入門

入門

作用素環論入門

かそう　(@kasou_kasou__)

かそう数学ちゃんねる: https://youtube.com/channel/UCRgTRcw4MkOXXD94UiFiOHw?si=X0x2UE8lmRxlQA9J

2024/10/20　第6回 すうがく徒のつどい 手書きスライド

はじめに #作用素環論入門でポスト!

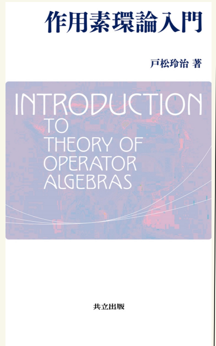
今日僕の話を聞きにきて頂きありがとうございます!

対象:学部生から数学に興味がある一般の方まで幅広く

前提知識:高校数学まで, 集合の基礎(単射・全射など)
群論, 関数解析の知識があると吉

目標:C^*環を定義し、行列環を中心に具体例と作用素環的事項を紹介する. フーリエ変換を経由してToeplitz環という行列っぽさも連続関数っぽさもあるC^*環を紹介する. (そして戸松本を買ってもらう.)

自己紹介:コンパクト量子群を学んでいるM1



× 手書きスライド故, 多少見づらいかもしれません。

× 急に未定義語が出るかもしれません

目次

記号の注意

$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$ 自然数全体, $\mathbb{N}_{\geq 0}=\{0,1,2,\cdots\}$

$\mathbb{Z}=\{\cdots -1,0,1,\cdots\}$ 整数全体, $2\pi\mathbb{Z}=\{2\pi m \mid m\in\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{R}$ 実数全体 $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}$ 複素数全体 $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$

係数体 その元を スカラーとよぼう

$S^1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$

$\forall$「任意の (に対して)」, $\exists$○○ st xx「xxをみたす○○が存在する」

「作用素環論入門」とは？

× 作用＋素＋環　　代数にまつわるものなのかな？

action　(?)　algebra

○ 作用素＋環　・解析と代数の共通部分

operator　algebra

$\int x\,dx$　　$a^n+b^n=c^n$

$\frac{d}{dt}e^t=e^t$　　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

今回はC*環だけを扱います　例えていうと

可換ならば連続関数環

→ 連続関数環の非可換化

松本香 $\xrightarrow{\boxed{\text{凶暴化}}}$ ダンプ松本 $\xrightarrow{\boxed{\text{凶暴化}}}$ 

解析

竹刀が武器 ⇝ 

目次

記号の注意

$\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ 自然数全体, $\mathbb{N}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

$\mathbb{Z} = \{\cdots -1, 0, 1, \cdots\}$ 整数全体, $2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi m \mid m \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{R}$ 実数全体 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}$ 複素数全体 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

係数体 その元を スカラーとよぼう

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

$\forall$「任意の (に対して)」, $\exists$ ○○ st ×× 「××をみたす○○が存在する」

定義

$\phi \neq G$ を集合とする。

G の二項演算とは

G の元の組 (ordered pair) を

G の元にあてる関数の

ことである

例 $G = \mathbb{Z}$　足し算は $\mathbb{Z}$ の二項演算

$G = \mathbb{Z}$　割り算は $\mathbb{Z}$ の二項演算ではない

$\because (1, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$　$1 - 2 \notin \mathbb{Z}$

例 (畳み込み積) $N \in \mathbb{N}$ をとる

$a = (a_0, \ , a_{N-1}), b = (b_0, \ , b_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ に対し

$a * b$

$= \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_{k \pmod N} b_{n-k \pmod N} \right)_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$

$\rightsquigarrow$ $*$ は $\mathbb{C}^n$ の二項演算

定義 (デデキント)

$\phi \neq G$ を二項演算 $\cdot$ を持つ集合とする。

$\cdot : G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \mapsto ab$

$(G, \cdot)$

G が演算 $\cdot$ の下で群であるとは、以下の性質がみたされるときをいう：

i) (結合律)

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (a, b, c \in G)$

ii) (単位元の存在)

ある元 $e \in G$ が存在して、

$a \cdot e = e \cdot a = a \quad (a \in G)$

をみたす

iii) (逆元の存在) 全ての $a \in G$ に対し、

ある元 $b \in G$ が存在して

$a \cdot b = e = b \cdot a$　が成り立つ

さらに

$ab = ba \ (\forall a, b \in G)$

をみたすとき、Gは

可換群 とよばれる。

例 $\cdot (\mathbb{Z}, +)$　加法群

単位元 $= 0$

$\cdot (S^1, \times)$, $(\mathbb{R}^\times, \times)$　乗法群

単位元 $= 1$

$\begin{cases} \mathbb{T} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} \\ \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$

☆ 単位元は存在すれば一意的

$\because$

$e, e' \in G$ を群 G の単位元とする

このとき

$$\begin{cases} e \cdot e' = \boxed{e' \cdot e} = e \\ \boxed{e' \cdot e} = e \cdot e' = e' \end{cases}$$

$e = e'$ $\square$

☆ 逆元は存在すれば一意的

$\because$

$a \in G$ をとり $b, b' \in G$ を a の逆元とする

このとき $\begin{cases} ba = ab = e \\ b'a = ab' = e \end{cases}$ in G

が成り立つので

$$b' = b'e$$
$$= b'ab = eb = b$$

✓

☆（右逆元は左逆元）

G：群 $a \in G$ をとる

$b \in G$ を $ab = e$ となる元とする

このとき $ba = e$ でもある

$\because$

Claim G の巾等元は単位元

(∵) $a^2 = a$ となる元 $a \in G$ をとると

$a = ae = a(aa^{-1}) = a^2 a^{-1} = aa^{-1} = e$

元 $a, b \in G$ で $ab = e$ となるものをとる Claim より ba が巾等であることを示せば十分である

$(ba)(ba) = b(ab)a = bea = ba$

以上より $ba = e$ を得る $\square$

(1,1)成分　(1,2)成分

例　$M(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \ a_{ij} \in \mathbb{C} \ (i,j \in \{1,2\}) \right\}$　2×2行列

(2,1)成分　(2,2)成分

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

行列のかけ算
(二項演算)

$M(2,\mathbb{C})$は行列のかけ算を積に群となるか？

・結合律と、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が単位元となるのはよい

・$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が逆元を持つ $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{= \det A} \neq 0$

Aの行列式

$GL(2,\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \ a_{ij} \in \mathbb{R} \ (i,j \in \{1,2\}),\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \right\}$

$GL(2,\mathbb{C})$の元を2次複素正則行列と呼ぶ　$\boxed{\text{可逆元たちは群をなす}}$

$GL(2,\mathbb{C})$は群

$GL(2,\mathbb{C})$は可換群ではない　実際

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ QP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right] \neq$$

行列式の性質

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ について　$\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ と定め

Aの行列式と呼ぶ.

- $\det A^* = \overline{\det A}$　・$\det AB = \det A \det B$

　但し $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

　に対して $A^*=\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix}$　随伴

$\because$

$\det A^* = \overline{a_{11}}\,\overline{a_{22}} - \overline{a_{21}}\,\overline{a_{12}} = \overline{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \overline{\det A}$

$\det AB = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

$= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})$

$= \cancel{a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{21}b_{12} + \cancel{a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}}$

$\quad \cancel{- a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \cancel{- a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}}$

$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \det A \det B$

ちなみに行列の $*$ は以下のようにして「$M(2,\mathbb{C})$ 上の $*$ 演算」だと考えられる

写像 $*: M(2,\mathbb{C}) \longrightarrow M(2,\mathbb{C})$ を、$\left((a_{ij})_{i,j}\right)^* = (\overline{a_{ji}})_{i,j}$ と定める　複素共役

- ${}^\forall\lambda, {}^\forall\mu \in \mathbb{C}$, ${}^\forall A=(a_{ij})$ ${}^\forall B=(b_{kl}) \in M(2,\mathbb{C})$, $(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*$
- ${}^\forall A \in M(2,\mathbb{C})$, $A^{**} = A$
- ${}^\forall A=(a_{ij})$, ${}^\forall B=(b_{kl}) \in M(2,\mathbb{C})$　$(AB)^* = B^* A^*$

$\det : M(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$

$\det \underbrace{AB}_{M(2,\mathbb{C})\text{の演算}} = \underbrace{\det A \det B}_{\mathbb{C}\text{の演算}} \ (A, B \in M(2, \mathbb{C}))$

定義

$(G, \cdot)$, $(G', \circ)$ を群とする

写像 $\varphi : G \longrightarrow G'$ が

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \circ \varphi(b) \quad (a, b \in G)$$

をみたすとき，φ を群の準同型という

☆

$\varphi(b^{-1}) = \varphi(b)^{-1}$

∵ 逆元の一意性

☆ e Gの単位元，e' G'の単位元

$\varphi(e) = e'$

∵ $\varphi(e) \circ e' = \varphi(e) = \varphi(e \cdot e) = \varphi(e) \circ \varphi(e)$

両辺に $\varphi(e)$ の逆元を左からあてて

$\cancel{(\varphi(e))^{-1} \circ \varphi(e)} \circ e' = \cancel{(\varphi(e))^{-1} \circ \varphi(e)} \circ \varphi(e)$

$e' = \varphi(e)$

$\boxed{\text{宿題}}$

$\mathrm{Im}\,\varphi = \{ y \in G' \mid {}^{\exists} x \in G \ \text{s.t.} \ y = \varphi(x) \}$

が G'の演算で群

$\ker \varphi = \{ x \in G \mid \varphi(x) = e' \}$ が　　G'の単位元

Gの演算で群

$\boxed{\text{閑話休題}}$

定義 $\emptyset \neq G$ を二項演算・を持つ集合とする.

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G, \quad (a,b) \mapsto ab$$

- G が演算・の下で半群であるとは、
  以下の性質がみたされるときをいう:
  i) (結合律)

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (a, b, c \in G)$$

- 半群 $(G, \cdot)$ が簡約律をみたすとは、

$$\forall a \forall b \forall c \in G, \begin{cases} ab = ac \Rightarrow b = c \\ ba = ca \Rightarrow b = c \end{cases}$$ をみたすときをいう

☆ 群は簡約律をみたす半群である

- 単位元を持つ半群をモノイドという. 例 $(\mathbb{N}, +)$

補題 $(G,\cdot)$ を有限半群とする このとき元 $a\in G$ で

$a\cdot a = a$ をみたすものが存在する

$a^2=a$ 巾等

証明)元 $a\in G$ で $a^k=a$($^\exists k\in\mathbb{N}$ 2以上)をみたすものの存在を示せば十分である.

($k=2$ ok! $k>2$ 両辺 a^{k-2} をあてて $(a^{k-1})^2=a^{k-1}$ a^{k-1} が G の巾等元だとわかる)

$x\in G$ を固定して、列 $x, x^2, x^4, x^8, x^{16},$ を考える.

G は有限集合より、$^\exists t > {}^\exists s \geqq 1$ s.t $x^{2^t}=x^{2^s}$ これを変形すると

$$x^{2^t}=\left(x^{2^s}\right)^{2^{t-s}}=x^{2^s}$$

$a=x^{2^s}$, $k=2^{t-s}$ とすると $t>s$ より $k\geqq 2$ であって

$a^k=a$ が成り立つ。 $\square$

命題 簡約律をみたす有限半群は群になる。

証明) Gを簡約律をみたす有限半群とする。
前頁の補題よりGは巾等元eを持つ

(Gが単位元を持つ) $g\in G$をとるこのとき

$$e^2g=eg \xrightarrow{G\text{の簡約律}} eg=g$$

$$ge^2=ge \longrightarrow ge=g$$

これよりeはGの単位元である
(Gの元が逆元を持つ) $g\in G$をとる　このとき$gG=\{gx \mid x\in G\}$は有限半群なので前頁の補題よりgGは巾等元e'を持つ。単位元の一意性から$e=e'$だから、ある元$s\in G$が存在して$gs=e$である　このときsはgの右逆元なので$sg=e$が従い、よってsはgの逆元である

以上よりGは群である。 閑話休題終わり ∎

群の例

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -r \\ r & \alpha \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha, r \in \mathbb{R} \\ \alpha^2 + r^2 = 1 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -r \\ r & \alpha \end{pmatrix}$$

$\det A = \alpha^2 + r^2 = 1 \neq 0$ よりこれは群となる.

$A = (a_{ij})_{ij}$ に対して

${}^tA = (a_{ji})_{ij}$ 転置

$$O(2,\mathbb{R}) = \left\{ A \in GL(2,\mathbb{R}) \middle| {}^tA A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det({}^tA A) = \det({}^tA)\det A$$
$$= (\det A)^2$$

$\det A = \pm 1 \neq 0$ より群になる

$$SO(2,\mathbb{R}) = \{ A \in O(2,\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$$

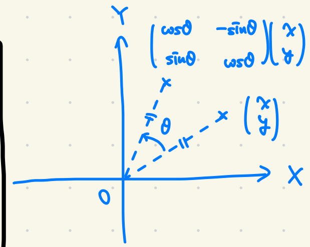
$$O(2,\mathbb{R}) \overset{\text{by def}}{=} \left\{ A \in GL(2,\mathbb{R}) \middle| {}^tA A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

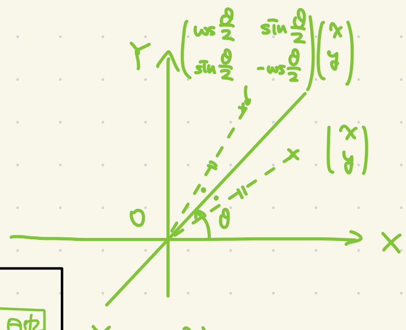
$\boxed{\text{直交}}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in [0, 2\pi) \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

$= SO(2,\mathbb{R})$ 回転

$\boxed{\text{鏡映}}$





$\boxed{\boxed{\text{直交}} = \text{回転} \cup \boxed{\text{鏡映}}}$

$$\begin{array}{ccccc} GL(2,\mathbb{R}) & > & O(2,\mathbb{R}) & & \\ \vee & & \vee & & \\ SL(2,\mathbb{R}) & > & SO(2,\mathbb{R}) & > & \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \end{array}$$

定義

G 群

$H < G$

$H \subset G$ が部分群であるとは

H が G の演算で群になるときをいう

定義 G 群

部分群 $H \subset G$ が **正規部分群** であるとは
任意の $a \in G$ について $a^{-1}Ha \subset H$ が成り立つとき

例 $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N})$

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} < \mathbb{R}$

例 $SO(2,\mathbb{R})$ は $O(2,\mathbb{R})$ の正規部分群

例 G, G' : 群 φ $G \longrightarrow G'$ 群の準同型

$\ker\varphi = \{g \in G \mid \varphi(x) = e'\} < G$ 正規

$a \in G$ 固定

$x \in \ker\varphi$

$$\varphi(a^{-1}xa) = \varphi(a^{-1})\varphi(x)\varphi(a)$$
$$= \varphi(a^{-1})e'\varphi(a) = e'$$

$a^{-1}xa \in \ker\varphi$ ✓

宿題

$H < G$
正規 群

$gH = \{gh \mid h \in H\}$

このとき 商集合 $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ 上に演算を
$(xH)(yH) = xyH$ $(x, y \in G)$
が定まり G/H は群となることを示せ (単位元 $eH = H$)

$G \longrightarrow G/H$

$g \longmapsto gH$

が群準同型である
ことを示せ

定理（準同型定理）

G' 群　$\varphi\ G \longrightarrow G'$　群の準同型
このときある全単射な群準同型
$\tilde{\varphi} : G/\ker\varphi \longrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi$ が存在する
このとき群 $G/\ker\varphi$ と群 $\mathrm{Im}\,\varphi$ は同型であるという.

全単射な群準同型
$G/\ker\varphi \longrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi$
が存在するとき

使用例

乗法群
(単位元 1)

$\det : O(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^\times$　群準同型

$\ker\det = \{A \in O(2,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$

$= SO(2,\mathbb{R})$

準同型定理より

$O(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$ は

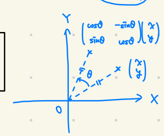
$\mathrm{Im}\,\det = \mathbb{R}^\times$ と群として同型

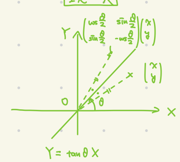
$O(2,\mathbb{R}) \overset{\text{by def}}{=} \{A \in GL(2,\mathbb{R}) \mid {}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

直交

$= \underbrace{\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in [0,2\pi)\right\}}_{= SO(2,\mathbb{R})\ \text{回転}} \cup \underbrace{\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in [0,2\pi)\right\}}_{\text{鏡映}}$

$\boxed{\text{直交}} = \text{回転} \cup \boxed{\text{鏡映}}$





$\boxed{\text{宿題}}$ $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \overset{\text{群の同型}}{\cong} S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$　これを示せ　ヒント 対数関数 単位元に注意せよ

$\theta \bmod 2\pi \longleftrightarrow e^{i\theta}$

目次

記号の注意、

$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$ 自然数全体, $\mathbb{N}_{\geq 0}=\{0,1,2,\cdots\}$

$\mathbb{Z}=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 整数全体, $2\pi\mathbb{Z}=\{2\pi m \mid m\in\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{R}$ 実数全体 $\mathbb{R}^2=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}$ 複素数全体 $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$

係数体 その元をスカラーとよぼう

$S^1=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$

$\forall$「任意の（に対して）」, $\exists$ ○○ s.t. ××「××をみたす○○が存在する」

行列の比較　どっちの方が「大きい」?

Q1 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Q2 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Q3 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Q4 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Q5 $\begin{pmatrix} 2 & 6i \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 6i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

【記法】

- $m, n \in \mathbb{N}$ に対して、$M(m,n,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \ a_{ij} \in \mathbb{C} \ \ 1 \leq {}^\forall i \leq m,\ 1 \leq {}^\forall j \leq n \right\}$

$m \times n$ 複素行列全体

$m = n$ のとき、$M(n,n,\mathbb{C})$ を $M(n,\mathbb{C})$ と書く

- 各 $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(n,\mathbb{C})$ に対して、$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ を A のトレースと呼び、$\mathrm{Tr}A$ と書く

これにより関数 $\mathrm{Tr} : M(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ が定まる

$$\begin{array}{ccc} M(n,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}A \end{array}$$

- Trで比べてみよう

$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1+2 = 3$

Q1 $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2+4 = 6$ 大

Q3 $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2+(-2) = 0$ 小

Q2 $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2+1 = 3$ 同じ

Q4 $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 2+(-4) = -2$ 小

Q5 $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 6i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1+2 = 3 \quad > \quad \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 6i \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 2+(-4) = -2$!?

$A = (a_{ij})_{i,j},\ B = (b_{kl})_{k,l} \in M(n,\mathbb{C})$ と、$c \in \mathbb{C}$ を固定する

1) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}B$. 2) $\mathrm{Tr}(cA) = c\,\mathrm{Tr}A$. 3) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

3) より $A \in M(n,\mathbb{C})$, 正則行列 $P \in M(n,\mathbb{C})$ に対し, $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{Tr}(A)$

4つの比べ方

- Tr　$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6i \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{Tr}(\square^*\square)$　$\begin{pmatrix} 2 & 6i \\ 0 & -4 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 & 6i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- 成分の絶対値の和　$\begin{pmatrix} 2 & 6i \\ 0 & -4 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 & 6i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- 成分の絶対値の最大値　$\begin{pmatrix} 2 & 6i \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

事実

$A = (a_{ij})_{ij} \in M(m, n, \mathbb{C})$ について　$\mathrm{Tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ji}|^2$　が成り立つ

$\because$

$$A^*A = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{1i}} & \overline{a_{2i}} & \overline{a_{mi}} \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1i} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{mi} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

より、A^*A の (i,i) 成分 $= \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{ji}}\, a_{ji} = \sum_{j=1}^{m} |a_{ji}|^2$
$(i = 1, \ , n)$

これより

$$\mathrm{Tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ji}|^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ji}|^2. \quad \square$$

- $\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ で

行列の「大きさ」がわかる

- これを一般化して

$1 \leq p < \infty$ について

$\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ で

行列の「大きさ」がわかりそう

定義 (行列ノルム)

すべての複素行列 A に対して
負でない実数 $\|A\|$ が対応していて、それが次の4つの条件をみたすとき、$\|A\|$ を A の行列ノルムという.

1) $\|A\| = 0$ となるのは(各型の)ゼロ行列だけである
2) 任意の複素数 c に対して、$\|cA\| = |c|\,\|A\|$
3) A, B が同じ型なら $\|A+B\| \leqq \|A\| + \|B\|$
4) 積 AB が定義されれば、$\|AB\| \leqq \|A\|\,\|B\|$

例 各 $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(m,n,\mathbb{C})$ に対し

$$\|A\|_2 = \{\mathrm{Tr}(A^*A)\}^{\frac{1}{2}} = \{\mathrm{Tr}(AA^*)\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$$

2乗ノルム

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

1乗ノルム

・$\{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ が $\mathbb{C}^n$ の有界閉集合
・$\mathbb{C}^n \ni x \mapsto \|Ax\|_2 \in \mathbb{R}$ が連続関数
より、最大値の原理から定まる

$$\|A\|_0 = \max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_2 = 1}} \|Ax\|_2$$

作用素ノルム

$$\|A\|_\infty = \sqrt{mn}\,\max_{i,j}|a_{ij}|$$

最大値ノルム

$\boxed{\text{宿題}}$ $A \in M(m,n,\mathbb{C})$ $(m,n \in \mathbb{N})$ について以下が成り立つことを示せ

$$\frac{1}{\sqrt{mn}}\|A\|_\infty \leqq \|A\|_0 \leqq \|A\|_2 \leqq \|A\|_1 \leqq \sqrt{mn}\,\|A\|_\infty$$

目次

記号の注意

$\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ 自然数全体, $\mathbb{N}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \}$

$\mathbb{Z} = \{ -1, 0, 1, \}$ 整数全体, $2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi m \mid m \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{R}$　実数全体　$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}$ 複素数全体　$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

係数体 その元を スカラーとよぼう

$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$\forall$ 「任意の (に対して)」, $\exists$ ○○ st ×× 「××をみたす○○が存在する」

定義（線形空間，ノルム，ノルム空間）

- (X が) 係数体 $\mathbb{K} = \mathbb{C} \cup \mathbb{R}$（以降，線形空間の係数体としてこの $\mathbb{K}$ を用いる）での**線形空間**：集合 X の要素と $\mathbb{K}$ の要素に対し
  加法：$u \in X, v \in X$ について $u + v \in X$
  スカラー乗法：$\alpha \in \mathbb{K}, x \in X$ について $\alpha x \in X$
  が定まり，以下の公理を満たす時を言う．
  $x, y, z \in X,\ \gamma, \delta \in \mathbb{K}$ をとると以下が成立：
  - $(x + y) + z = x + (y + z)$ (加法の結合則)
  - $x + y = y + x$ (加法の交換則)
  - $x + 0 = 0 + x = x$ となる $0 \in X$ がただ一つ存在する．(0 ベクトルの存在)
  - $x \in X$ について，$x + (-x) = (-x) + x = 0$ となる $-x \in X$ がただ一つ存在する．(加法の逆元の存在)
  - $\gamma(x + y) = \gamma x + \gamma y$ (分配則)
  - $(\gamma + \delta)x = \gamma x + \delta x$ (分配則)
  - $(\gamma\delta)x = \gamma(\delta x)$ (スカラー乗法の結合則)
  - $1x = x$ ($\mathbb{K}$ の単位元によるスカラー乗法)
- (X を $\mathbb{K}$ 上の線形空間として，関数 $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$ が X 上の) **ノルム**：次の条件を満たす時を言う：
  - $u \in X$ について $||u|| \geqq 0$ かつ $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (正定値性)
  - $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times X$ について $|\alpha|$ を α の絶対値として $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$ (スカラー乗法による同次性)
  - $x, y \in X$ について $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (三角不等式)
- **ノルム空間**：X を $\mathbb{K}$ 上の線形空間として，関数 $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$ が X 上のノルムの時の，組 $(X,\ ||\cdot||)$ のこと．

例 $M(m, n, \mathbb{C})$ $(m, n \in \mathbb{N})$ は以下の加法とスカラー倍で $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間．

$A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M(m, n, \mathbb{C})$ と
$\alpha \in \mathbb{C}$ について
$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij}$ (加法) 0ベクトルは成分が全て0の行列
$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{ij}$ (スカラー倍)

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_2 & M(m, n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & [0, \infty) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & A = (a_{ij})_{ij} & \longmapsto & \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \end{array}$$ は

$M(m, n, \mathbb{C})$ 上のノルムで，

$M(m, n, \mathbb{C})$ はノルム空間である

定義（線形写像）

V, W を係数体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする

写像 f $V \to W$ が<u>線形写像</u>

$\Leftrightarrow$ $^\forall v, v' \in V,\ ^\forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$f(v + v') = f(v) + f(v'),\ \alpha f(v) = f(\alpha v)$

定義（環，環準同型，代数/多元環）

1. R が**環**：集合 R の要素に対し
   加法：$u \in R, v \in R$ について $u+v \in R$
   乗法：$u \in R, v \in R$ について $uv \in R$
   が定まり，以下の条件を満たす時を言う．
   $x, y, z \in R$ をとると以下が成立：
   - $(x+y)+z = x+(y+z)$ (加法の結合則)
   - $x+0 = 0+x = x$ となる $0 \in R$ がただ一つ存在する．(加法の単位元の存在)
   - $x \in R$ について，$x+(-x) = (-x)+x = 0$ となる $-x \in R$ がただ一つ存在する．(加法の逆元の存在)
   - $(xy)z = x(yz)$（乗法の結合則）
   - $x1 = 1x = x$ となる $1 \in R$ がただ一つ存在する．（乗法の単位元の存在）
   - $x(y+z) = xy+xz$, $(y+z)x = yx+zx$（分配法則）
2. 環 R が**可換環**：乗法について可換な時をいう：
   $$xy = yx \ (\forall x, y \in R).$$
3. 2 つの環 R, R' の間の写像 $\varphi\colon R \to R'$ が**環準同型写像**：以下の条件を満たすときをいう．
   - $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$,
   - $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ $(\forall x, y \in R)$,
   - $\varphi(1_R) = 1_{R'}$ ($1_R \in R, 1_{R'} \in R'$は乗法単位元)
4. 環 A, R について R が A 上の**代数**：環準同型（**構造射**）$f\colon A \to R$ が与えられているときをいう．
5. 環 A, R について R が A 上の**多元環**：A が可換環で、R が A 上の代数で、構造射の像の元が全て R の元と可換となるときをいう．

例 $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は可換環である

例（行列環）$M(n, n, \mathbb{C})$ $(n, n \in \mathbb{N})$ は以下の加法と乗法を持つ環である：

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M(n, n, \mathbb{C})$ に対して

$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{ij}$ （加法） 単位元は成分が全て0の行列

$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{ij}$ （乗法） 単位元は $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

定義 R $\mathbb{C}$上の多元環
Rが$*$環である

スター
$*$ 演算

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 写像 $* \ R \longrightarrow R$, $a \mapsto a^*$ で
$(u^*)^* = u$, $(u+v)^* = u^*+v^*$,
$(\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*$, $(uv)^* = v^* u^*$ $(u, v \in R, \lambda \in \mathbb{C})$
をみたすものが与えられているとき

例 行列環 $M(n, \mathbb{C})$は $*$演算 $(a_{ij})_{ij} \mapsto (\overline{a_{ji}})_{ij}$ により $*$環

定義（環，環準同型，代数/多元環）

1. R が**環**：集合 R の要素に対し
   加法：$u \in R, v \in R$ について $u + v \in R$
   乗法：$u \in R, v \in R$ について $uv \in R$
   が定まり，以下の条件を満たす時を言う．
   $x, y, z \in R$ をとると以下が成立：
   - $(x + y) + z = x + (y + z)$ (加法の結合則)
   - $x + 0 = 0 + x = x$ となる $0 \in R$ がただ一つ存在する．(加法の単位元の存在)
   - $x \in R$ について，$x + (-x) = (-x) + x = 0$ となる $-x \in R$ がただ一つ存在する．(加法の逆元の存在)
   - $(xy)z = x(yz)$（乗法の結合則）
   - ~~$x1 = 1x = x$ となる $1 \in R$ がただ一つ存在する．（乗法の単位元の存在）~~
   - $x(y + z) = xy + xz$, $(y + z)x = yx + zx$（分配法則）
2. 環 R が**可換環**：乗法について可換な時をいう：
   $$xy = yx \ (\forall x, y \in R).$$
3. 2 つの環 R, R' の間の写像 $\varphi\colon R \to R'$ が**環準同型写像**：以下の条件を満たすときをいう．
   - $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,
   - $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ $(\forall x, y \in R)$,
   - ~~$\varphi(1_R) = 1_{R'}$ ($1_R \in R, 1_{R'} \in R'$は乗法単位元)~~
4. 環 A, R について R が A 上の**代数**：環準同型（**構造射**）$f\colon A \to R$ が与えられているときをいう．
5. 環 A, R について R が A 上の**多元環**：A が可換環で、R が A 上の代数で、構造射の像の元が全て R の元と可換となるときをいう．

乗法単位元が必ずしもあるとは限らない「環」

$f : A \longrightarrow R$ 構造射

$f(a + a') = f(a) + f(a')$

$f(a a') = f(a)f(a')$

$f(a) r = r f(a)$ $(\forall a, a' \in A, \forall r \in R)$

・各 $a \in A$, $r \in R$ について

$a \cdot r := f(a)\, r$ ←「Aによるスカラー倍」

Rは「ベクトル空間」で積の構造を持つ！

以後、$\mathbb{C}$ 上の多元環（乗法単位元が必ずしもあるとは限らない）を環とよぶ．
環が乗法単位元を持つとき単位的であるという

線形空間，環の例

V 群

$V^* = \{ f: V \to \mathbb{K} \text{ 群準同型} \}$

和: $f, g \in V^*$ に対し $f+g \in V^*$ を

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \quad (\forall v \in V)$$

で定める

スカラー倍: $f \in V^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し $\alpha f \in V^*$ を

$$(\alpha f)(v) = \alpha f(v) \quad (\forall v \in V)$$

で定める

$\rightsquigarrow$ V^* は線形空間となる

積 $f, g \in V^*$ に対し

$$(f*g)(v) = \sum_{ab=v} f(a)g(b) \quad (\forall v \in V)$$ で定める

$\rightsquigarrow$ V^* は環となる

線形写像の例

$f \in V^*$ を固定する写像

$$\begin{array}{cccc} \varphi_f: & V^* & \longrightarrow & V^* \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & g & \longmapsto & f*g \end{array}$$

は線形写像である

○ ・$\forall g, g' \in V^*$ に対して，$(\varphi_f(g) + \varphi_f(g') = \varphi_f(g+g')?)$

$$\begin{aligned}(f*g + f*g')(v) &\overset{\text{by def}}{=} (f*g)(v) + (f*g')(v) \\ &= \sum_{ab=v} f(a)g(b) + \sum_{ab=v} f(a)g'(b) \\ &= \sum_{ab=v} f(a)(g(b) + g'(b)) \\ &= \sum_{ab=v} f(a)(g+g')(b) \\ &= (f*(g+g'))(v) \quad (\forall v \in V)\end{aligned}$$

・$\forall g \in V^*$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ に対して，$(\alpha\varphi_f(g) = \varphi_f(\alpha g)\ ?)$

$$\begin{aligned}\alpha(f*g)(v) &\overset{\text{by def}}{=} \alpha \sum_{ab=v} f(a)g(b) \\ &= \sum_{ab=v} f(a)(\alpha g(b)) = (f*(\alpha g))(v) \\ & \qquad (\forall v \in V)\end{aligned}$$

ℓ $V \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N})$ のとき $V^* \cong \mathbb{C}^n$ であることに注意せよ　このとき $*$ は $\mathbb{C}^n$ 上の畳み込み積に一致する

$V \cong \mathbb{Z}$ のとき V^* の元は数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ である

行列環 $M(n,\mathbb{C})$ は
以下の構造を持つ
- 加法 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{ij}$
- 乗法 $AB=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{ij}$
  乗法単位元 $I=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$
- $*$ $A^*=(\overline{a_{ji}})_{ij}$
- ノルム $\|A\|_2=\sqrt{\sum_{ij}|a_{ij}|^2}$

$(A=(a_{ij})_{ij},\ B=(b_{ij})_{ij}\in M(n,\mathbb{C}))$

命題 $T\in M(n,\mathbb{C})$ をとる このとき
以下は同値である：

i) T は正則行列である

ii) T は下に有界である つまり
$\exists M>0$ s.t $\|x\|_2\leq M\|Tx\|_2\ (\forall x\in\mathbb{C}^n)$

証明

(i) ⇒ ii)) T が正則行列であるとする つまり $\exists S\in M(n,\mathbb{C})$
s.t $ST=TS=I$ このとき $\|S\|_0\|T\|_0\geq\|ST\|_0=\|I\|_0=\sqrt{n}$
$\|T\|_0\geq\dfrac{\sqrt{n}}{\|S\|_0}$ T は下に有界である. ✓

(ii) ⇒ i)) $\exists M>0$ s.t $\|x\|_2\leq M\|Tx\|_2\ (\forall x\in\mathbb{C}^n)$ とする

Claim T は正則である ⇔ T は単射である
次元定理による
⇔ $T(x)=T(y)\ (x,y\in\mathbb{C}^n)$ ならば $x=y$
線形性
⇔ $T(x-y)=0\ (x,y\in\mathbb{C}^n)$ ならば $x-y=0$
⇔ $\mathrm{ker}\,T=\{0\}$

$x\in\mathrm{Ker}\,T$ をとる 仮定より $(0\leq)\|x\|_2\leq M\|Tx\|_2=M\|0\|_2=0$
$x=0$ $x\in\mathrm{Ker}\,T$ を任意にとることで、T は単射
であることがわかる Claim により T は正則である ∎

☆ C^* 環でも同様の事実が成り立つ

作用素ノルム $\|T\|_0\overset{\text{by def}}{=}\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\\ \|x\|_2=1}}\|Tx\|_2=\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\\ x\neq 0}}\left\|T\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|$

を用いると、ii) の式は
$\exists M>0$ s.t $1\leq M\dfrac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2}=M\left\|T\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|_2\leq M\|T\|_0\ (\forall x\in\mathbb{C}^n,\ x\neq 0)$

$x=0$ のとき ii) で等号を得る

$\exists N>0$ s.t $(0<)N\leq\|T_0\|$ これと同値である

定義(ノルムの完備性, C*環)

以下 A を*環で零環でないものとする

1) A のノルム $\|\cdot\|$ が劣乗法的である

$\Longleftrightarrow \|ab\| \leqq \|a\|\|b\| \quad (\forall a,b \in A)$

2) A のノルム $\|\cdot\|$ が完備ノルム

$\overset{d}{\Longleftrightarrow} \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A,\ \|u_n - u_m\| \xrightarrow{n>m\to\infty} 0$

ならば、$\exists u \in A$ st $\|u_n - u\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

3) A が C*環である

$\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ A が劣乗法的なノルム $\|\cdot\|$ をもち

C*恒等式 $\|a\|^2 = \|a^*a\| \quad (\forall a \in A)$

をみたし、ノルムが完備ノルムであるとき

例(行列環)

・$n \in \mathbb{N}$ について $M(n, \mathbb{C})$ は C*環

(行列ノルム, 随伴)

例(連続関数環)

Ω 局所コンパクト Hausdorff 空間

$C_0(\Omega)$「無限遠で消える Ω 上の連続関数環」

(作用素ノルム $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in \Omega\}$, 複素共役 $f^*(x) = \overline{f(x)}$ $\forall x \in \Omega$)

目次

記号の注意

$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$ 自然数全体, $\mathbb{N}_{\geq 0}=\{0,1,2,\cdots\}$

$\mathbb{Z}=\{\cdots -1,0,1,\cdots\}$ 整数全体, $2\pi\mathbb{Z}=\{2\pi m \mid m\in\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{R}$ 実数全体 $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}$ 複素数全体 $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$

係数体の元をスカラーとよぼう

$S^1=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$

$\forall$「任意の(に対して)」, $\exists$ ○○ s.t. ××「××をみたす○○が存在する」

定義 行列 A に対し、適当な正則行列 P をとると $P^{-1}AP$ が対角成分のみに値をとる行列になるとき、A は **対角化可能** であるという

行列のサイズが大きくなるほど正則行列を見つけて対角化するのは面倒　特殊な場合に着目

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_{N-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & & & c_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{N-2} & & & & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{pmatrix}$$ の形の

行列を **巡回行列** という。

> **巡回行列の対角化**：$\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ として
>
> $$\overline{W} = \begin{pmatrix} \omega^{-0\cdot 0} & \omega^{-1\cdot 0} & \cdots & \omega^{-(N-1)\cdot 0} \\ \omega^{-0\cdot 1} & \omega^{-1\cdot 1} & \cdots & \omega^{-(N-1)\cdot 1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \omega^{-0(N-1)} & \omega^{-1(N-1)} & \cdots & \omega^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$ とおくと
>
> $\overline{W}$ は正則で $\overline{W} C \overline{W}^{-1}$ は対角行列になる

これを別の角度から見てみよう

各 $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ について

$e_i = (e_{i_k})_{k=0}^{N-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ とおく　このとき $\mathbb{C}^N = \langle e_1, \ldots, e_N \rangle$

$c = (c_k)_{k=0}^{N-1} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ とおく

写像

$$\varphi_c : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N, \quad x \longmapsto c * x$$ は線形写像である

> $a = (a_0, \ldots, a_{N-1}),\ b = (b_0, \ldots, b_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ に対し
> $a * b = \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_{k \pmod N}\, b_{n-k \pmod N} \right)_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$

$$\varphi_c(e_i) = c * e_i = \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_{k \pmod N}\, \underbrace{e_{i_{n-k \pmod N}}}_{= \begin{cases} 1 & n-k \equiv i \mod n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}} \right)_{n=0}^{N-1} \quad (i \in \{1, \ldots, N\})$$

$$\begin{array}{cccc} \varphi_c(e_N) & \varphi_c(e_1) & \varphi_c(e_2) & \cdots \quad \varphi_c(e_{N-1}) \\ \| & \| & \| & \| \\ \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{N-1} \\ c_0 \\ \vdots \\ \\ c_{N-2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{N-2} \\ c_{N-1} \\ \vdots \\ \\ c_{N-3} \end{pmatrix} & \cdots \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \\ c_0 \end{pmatrix} \end{array}$$

巡回行列

定義 1) $x = (x_i)_{i=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$ に対し、

x の離散フーリエ変換 $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$ を

$$\hat{x}_i = \sum_{k=0}^{N-1} x_k w^{-ik} \quad (i = 0, \cdots, N-1)$$

と定める（但し $w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$）

2) 線形写像 F $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^N & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ x & \longmapsto & \hat{x} \end{array}$ を離散フーリエ変換

という

☆ $\mathbb{C}^N = M(N,1,\mathbb{C})$ 上 $\|\cdot\|_2$ ノルムを考えて

$$\boxed{\|x\|_2^2 = \frac{1}{N}\|F(x)\|_2^2 \quad (\forall x \in \mathbb{C}^N) \text{ Parseval の等式}}$$

- 各 $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$ について

$e_i = (e_{i_k})_{k=0}^{N-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} <i \in \mathbb{C}^N$ とおく このとき $\mathbb{C}^N = \langle e_1, \cdots, e_N \rangle$

このとき

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \cdots & \hat{e}_N \end{pmatrix} = \overline{W} \text{ である}$$

巡回行列 $C = \begin{pmatrix} c_0 & c_{N-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & & & c_2 \\ & & \ddots & & \\ c_{N-2} & & & & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{pmatrix}$

の対角化：$w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ として

$$\overline{W} = \begin{pmatrix} w^{-0\,0} & w^{-1\,0} & \cdots & w^{-(N-1)\,0} \\ w^{-0\,1} & w^{-1\,1} & \cdots & w^{-(N-1)\,1} \\ & & \ddots & \\ w^{-0\,(N-1)} & w^{-1\,(N-1)} & \cdots & w^{-(N-1)\,(N-1)} \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$\overline{W}$ は正則で $\overline{W} C \overline{W}^{-1}$ は対角行列になる

$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ $\quad \|(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$F \quad \begin{array}{ccc} C(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty\} \\ f & \longmapsto & \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dx\right)_{n\in\mathbb{Z}}}_{= \hat{f}(n)} \end{array}$$

$$\boxed{\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2}$$

全射

L^2 空間

準同型定理の気分で $\ell^2(\mathbb{Z}) = \boxed{C(\mathbb{T}) / \ker F}$ ？

定義

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & \\ t_1 & t_0 & \\ & & \end{pmatrix}$$ の形の

行列を<u>Toeplitz 行列</u>という

☆ 数列 $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ で定まる

• $\varphi \in C(\mathbb{T})$ に対して

$$\hat{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi}\int \varphi(x)\, e^{-inx}\, dx \quad (n\in\mathbb{N})$$

として 以下のToeplitz行列を考える：

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}(0) & \hat{\varphi}(-1) & \\ \hat{\varphi}(1) & \hat{\varphi}(0) & \cdot \\ & & \end{pmatrix}$$

• $S \in C(\mathbb{T}),\ S(z) = z \ (z\in\mathbb{T}) \longrightarrow S^n(z) = z^n$

$S(e^{ix}) = e^{ix} \ (x\in[0,2\pi))$ $\quad (n\in\mathbb{N}_{\geq 0},\ z\in\mathbb{T})$

$$\hat{S}(n) \overset{\text{by def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int S(x)\, e^{-inx} dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int e^{ix} e^{-inx}\, dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int e^{i(1-n)x}\, dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(1-n)x}}{1-n}\right]_{x=0}^{2\pi}$$
$$= \frac{e^{i(1-n)2\pi} - e^0}{2\pi(1-n)} = 0 \quad (n \neq 1)$$

$$\hat{S}(1) \overset{\text{by def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int S(x)\, e^{-ix}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int e^{ix} e^{-ix}\, dx = 1$$

$$T_S = \begin{pmatrix} 0 & & O \\ 1 & 0 & \\ & 1 & \ddots \\ O & & \end{pmatrix}$$

$$T_{S^n} = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} n\text{コ} & & O \\ 1 & \ddots & \\ O & & \end{pmatrix} = (T_S)^n,$$

$$T_{S^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & 0 & 1 & \\ O & & \ddots & \end{pmatrix} = (T_S)^*,\quad T_{(S^*)^n} = \begin{pmatrix} \overbrace{0\ 0\ \cdots\ 0}^{n\text{コ}} & 1 & O \\ & & \ddots \\ O & & \end{pmatrix} = (T_{S^*})^n$$

$S^*(z) = \overline{z} = \frac{1}{z} \quad (z\in\mathbb{T})$

定義

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & \\ t_1 & t_0 & \\ & & \end{pmatrix}$$ の形の

行列を<u>Toeplitz 行列</u>という

☆ 数列 $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ で定まる

- $\varphi \in C(\mathbb{T})$ に対して

$$\hat{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi}\int \varphi(x)e^{-inx}dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

として 以下のToeplitz 行列を考える：

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}(0) & \hat{\varphi}(-1) & \\ \hat{\varphi}(1) & \hat{\varphi}(0) & \cdot \\ & & \end{pmatrix}$$

定義

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & & 0 \\ & a_1 & \\ 0 & & a_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}$$

$\{T_\varphi \mid \varphi \in C(\mathbb{T})\}$ と K で

生成される C^* 環を

<u>Toeplitz 環</u> という

☆ Toeplitz 環は T_z で

生成される C^* 環

(2番目の定義)

☆ Toeplitz 環に

K での同一視を

かませると $C(\mathbb{T})$！

Toeplitz 環は

行列環

連続関数環

という C^* 環の2大

具体例をそなえ持つ

大事な例！

参考文献など

戸松玲治「作用素環論入門」共立出版 … 全体的に参考にした。

$\boxed{1章}$

Joseph A Gallian "Contemporary Abstract Algebra"

Richard A Dean, "Elements of Abstract Algebra" (Wiley, 1967), pp 30–31

Stack Exchange "Is there an idempotent element in a finite semigroup?"
https://math.stackexchange.com/questions/353028/is-there-an-idempotent-element-in-a-finite-semigroup

星明考「群論序説」日本評論社

$\boxed{2章}$

斉藤正彦 線型代数演習 東京大学出版会

山本哲朗 行列解析の基礎 −Advanced 線形代数− サイエンス社

$\boxed{3章}$

Anton Cox "CHAPTER 1 Algebras and modules" Homepage
http://www.staff.city.ac.uk/a.g.cox/LTCC/Week1.pdf

Gerald B Folland, "Real Analysis Modern Techniques and Their Applications"

日合文雄・柳研二郎「ヒルベルト空間と線型作用素」 オーム社

堀田良之「代数入門 -群と加群-」裳華房

$\boxed{4章}$

Gerald B Folland, "Fourier Analysis and Its Applications" AMS, 2009

Hideki Inoue "Toeplitz operators and their applications", 2015
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~richard/teaching/f2015/Inoue.pdf

Makoto Yamashita "テープリッツ環 (Toeplitz algebra) 2012
https://www.impan.pl/~pmh/teach/intro4/lecture7.pdf

cuttlefish_math "離散フーリエ変換について」 2020 Mathlog
https://mathlog.info/articles/956