$ ならば上の不等式は三角不等式と通常のスリッカーツ評価から従う。
固有ベクトル $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ の直交性から、 $\alpha > 1$ に対して成立するのがポイント。

まとめ

$$\begin{cases} i\partial_t \gamma = [-\Delta + w * \rho_\gamma, \gamma], & \gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{B}(L_x^2), \\ \gamma(0) = \gamma_0 \in \mathcal{B}(L_x^2). \end{cases}$$

- 直交ストリッカーツ評価から、 $\text{Tr}(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ でも、 $(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^\alpha)^{1/\alpha} < \infty$ であれば自由解の密度関数 $\rho_{e^{it\Delta}\gamma_0 e^{-it\Delta}}$ に意味を持たせられることが分かった。
- この意味付けを用いることで、無限粒子系に対する (NLH) の解析が可能になり、現在も研究が行われている。
- また、直交ストリッカーツ評価そのものの研究も活発に行われている。
- 無限粒子系の世界は非常に豊かで、しかも発展途上なので、まだまだこれから明らかにされるべきことが沢山ある。(本格的な研究が始まって10年ほどしか経っていない。)