速習！ 第一不完全性定理

いことんど

October 21, 2024

概要

定理の主張

Theorem (第一不完全性定理)

すべての無矛盾な *PA* の *r.e.* 拡大理論 T に対して, ある論理式 R があって, R は T で証明も反証もできない.

平たく言うと ......

我々の自然数論を含む, バグっていない, 複雑すぎない形式体系には, 証明も反証もできない自然数論の命題がある.

(そしてその命題は手計算で具体的に求められる)

準備

「証明も反証もできない」ことを証明する

ある命題が証明できることを証明するためには, ただその命題を証明すればよいが, 証明できないことを証明するのは一筋縄ではいかない (悪魔の証明！)

↓

我々の自然数論での営みを数学的対象にして,

その証明可能性を数学的に分析しよう！

注意

「反証できない」について

命題 A に対して

- A が証明できない
- A が反証できる (”A でない” が証明できる)

は異なる.

数学理論が矛盾していなければ,

「”A でない” が証明できる」ならば「A が証明できない」

と結論してもよいが, 逆はいえない.

もうひとつ注意

本講演の「自然数論」は, 高校数学における整数の分野 (の自然数部分) くらいの気持ちである.

形式化

我々の自然数論での営みを数学的対象にするためには, それを数学的に定式化する必要がある.
この作業や定式化した数学的対象を形式化という.

そのために, まずは我々の自然数論での営みを分析する.

自然数論の分析

「これは認められるよね」という命題から出発して, 妥当な推論を繰り返して定理を証明する.

形式化

命題の分析 i.

命題は次のもので構成されている.

- 「かつ」「または」「ならば」「でない」「すべての ◯◯ に対して」「ある ◯◯ が存在して」「◯◯ と ◯◯ は等しい」.
- 上の ◯◯ の中に入る変数.
- 自然数や, $\mathbb{N}$ 上の足し算や掛け算, 指数関数, 数の大小

以上をそれぞれ次のように形式化する.

論理記号	$\wedge, \vee, \to, \neg, \forall, \exists, =$
変数	$v_0,\ v_1,\ \ldots$
算術の言語	定数記号 $\bar{0}, \bar{1}$,
	2 変数関数記号 $+, \cdot, \mathrm{Exp}$
	2 変数関係記号 $<$

命題の分析 2.

自然数論の命題は,「かつ」「または」「ならば」「でない」「すべての ○○ に対して」「ある ○○ が存在して」で繋がれていて, それらを分解していくと, 最終的に方程式や不等式にたどり着く.

x は素数である

$x > 1$ かつ (すべての y に対して ((ある z が存在して $(x = y \cdot z)$) ならば ($y = 1$ または $y = x$)))

逆に, 方程式と不等式を「かつ」〜「ある ○○ が存在して」で繋いでいけば, (およそ人間が書こうとは思わないものも含めて) あらゆる命題を書くことができる.

方程式や不等式の右辺と左辺を 項 として形式化する.

Definition (項)

項をつぎのように再帰的に定義する.

1. 変数と $\overline{0}$, $\overline{1}$ はすべて項である.
2. $t_1,\ t_2$ が項のとき, $+(t_1,\ t_2)$ と $\cdot(t_1,\ t_2)$, $\mathrm{Exp}(t_1,\ t_2)$ も項である.

- 定数記号 $\overline{0}$ と $\overline{1}$ はそれぞれ "ゼロ" と "イチ" の形式化.
- それ以外の自然数 n は $\overline{n} :\equiv \underbrace{\overline{1} + (\overline{1} + (\cdots))}_{\overline{1}\text{ が } n \text{ 個}}$ と形式化する.

次に方程式と不等式を形式化する.

Definition (原子論理式)

t と s が項のとき $t = s$ と $t < s$ を原子論理式という.

原子論理式の例

- $\overline{1} = \overline{0}$
- $\overline{2} \cdot v_0 = \overline{4}$
- $\overline{3} \cdot (v_1 + \overline{2} \cdot v_2) < \overline{1000}$

形式化

最後に, 命題を論理式として形式化する.

Definition (論理式)

論理式をつぎのように再帰的に定義する.

1. 原子論理式は論理式である.
2. φ と ψ が論理式, x が変数であるとき, $(\varphi) \land (\psi)$, $(\varphi) \lor (\psi)$, $(\varphi) \to (\psi)$, $\neg(\varphi)$, $\forall x(\varphi)$, $\exists x(\varphi)$ は論理式である.

論理式の例

$(1 < v_0) \land (\forall v_1((\exists v_2(v_0 = v_1 \cdot v_2)) \to ((v_1 = \overline{1}) \lor (v_1 = v_0))))$
は論理式である.
(これはさっきの命題「x は素数である」の形式化！)

約束事

- 括弧は可読性を失わない範囲で省略する.
- 論理式 $\varphi,\ \psi$ と変数 $x,\ y$ に対して, 次の略記を導入する.

略記	正式な記法
$(\varphi) \leftrightarrow (\psi)$	$((\varphi) \to (\psi)) \wedge ((\psi) \to (\varphi))$
$\forall x < y(\varphi)$	$\forall x((x < y) \to (\varphi))$
$\forall x \leq y(\varphi)$	$\forall x(((x < y) \vee (x = y)) \to \varphi)$

形式化

論理式にまつわるいくつかの概念を定義する.

Definition (自由変数, 束縛変数)

論理式 φ の中に変数記号 x が現れていて, なおかつこの x に作用する $\forall x$ や $\exists x$ があるとき, この x を束縛 (された) 変数という. 束縛されていない変数記号を自由変数という.

- 論理式 φ の自由変数 x に注目するとき, $\varphi(x)$ とかく.
- 自由変数は,「任意にとって固定した x」の形式化

Definition (文)

自由変数を持たない論理式を文という.

自由変数, 束縛変数の例

論理式

$(1 < v_0) \land (\forall v_1((\exists v_2(v_0 = v_1 \cdot v_2)) \to ((v_1 = \overline{1}) \lor (v_1 = v_0))))$

において, v_0 は自由変数, v_1 と v_2 は束縛変数.

Definition (代入)

論理式 $\varphi(x)$ の x を項 t に置き換えたものを $\varphi(t)$ とかく.
$\varphi(t)$ も論理式になる.

この操作を代入という.

代入の例

上の論理式の自由変数 v_0 に $\overline{2}$ を代入すると
$(1 < \overline{2}) \land (\forall v_1((\exists v_2(\overline{2} = v_1 \cdot v_2)) \to ((v_1 = \overline{1}) \lor (v_1 = \overline{2}))))$ となる. これは「2 は素数である」の形式化.

形式化

(再掲) 自然数論の分析

「これは認められるよね」という命題から出発して, 妥当な推論を繰り返して定理を証明する.

出発点となる命題の集まりを, つぎのように形式化する.

Definition (理論)

文からなる集合を理論という. 文 φ が理論 T の要素であるとき, φ は T の公理であるという.

特に, 自然数論において「これは認められるよね」という命題を形式化した文の集合を PA という.
(PA のリストは付録参照.)

形式化

証明の分析

命題 A の証明は, 葉が出発点となる命題か, 証明中で閉じられた仮定で, 節が推論, 根が命題 A の木である.

例

命題 A と命題 B が証明できたとき,
A かつ B が証明できると推論してよい.

$$\left.\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A\text{ の証明} & B\text{ の証明} \\ \vdots & \vdots \\ A & B \end{array} \\ \hline A\text{ かつ }B \end{array}\right\} A\text{ かつ }B\text{ の証明}$$

「証明中で閉じられた仮定」

「すべての 4 の倍数は 2 の倍数である」の証明を考える.

x を任意にとって固定する.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x \text{ が } 4 \text{ の倍数と仮定}}{\vdots}}{x \text{ は } 2 \text{ の倍数である}}}{x \text{ が } 4 \text{ の倍数ならば } 2 \text{ の倍数である}}}{\text{すべての } 4 \text{ の倍数は } 2 \text{ の倍数である}}$$

仮定「x が 4 の倍数」を ” 閉じる”

「x が 4 の倍数ならば 2 の倍数である」と推論した以降は,

「x が 4 の倍数である」という仮定は使わない.

形式化

推論を推論規則として形式化する. 推論規則のリストは付録参照.

推論規則の例

φ, ψ を論理式とする.

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \land \psi}$$

を ($\land$ i) 規則,

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} (\to \mathrm{i})$$

を ($\to$ i) 規則という. i は introduction の頭文字.

証明を証明図として形式化する.

Definition (証明図)

T を理論, φ を論理式とする.
T を仮定とした φ の証明図とは, 葉が T の公理か証明図中で閉じられた仮定で, 節が推論規則, 根が φ の木である.

理論 T を仮定とした φ の証明図が存在するとき, $T \vdash \varphi$ と書く.

PA $\vdash \neg(\overline{0} = \overline{1})$ の証明図を付録に例示した.

再帰理論の初歩 1.

(再掲) 第一不完全性定理を平たく言うと ......

我々の自然数論を含む, バグっていない, 複雑すぎない形式体系には, 証明も反証もできない自然数論の命題がある.

(そしてその命題は手計算で具体的に求められる.)

形式体系の複雑さや,「手計算で求められるか？」の指標に使えるのが再帰理論である.

本節では, 自然数上の関数や関係について述べる.

- 自然数の列 $n_0, \ldots, n_{m-1}$ を $\vec{n}$ で表す.
  $m = 0$ のとき, この列は空列であると約束する.

再帰理論の初歩

Definition (原子関数)

- 0-変数関数 $Z() = 0$ をゼロ関数という.
- 1-変数関数 $S(n) = n + 1$ を後者関数という.
- $i < k$ なる各 $i,\ k$ に対して $P_i^k(n_0,\ \ldots,\ n_i,\ \ldots,\ n_{k-1}) = n_i$ を射影関数という.

Definition (関数合成)

k-変数関数 $g_0,\ \ldots,\ g_{m-1}$ と m-変数関数 h に対して,

$$f(\vec{n}) = h(g_0(\vec{n}),\ \ldots,\ g_{m-1}(\vec{n}))$$

で得られる関数 f は, $g_0,\ \ldots,\ g_{m-1}$ と h から関数合成で得られるという.

Definition (原始再帰)

k-変数関数 g と $k+2$-変数関数 h に対して

$$f(\vec{n},\ m) = \begin{cases} g(\vec{n}) & (m = 0 \text{ のとき.}) \\ h(\vec{n},\ m-1,\ f(\vec{n},\ m-1)) & (m > 0 \text{ のとき.}) \end{cases}$$

で得られる関数 f は, g と h から原始再帰で得られるという.

Definition (原始再帰的関数)

原始再帰的関数のクラスをつぎのように再帰的に定める.

1. ゼロ関数, 後者関数, 射影関数は原始再帰的関数である.
2. 原始再帰的関数から関数合成で得られる関数も原始再帰的関数である.
3. 原始再帰的関数から原始再帰で得られる関数も原始再帰的関数である.

再帰理論の初歩

原始再帰的関数の気持ち

- 必ず計算できて, かつ引き数から「どれくらい頑張ればいいか」が分かるような計算
- 高校数学でならう計算は原始再帰的関数.
- 高校数学でならう操作は原始再帰的であることについて閉じている.
- 再帰的な操作と相性が良い.

- 足し算, 掛け算, 指数関数, 累積掛け算, 素因数分解 ...
- 倍数の関係, 「n は素数である」

Definition (特性関数)

自然数上の関係 $R(\vec{n})$ に対して, 次を R の特性関数という.

$$f(\vec{n}) = \begin{cases} 1 & (R(\vec{n}) \text{ が成立するとき}) \\ 0 & (R(\vec{n}) \text{ が成立しないとき}) \end{cases}$$

Definition (原始再帰的関係)

自然数上の関係が原始再帰的関係であるとは,
その特性関数が原始再帰的関数であることをいう.

Definition

自然数の集合 X が原始再帰的であるとは,
関係「n は X の要素」が原始再帰的であることをいう.

概要

準備

- 形式体系
- 再帰理論の初歩
- ゲーデル数

「準備」を組み合わせる

- 形式化と再帰理論
- ゲーデル数と再帰理論

重要な補題

第一不完全性定理の証明

自然数の有限列に対して, 自然数を被りなく対応させることができる.

Definition (有限列のコード化)

自然数の有限列 $(n_0, \ldots, n_{m-1})$ に対して,

$$\begin{aligned}\langle n_0, \ldots, n_{m-1}\rangle &:= \prod_{i<m} p_i^{1+n_i} \\ &= p_0^{1+n_0} \cdot p_1^{1+n_1} \cdots p_{m-1}^{1+n_{m-1}}.\end{aligned}$$

ただし, p_i は i 番目の素数. また $\langle\rangle := 1$ と約束する.

$\langle\vec{n}\rangle$ を $(\vec{n})$ のコードという.

ゲーデル数

コード化の例

- $\langle 1,\ 2,\ 3,\ 4\rangle = 2^{1+1}\cdot 3^{1+2}\cdot 5^{1+3}\cdot 7^{1+4} = 1134472500$
- $2500 = 2^{1+1}\cdot 3^{0}\cdot 5^{1+3}$ はどの有限列のコードでもない.

素因数の指数に $+1$ しているのは, 最後に連なる 0 の数が異なる有限列のコードを, 別のものにするため.
もし $+1$ されていなかったら, 例えば

- $\langle 2\rangle = 2^2 = 4$
- $\langle 2,\ 0\rangle = 2^2\cdot 3^0 = 4$
- $\langle 2,\ 0,\ 0\rangle = 2^2\cdot 3^0\cdot 5^0 = 4$

となって区別できなくなってしまう.

ゲーデル数

自然数の有限列のコード化を用いて, 項や論理式, 証明にも自然数を被りなく対応させることができる.

Definition (記号のゲーデル数)

論理記号や変数, 言語に対して, 次のように自然数を対応させる. 各記号に対応させた自然数を, その記号のゲーデル数という.

$\wedge$	$\vee$	$\to$	$\neg$	$\forall$	$\exists$	$=$	0	1	$+$	$\cdot$	Exp	$<$	v_i
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	p_{14+i}

ただし, p_j は j 番目の素数.

記号に対して素数を対応させていることを押さえておけば OK！

Definition (項のゲーデル数)

項 t のゲーデル数 $\ulcorner t \urcorner$ を次のように再帰的に定める.

1. $\ulcorner \overline{0} \urcorner = 19$, $\ulcorner \overline{1} \urcorner = 23$, $\ulcorner v_i \urcorner = p_{14+i}$
2. $t_1,\ t_2$ が項で, f が算術の言語の関数記号のとき,

$$\ulcorner f(t_1,\ t_2) \urcorner = \langle \ulcorner f \urcorner, \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$$

有限列のコード化を用いて, 項の定義に沿って再帰的に定義されていることを押さえておけば OK！

ゲーデル数

Definition (論理式のゲーデル数)

論理式 φ のゲーデル数 $\ulcorner\varphi\urcorner$ を次のように再帰的に定める.

1. 原始論理式について. t_1, t_2 を項とする.
   - $\ulcorner t_1 = t_2\urcorner = \langle\ulcorner t_1\urcorner, \ulcorner=\urcorner, \ulcorner t_2\urcorner\rangle$
   - $\ulcorner t_1 < t_2\urcorner = \langle\ulcorner t_1\urcorner, \ulcorner<\urcorner, \ulcorner t_2\urcorner\rangle$
2. φ と ψ が論理式で, x が変数記号のとき,
   - $\ulcorner(\varphi) \wedge (\psi)\urcorner = \langle\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\wedge\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\rangle$
   - $\ulcorner(\varphi) \vee (\psi)\urcorner = \langle\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\vee\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\rangle$
   - $\ulcorner(\varphi) \to (\psi)\urcorner = \langle\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\to\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\rangle$
   - $\ulcorner\neg(\varphi)\urcorner = \langle\ulcorner\neg\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner\rangle$
   - $\ulcorner\forall x(\varphi)\urcorner = \langle\ulcorner\forall\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner\rangle$
   - $\ulcorner\exists x(\varphi)\urcorner = \langle\ulcorner\exists\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner\rangle$

有限列のコード化を用いて, 論理式の定義に沿って再帰的に定義されていることを押さえておけば OK！

ゲーデル数

証明図にも, ゲーデル数を有限列のコード化を使って再帰的に定義する.
完全な定義は付録参照.

証明図のゲーデル数の例

φ が証明図 (すなわち φ が公理) のとき, $[\varphi] := \langle 0,\ \varphi \rangle$

$$(\wedge\ \mathrm{i}) : \left[\dfrac{\begin{matrix} D_0 & & D_1 \\ \varphi & & \psi \end{matrix}}{\varphi \wedge \psi} \right] = \langle \langle 0,\ \ulcorner \wedge \urcorner \rangle,\ \left[\begin{matrix} D_0 \\ \varphi \end{matrix} \right],\ \left[\begin{matrix} D_1 \\ \psi \end{matrix} \right],\ \ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner \rangle$$

$$(\to \mathrm{i}) : \left[\dfrac{\begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \to \psi} \right] = \langle \langle 0,\ \ulcorner \to \urcorner \rangle,\ \left[\dfrac{D}{\varphi} \right],\ \ulcorner \varphi \to \psi \urcorner \rangle$$

「準備」を組み合わせる

概要

準備

形式体系

再帰理論の初歩

ゲーデル数

「準備」を組み合わせる

形式化と再帰理論

ゲーデル数と再帰理論

重要な補題

第一不完全性定理の証明

Definition (関係の表現)

論理式 $\varphi(\vec{x})$ が PA 上で関係 $R(\vec{n})$ を表現するとは,
すべての自然数 $\vec{n}$ に対して,

$$R(\vec{n}) \text{ が成立する} \implies \mathsf{PA} \vdash \varphi(\overline{\vec{n}})$$
$$R(\vec{n}) \text{ が成立しない} \implies \mathsf{PA} \vdash \neg\varphi(\overline{\vec{n}})$$

となることをいう.

Definition (関数の表現)

論理式 $\psi(\vec{x},\, y)$ が PA 上で関数 $f(\vec{n})$ を表現するとは,
すべての自然数 $\vec{n}$ に対して,

$$\mathsf{PA} \vdash \forall y(y = \overline{f(\vec{n})} \leftrightarrow \psi(\overline{\vec{n}},\, y))$$

が成立することをいう.

次は,「PA は原始再帰的な操作ができる」という気持ちの定理.

Theorem (表現定理)

- すべての原始再帰的関係 $R(\vec{n})$ に対して, ある論理式 $\varphi(\vec{x})$ が存在して, φ は PA 上で $R(\vec{x})$ を表現する.
- すべての原始再帰的関数 $f(\vec{n})$ に対して, ある論理式 $\psi(\vec{x},\, y)$ が存在して, ψ は PA 上で $f(\vec{x})$ を表現する.

証明.

- 原始再帰的関数について証明できれば, 関係については, その特性関数を f として PA 上で f を表現する論理式を $\psi(x,\, y)$ とすれば, $\psi(x,\, \overline{1})$ が目的を果たす.
- 原始再帰的関数の構成に関する帰納法で示す. □

ゲーデル数と再帰理論

有限列に対する様々な関係や操作を, コード化を通じて原始再帰的に扱える.
例えば次の関数や関係は原始再帰的である.

- 各 m について, 長さ m の有限列のコード化 $(n_0, \ldots, n_{m-1}) \mapsto \langle n_0, \ldots, n_{m-1} \rangle$.
- 関係 $Seq(n)$:「n は有限列のコードである」.
- n が有限列のコードであるとき, その長さを返す関数 $lh(n)$.
- n が有限列のコードであるとき, その i 番目を返す関数 $(n)_i$.

論理式とそのゲーデル数を同一視すると, 理論の複雑さを再帰理論を用いて測ることができる.

Definition (原始再帰的理論)

理論 T が原始再帰的であるとは,
集合 $\{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi \in T\}$ が原始再帰的であることをいう.

ゲーデル数は有限列のコード化を用いて再帰的に定義されていた.
$\rightsquigarrow$ 論理式に対する様々な関係や操作を,
ゲーデル数を通じて原始再帰的に扱える！

- 次は原始再帰的関数

$$f(n) = \begin{cases} \ulcorner \varphi(\overline{n}) \urcorner & \begin{array}{l} n \text{ が自由変数を 1 つしか持たない} \\ \text{論理式 } \varphi(x) \text{ のゲーデル数のとき.} \end{array} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

重要な補題

不動点定理

表現定理と原始再帰的関数 $f(n) = \begin{cases} \ulcorner \varphi(\overline{n}) \urcorner & (n = \ulcorner \varphi(x) \urcorner) \\ 0 & (else) \end{cases}$

を使うと, 次が分かる.

Theorem (不動点定理)

すべての自由変数をひとつしか持たない論理式 $\varphi(x)$ に対して, ある文 ψ が存在して

$$\mathsf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$$

となる.

以降, $\varphi(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$ を $\varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$ のように, 論理式のゲーデル数の数項を単にゲーデル数の表記で書く.

不動点定理の証明

証明.

$f(n)$ は原始再帰的関数なので, 表現定理により $f(n)$ を表現する論理式 $\chi(x,\ y)$ が存在する. すべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\mathsf{PA} \vdash \forall y(y = \overline{f(n)} \leftrightarrow \chi(\overline{n},\ y)).$$

$\psi(x) :\equiv \exists y(\chi(x,\ y) \wedge \varphi(y))$ とする. $\psi(x)$ は自由変数がひとつなので, f の定義から $f(\ulcorner\psi(x)\urcorner) = \ulcorner\psi(\ulcorner\psi(x)\urcorner)\urcorner$. すると

$$\begin{aligned}
\mathsf{PA} \vdash \varphi\left(\ulcorner\psi\left(\ulcorner\psi(x)\urcorner\right)\urcorner\right) &\leftrightarrow \exists y\left(y = \ulcorner\psi\left(\ulcorner\psi(x)\urcorner\right)\urcorner \wedge \varphi(y)\right) \\
&\leftrightarrow \exists y\left(y = \overline{f\left(\ulcorner\psi(x)\urcorner\right)} \wedge \varphi(y)\right) \\
&\leftrightarrow \exists y\left(\chi\left(\ulcorner\psi(x)\urcorner,\ y\right) \wedge \varphi(y)\right) \\
&\equiv \psi\left(\ulcorner\psi(x)\urcorner\right)
\end{aligned}$$

となって, $\psi\left(\ulcorner\psi(x)\urcorner\right)$ が目的を果たす. $\square$

第一不完全性定理の証明

目標

Theorem (ゲーデルの第一不完全性定理)

すべての ω 無矛盾な *PA* の原始再帰的拡大理論 T に対して, ある文 G があって, G は T で証明も反証もできない.

Theorem (ゲーデル・ロッサーの第一不完全性定理)

すべての無矛盾な *PA* の原始再帰的拡大理論 T に対して, ある文 R があって, R は T で証明も反証もできない.

Theorem (ゲーデル・ロッサーの第一不完全性定理の拡張)

すべての無矛盾な *PA* の *r.e.* 拡大理論 T に対して, ある文 R があって, R は T で証明も反証もできない.

必要な諸概念の定義

Definition (拡大理論)

理論 T が PA の拡大理論であるとは, すべての論理式 φ に対して, $\mathrm{PA} \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$ となることをいう.

Definition (原始再帰的拡大)

理論 T が PA の原始再帰的拡大であるとは, T が原始再帰的理論で, かつ PA の拡大であることをいう.

Definition (無矛盾)

理論 T が無矛盾であるとは, すべての論理式 φ に対して
$T \nvdash \varphi$ または $T \nvdash \neg\varphi$ のどちらかが成立することをいう.

Definition (ω 無矛盾)

理論 T が ω 無矛盾であるとは, すべての論理式 φ に対して

$$\text{すべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } T \vdash \neg\varphi(\overline{n}) \text{ ならば, } T \nvdash \exists x \varphi(x)$$

となることをいう.

ω 無矛盾性は技術的な観点から導入されたもの (らしい).

Theorem

理論 T が ω 無矛盾なら, 無矛盾である.

証明.

理論 T が ω 無矛盾だが無矛盾でないとする. するとある論理式 ψ が存在して $T \vdash \psi$ かつ $T \vdash \neg\psi$ となる. ここで x を ψ の自由変数でない変数として $\varphi(x) :\equiv \neg\psi \vee \neg(x = x)$ とする.
$T \vdash \psi$ と, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $T \vdash \overline{n} = \overline{n}$ なので,
$T \vdash \psi \wedge \overline{n} = \overline{n}$. 故にすべての自然数 n に対して $T \vdash \neg\varphi(\overline{n})$.
すると ω 無矛盾性から $T \nvdash \exists x(\neg\psi \vee \neg(x = x))$.
これは $T \nvdash \neg\psi \vee \exists x(\neg(x = x))$ と書き換えられるが,
$T \vdash \neg\psi$ なのでおかしい. $\square$

証明可能性述語

原始再帰的理論 T に対して, 2 変数関係 $Prf_T(n, m)$:
「m は T を仮定とした論理式 n の証明図のゲーデル数」
は原始再帰的.

Definition (証明可能性述語)

原始再帰的理論 T に対して, 論理式 $\mathrm{Prf}_T(x, y)$ が PA 上で関係 $Prf_T(n, m)$ を表現するとする.
(この論理式の存在は表現可能定理によって保証される.)

このとき, 論理式

$$\mathrm{Pr}_T(x) :\equiv \exists y \mathrm{Prf}_T(x, y)$$

を T の証明可能性述語という.

$\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ は,「T における φ の証明図がある」すなわち「T は φ を証明できる」という意味.

Theorem

理論 T を PA の原始再帰的拡大とする. すべての論理式 φ について

1. $T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$
2. T が ω 無矛盾で $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ ならば $T \vdash \varphi$.

1. の証明

$T \vdash \varphi$ とすると, ある自然数 n が存在して $Prf_T(\ulcorner \varphi \urcorner, n)$ が成立する. すると PA $\vdash \mathrm{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, \overline{n})$ となり
PA $\vdash \exists y(\mathrm{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, y)) \equiv \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
T は PA の拡大なので, $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$. $\square$

2. の証明

T が ω 無矛盾で $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ だが $T \nvdash \varphi$ とする. するとすべての自然数 n に対して $Prf_T(\ulcorner\varphi\urcorner, n)$ が成立しない. 故にすべての自然数 n に対して PA $\vdash \neg\mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, \overline{n})$. T は PA の拡大なので, $T \vdash \neg\mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, \overline{n})$. すると ω 無矛盾性から
$T \nvdash \exists y \mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, y) \equiv \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$. これは $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ に反する.

Definition (ゲーデル文)

原始再帰的理論 T の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ と不動点定理から得られる文 G

$$\mathsf{PA} \vdash G \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$$

を T のゲーデル文という.

T のゲーデル文 G は「G は T で証明できない」という意味の文.

ゲーデルの第一不完全性定理

Theorem

すべての PA の ω 無矛盾な原始再帰的拡大理論 T は, そのゲーデル文 G を証明も反証もできない.

証明.

$T \vdash G$ とすると, 先の定理の 1. から $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$. するとゲーデル文の定義から $T \vdash \neg G$. これは T の ω 無矛盾性 (特に無矛盾性) に反する.

$T \vdash \neg G$ とすると, ゲーデル文の定義から $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$. すると先の定理の 2. によって $T \vdash G$. これは再び T の ω 無矛盾性 (特に無矛盾性) に反する. $\square$

目標

Theorem (ゲーデルの第一不完全性定理)

すべての ω 無矛盾な *PA* の原始再帰的拡大理論 T に対して, ある文 G があって, G は T で証明も反証もできない.

Theorem (ゲーデル・ロッサーの第一不完全性定理)

すべての無矛盾な *PA* の原始再帰的拡大理論 T に対して, ある文 R があって, R は T で証明も反証もできない.

Theorem (ゲーデル・ロッサーの第一不完全性定理の拡張)

すべての無矛盾な *PA* の *r.e.* 拡大理論 T に対して, ある文 R があって, R は T で証明も反証もできない.

原始再帰的理論 T に対して, 2 変数関係 $DisPrf_T(n,\ m)$:
「m は T を仮定として論理式 n を反証する証明図のゲーデル数」
は原始再帰的.

Definition (ロッサー証明可能性述語)

原始再帰的理論 T に対して, 論理式 $\mathrm{Prf}_T(x,\ y),\ \mathrm{DisPrf}_T(x,\ y)$ がそれぞれ PA 上で関係 $Prf_T(n,\ m)$ と $DisPrf_T(n,\ m)$ を表現するとする.
(これらの論理式の存在は表現可能定理によって保証される.)

このとき, 論理式

$$\mathrm{Pr}_T^R(x) :\equiv \exists y(\mathrm{Prf}_T(x,\ y) \land \forall z < y \neg \mathrm{DisPrf}_T(x,\ z))$$

を T のロッサー証明可能性述語という.

無矛盾性とロッサー証明可能性述語

Theorem

理論 T が無矛盾な PA の原始再帰的拡大であるとき,

1. $T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \mathrm{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$
2. $T \vdash \neg\varphi$ ならば $T \vdash \neg\mathrm{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$

1. の証明

1. $T \vdash \varphi$ とする. すると, ある自然数 m が存在して $Prf_T(\ulcorner \varphi \urcorner, m)$ が成立する. 故に PA $\vdash \mathrm{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, \overline{m})$.
   また, 今 T は無矛盾なので, $T \nvdash \neg\varphi$ である. すると任意の自然数 m' に対して $DisPrf(\ulcorner \varphi \urcorner, m')$ は成立しない. 故に特に m 未満の m' について PA $\vdash \neg\mathrm{DisPrf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, \overline{m'})$. このとき PA $\vdash \forall z < \overline{m} \neg\mathrm{DisPrf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, z)$ が分かる.

無矛盾性とロッサー証明可能性述語

1. の証明 (続き)

すると PA $\vdash \mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, \overline{m}) \land \forall z < \overline{m} \neg\mathrm{DisPrf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, z)$ となり,
PA $\vdash \exists y(\mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, y) \land \forall z < y \neg\mathrm{DisPrf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, z))$ すなわち
PA $\vdash \mathrm{Pr}^R_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ が分かる. $\square$

無矛盾性とロッサー証明可能性述語

2. の証明

$\mathrm{Pr}_T^R(x)$ に加えて, 次の論理式を考える.

- $\mathrm{Pr}_T^R(x) :\equiv \exists y(\mathrm{Prf}_T(x,\ y) \land \forall z < y \neg \mathrm{DisPrf}_T(x,\ z))$
- $\mathrm{Pr}_T^\perp(x) :\equiv \exists y(\mathrm{DisPrf}_T(x,\ y) \land \forall z \leq y \neg \mathrm{Prf}_T(x,\ z))$ [1]

1. と全く同様にして,

$$T \vdash \neg\varphi \text{ ならば } T \vdash \mathrm{Pr}_T^\perp(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

が証明できる. あとは PA $\vdash \neg(\mathrm{Pr}_T^\perp(\ulcorner \varphi \urcorner) \land \mathrm{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner))$ を示せば, $T \vdash \mathrm{Pr}_T^\perp(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \neg \mathrm{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$ が分かり, ($\to$ e) 規則によって目的が果たされる.

[1] 2024 年 10 月 21 日追記：講演時のスライドは証明が間違っていたので, 修正しました.

2. の証明 (続き)

PA $\vdash \neg(\mathrm{Pr}_T^{\perp}(\ulcorner\varphi\urcorner) \land \mathrm{Pr}_T^{R}(\ulcorner\varphi\urcorner))$ について.

PA で次を議論すれば良い.
背理法で示す.

- $\mathrm{Pr}_T^{R}(\ulcorner\varphi\urcorner) :\equiv \exists y(\mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner,\ y) \land \forall z < y \neg \mathrm{DisPrf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner,\ z))$
- $\mathrm{Pr}_T^{\perp}(\ulcorner\varphi\urcorner) :\equiv \exists y(\mathrm{DisPrf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner,\ y) \land \forall z \leq y \neg \mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner,\ z))$

の両方が成立すると仮定する. y^R を $\mathrm{Pr}_T^{R}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ が存在を主張する y. $y^{\perp}$ を $\mathrm{Pr}_T^{\perp}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ が存在を主張する y とする.
全順序性から $y^R \leq y^{\perp}$ または $y^{\perp} < y^R$ である.

2. の証明 (続き)

$y^R \leq y^\perp$ とすると, $\mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, y^R)$ だが $\forall z \leq y^\perp \neg\mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, z)$ なのでおかしい.

$y^\perp < y^R$ とすると, $\mathrm{DisPrf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, y^\perp)$ だが $\forall z < y^R \neg\mathrm{DisPrf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, z)$ なのでおかしい.

故に $\mathrm{Pr}_T^\perp(\ulcorner\varphi\urcorner)$ かつ $\mathrm{Pr}_T^R(\ulcorner\varphi\urcorner)$ ではない. $\square$

Definition (ロッサー文)

原始再帰的理論 T のロッサー証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T^R(x)$ と不動点定理によって得られる文 R

$$\mathsf{PA} \vdash R \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_T^R(\ulcorner R \urcorner)$$

を T のロッサー文という

ゲーデル・ロッサーの第一不完全性定理

Theorem

すべての PA の無矛盾な原始再帰的拡大理論 T は, そのロッサー文 R を証明も反証もできない.

証明.

$T \vdash R$ とすると, 先の定理の 1. から $T \vdash \mathrm{Pr}_T^R(\ulcorner R \urcorner)$. するとロッサー文の定義から $T \vdash \neg R$. これは T の無矛盾性に反する.

$T \vdash \neg R$ とすると, 先の定理の 2. から $T \vdash \neg \mathrm{Pr}_T^R(\ulcorner R \urcorner)$. するとロッサー文の定義から $T \vdash R$ となり, 再び T の無矛盾性に反する. □

目標

Theorem (ゲーデルの第一不完全性定理)

すべての ω 無矛盾な *PA* の原始再帰的拡大理論 T に対して, ある文 G があって, G は T で証明も反証もできない.

Theorem (ゲーデル・ロッサーの第一不完全性定理)

すべての無矛盾な *PA* の原始再帰的拡大理論 T に対して, ある文 R があって, R は T で証明も反証もできない.

Theorem (ゲーデル・ロッサーの第一不完全性定理の拡張)

すべての無矛盾な *PA* の *r.e.* 拡大理論 T に対して, ある文 R があって, R は T で証明も反証もできない.

Definition (r.e.)

自然数の集合 X が r.e. であるとは, ある原始再帰的関係 $R(n, m)$ が存在して, すべての n に対して

$$n \text{ は } X \text{ の要素} \iff \text{ある } m \text{ が存在して } R(n, m) \text{ が成立}$$

となることをいう.

- r.e. は recursively enumerable の略記.
  X の要素を枚挙する再帰的関数が存在することが r.e. の定義と同値になる.
  (再帰的関数の定義は付録参照)
- 原始再帰的集合は r.e. である.
  なぜなら原始再帰的集合 X に対して, $n \in X$ と, ある m が存在して ($n \in X$ かつ $m = m$) が同値になるから.

再帰理論の初歩再び

r.e. の気持ち

各自然数 n に対して,

$$\begin{tikzcd} \boxed{R(n,\ 0)\text{ は成立する？}} \arrow[r, "\text{Yes}"] \arrow[d, "\text{No}"] & n \in X \\ \boxed{R(n,\ 1)\text{ は成立する？}} \arrow[r, "\text{Yes}"] \arrow[d, "\text{No}"] & n \in X \\ \vdots & \end{tikzcd}$$

と確かめていくと,

- $n \in X$ のときには有限ステップで分かる.
  ただし何回目で分かるかは事前には分からない.
- $n \notin X$ のときにはいつまで続けても分からない. しかしどこかで止まるかもしれないので, 辞めるわけにもいかない.

Definition (r.e.)

理論 T が r.e. であるとは,
集合 $\{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi \in T\}$ が r.e. であることをいう.

Definition (PA の r.e. 拡大)

理論 T が PA の r.e. 拡大であるとは,
T が PA の拡大でかつ r.e. であることをいう.

Theorem (クレイグのトリック)

すべての *r.e.* 理論 T に対して, ある原始再帰的理論 T' が存在して, T と T' の証明できる論理式が同じになる.

証明.

r.e. の定義から, ある原始再帰的関係 $P(n, m)$ が存在して, すべての文 φ に対して

$$\varphi \in T \iff \text{ある } m \text{ が存在して} P(\ulcorner\varphi\urcorner, m)$$

となる. そこで, 理論 T' を

$$T' := \{\psi : \text{ある } m \text{ と } \varphi \text{ が存在して} \psi \equiv \overline{m} = \overline{m} \wedge \varphi \text{かつ} P(\ulcorner\varphi\urcorner, m)\}$$

とする. この T' が目的を果たす. □

第一不完全性定理の拡張

Theorem

すべての無矛盾な PA の *r.e.* 拡大理論 T に対して, ある文 R があって R は T で証明も反証もできない.

証明.

T に対してクレイグのトリックから取れる原始再帰的理論 T' を考えると, T' のロッサー文が目的を果たす文になる. $\square$

(時間があれば) モデルを使って理解しよう！

- ω 無矛盾性と証明可能性述語の関係
- 無矛盾性とロッサー証明可能性述語の関係

について, モデルを使って解説する.

以降は一階述語論理の完全性定理の知識を仮定する.

(時間があれば) モデルを使って理解しよう！

仮定・前提知識

- 以降, T は PA の原始再帰的拡大理論とする.
- すべての T のモデルは
  - 全順序.
  - $\mathbb{N}$ を始切片に持つ.

(時間があれば) ω 無矛盾性と証明可能性述語

ゲーデルの第一不完全性定理において, ω 無矛盾性：

$$\text{すべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } T \vdash \neg\varphi(\overline{n}) \text{ ならば, } T \nvdash \exists x \varphi(x)$$

が効いているのは, 途中の定理：
ω 無矛盾な理論 T に対して

$$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \text{ ならば } T \vdash \varphi.$$

この定理のモデルを使った別証明を与える.

(時間があれば) ω 無矛盾性と証明可能性述語

T を ω 無矛盾な理論：すべての論理式 ψ に対して

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $T \vdash \neg\psi(\overline{n})$ ならば $T \nvdash \exists x \psi(x)$

で, M を T のモデルとする. 先の定理の対偶：

$$T \nvdash \varphi \text{ ならば } T \nvdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$$

を示す. $T \nvdash \varphi$ とする.

$\mathbb{N}$

M

どんなモデル M でも
すべての $n \in \mathbb{N}$ について
$M \not\models \mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, \overline{n})$.

ω 無矛盾性から
すべての $a \in M$ について
$M \not\models \mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, a)$
となるモデルがある.

故に $T \nvdash \exists y \mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, y) \equiv \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

(時間があれば) 無矛盾性とロッサー証明可能性述語

ゲーデル・ロッサーの第一不完全性定理において, ロッサー証明可能性述語

$$\mathrm{Pr}_T^R(x) :\equiv \exists y(\mathrm{Prf}(x,\ y) \land \forall z < y \neg \mathrm{DisPrf}(x,\ y))$$

が効いているのは, 途中の定理：
無矛盾な理論 T に対して,

$$T \vdash \neg\varphi \text{ ならば } T \vdash \neg \mathrm{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

この定理のモデルを使った別証明を与える.

T を無矛盾な理論で, M を T のモデルとする. $T \vdash \neg\varphi$ とする.

この部分のすべての $a \in M$ について,
下に $\neg\varphi$ の証明があるので
$M \models \exists z < a \mathrm{DisPrf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner,\ z)$.

$\mathbb{N}$

$T \vdash \neg\varphi$

M

無矛盾性から
すべての $n \in \mathbb{N}$ について
$M \not\models \mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner,\ \overline{n})$.

故に $T \vdash \neg\forall y(\neg\mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner,\ y) \vee \exists z < a \mathrm{DisPrf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner,\ z))$.
すなわち, $T \vdash \neg\mathrm{Pr}^R_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

- ゲーデルと 20 世紀の論理学 3
  田中一之 編, 東京大学出版会, 2007 年 3 月 8 日
  第一部で不完全性定理の証明をしている. 第一, 第二不完全性定理の証明がコンパクトに纏まっている. 証明の流れを知るには良いと思う.
  コンパクトであるデメリットとして, ロッサー化の理解や原始再帰的操作の直感は得にくいと思われる. 特に原始再帰的操作で何ができるかは殆ど触れていないので, 第二定理の証明の「第一でやったことを PA でやるだけ」パートで「できそうやね」と思えないかもしれない.

参考文献

- 数学基礎論　増補版
  新井敏康, 東京大学出版会, 2021 年 4 月 13 日
  第 2 章 計算理論入門 を読むと, コード化を通じた有限列の原始再帰的操作の直感が生えると思う.
  第 3 章 不完全性定理 で不完全性定理を証明しているが, PA の定義でズル (！？) をしているので, 初学者にはおすすめできないかもしれない. 具体的には, PA に原始再帰的関数を最初から持たせている. こうしても強さが変わらないことは演習 3.10.10 にある.
  この本は数学基礎論の話題が網羅的に載っているので, 一家に一冊あるといいかもしれない.

参考文献

- Logic and Structure
  Dirk van Dalen, Springer, 2013 年
  本講演はこの教科書を主に参考にした. 第一不完全性定理の証明の面倒くさいところ：再帰理論, コード化, ゲーデル数をきちんとやってくれている. 形式的推論体系についても乗っているので, 初学者にもおすすめできる.
  ただ洋書なので高い. あと第二不完全性定理は扱っていない.

参考文献

- 不完全性定理
  菊地誠, 共立出版, 2014 年 10 月 24 日

  本書を執筆するにあたっては数学基礎論の予備知識が全くない人でも読める教科書を、そして不完全性定理に関する専門書というよりは、不完全性定理を手掛かりに数学基礎論の初歩的な概念が理解できて、数学基礎論の世界のごく簡単な見取り図が手に入れられるような教科書を目指す

  著者のメッセージより抜粋.

  という方針で書かれた本. 哲学的な話題も豊富で, 不完全性定理の意義についての正しい理解も得られそう.
  これと Dirk van Dalen を読むのがいいかもしれないと思っている.

ご清聴ありがとうございました.

付録：PA のリスト 1.

$x,\ y,\ z$ を変数, $\varphi,\ \psi$ を論理式とする.

演算について

Ax1: 和の結合律：$\forall x,\ y,\ z((x+y)+z=x+(y+z))$

Ax2: 和の可換律：$\forall x,\ y(x+y=y+x)$

Ax3: 積の結合律：$\forall x,\ y,\ z((x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z))$

Ax4: 積の可換律：$\forall x,\ y(x\cdot y=y\cdot x)$

Ax5: 分配律：$\forall x,\ y,\ z(x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z)$

Ax6: 零元：$\forall x(x+\overline{0}=x)$

Ax7: 単位元：$\forall x(x\cdot\overline{1}=x)$

Ax8: 吸収元：$\forall x(x\cdot\overline{0}=\overline{0})$

付録：PA のリスト 2.

Ax9. $\forall x(x^{\overline{0}} = \overline{1})$

Ax10. $\forall x,\ y,\ z(x^{y+z} = x^y \cdot x^z)$

Ax11. $\forall x,\ y,\ z((x^y)^z = x^{y \cdot z})$

全順序性

Ax12: 推移律：$\forall x,\ y,\ z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$

Ax13: 非反射律：$\forall x \neg(x < x)$

Ax14: 三分律：$\forall x,\ y(x < y \vee y < x \vee x = y)$

付録：PA のリスト 3.

順序と演算の関係

Ax15: $\forall x,\ y,\ z(x < y \to x + z < y + z)$

Ax16: $\forall x,\ y(x < y \to \exists z(x + z = y))$

Ax17: $\forall x,\ y,\ z((0 < z \land x < y) \to x \cdot z < y \cdot z)$

離散性, 0 の最小性

Ax18: $\overline{0} < \overline{1}$

Ax19: $\forall x(x > 0 \to (x \geq 1))$

Ax20: $\forall x(x \geq \overline{0})$

数学的帰納法

Ax21: φ を論理式, $x,\ \vec{y}$ を φ に現れる自由変数とする.

$$\forall\vec{y}(\varphi(\overline{0},\ \vec{y}) \wedge \forall x(\varphi(x,\ \vec{y}) \to \varphi(x+\overline{1},\ \vec{y})) \to \forall x\varphi(x,\ \vec{y}))$$

付録：代入について 1.

- 同様に, 論理式 $\varphi(x)$ の自由変数 x を項 t で置き換えたものを $\varphi[t/x]$ と書く. $\varphi[t/x]$ も論理式になる.
  この表記は, どの自由変数にどの項を代入したかが明示されているので, 本編で導入したものよりも正確なものである.

Definition (代入可能)

x を変数, $\varphi(x)$ を論理式, t を項とする. 論理式 $\varphi[t/x]$ において, t に現れる変数が $\varphi[t/x]$ の中で束縛されないとき, t は $\varphi(x)$ の x に代入可能であるという.

付録：代入について 2.

代入可能の例

$\varphi(v_0) \equiv \exists v_1(v_0 = v_1)$ を考える. これは命題

勝手な x に対して, ある y が存在して x と y が等しい

の形式化.

- $\varphi[v_2 + \overline{1}/v_0] :\equiv \exists v_1(v_2 + \overline{1} = v_1)$ は

  勝手な z に対して, ある y が存在して $z + \overline{1}$ と y が等しい

  という命題の形式化. $\rightsquigarrow$ 想定通りの代入操作！
- $\varphi[v_1 + \overline{1}/v_0] \equiv \exists v_1(v_1 + \overline{1} = v_1)$ は

  ある y が存在して, $y + 1$ と y が等しい

  という命題の形式化. $\rightsquigarrow$ 想定していない代入操作！

以降, $\varphi[t/x]$ は t は x に代入可能であるか, さもなくば φ の束縛変数を適切に書き換えて代入可能にしてから得られるものとする.

付録：推論規則のリスト

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,(\wedge\ \mathrm{i}) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,(\wedge\ \mathrm{e}^{2}) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,(\wedge\ \mathrm{e})$$

$$\frac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\,(\to\ \mathrm{i}) \qquad \frac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\,(\to\ \mathrm{e,\ Modus\ Ponens})$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,(\vee\ \mathrm{i}) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\,(\vee\ \mathrm{i}) \qquad \frac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \sigma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\,(\vee\ \mathrm{e}^{3})$$

$$\frac{\varphi[y/x]}{\forall x \varphi(x)}\,(\forall\ \mathrm{i}) \qquad \frac{\forall x \varphi(x)}{\varphi[t/x]}\,(\forall\ \mathrm{e})$$

---

[2] e は elimination の頭文字

[3] 場合分けの推論の形式化

付録：推論規則のリスト 2.

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi(x)}\ (\exists\ \mathrm{i}) \qquad \frac{\exists x \varphi(x) \qquad \begin{array}{c}[\varphi[y/x]] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\psi}\ (\exists\ \mathrm{e})$$

$$\frac{\psi \wedge \neg\psi}{\varphi}\ (\mathrm{Exp}^4) \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi] \\ \vdots \\ \psi \wedge \neg\psi\end{array}}{\varphi}\ (\mathrm{abs}^5)$$

$$\frac{}{t = t}\ (\mathrm{id}^6) \qquad \frac{\varphi[t/x] \qquad t = s}{\varphi[s/x]}\ (\mathrm{subst}^7)$$

[4]爆発律 (Principle of Explosion)
[5]背理法 (reduction to the absurd)
[6]同一律 (Low of identity), 等号公理
[7]代入規則 (Low of substitution) (いい名前が分からなかった…)

付録：推論規則の補足

($\to$ i) 規則や ($\vee$ e) 規則, ($\exists$ e) 規則, (abs) 規則の

$$\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}$$

は, ψ を導出する仮定に φ が出現している場合, この規則を適用する際に φ を仮定として扱うのをやめるという意味.

付録：証明図の例

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\overline{0} = \overline{0}$}
\AxiomC{$[\neg\neg(\overline{0} = \overline{1})]^2$}
\AxiomC{$[\neg(\overline{0} = \overline{1})]^1$}
\RightLabel{($\wedge$ i)}
\BinaryInfC{$\neg\neg(\overline{0} = \overline{1}) \wedge \neg(\overline{0} = \overline{1})$}
\RightLabel{(abs^1)}
\UnaryInfC{$\overline{0} = \overline{1}$}
\LeftLabel{(subst)}
\BinaryInfC{$\overline{1} = \overline{0}$}
\AxiomC{$\overline{0} < \overline{1}^{8}$}
\RightLabel{(subst)}
\BinaryInfC{$\overline{0} < \overline{0}$}
\AxiomC{$\forall x \neg(x < x)^{9}$}
\RightLabel{($\forall$ e)}
\UnaryInfC{$\neg(\overline{0} < \overline{0})$}
\RightLabel{(abs^2)}
\BinaryInfC{$\neg(\overline{0} = \overline{1})$}
\end{prooftree}
$$

- (abs[1]) 規則で仮定 $[\neg(\overline{0} = \overline{1})]$ を, (abs[2]) 規則で仮定 $[\neg\neg(\overline{0} = \overline{1})]$ を閉じている.
- 1 つ目の (subst) 規則では $\varphi(x) :\equiv x = \overline{0}$, 2 つ目では $\varphi(x) :\equiv \overline{0} < x$.

[8] Ax18

[9] Ax13

付録：証明図のゲーデル数 1.

証明図のゲーデル数を次のように再帰的に定義する.

φ が証明図 (すなわち φ が公理) のとき, $[\varphi] := \langle 0,\ \varphi \rangle$

$$(\land\ \mathrm{i}) : \begin{bmatrix} \dfrac{\begin{matrix} D_0 & D_1 \\ \varphi & \psi \end{matrix}}{\varphi \land \psi} \end{bmatrix} = \langle \langle 0,\ \ulcorner \land \urcorner \rangle,\ \begin{bmatrix} D_0 \\ \varphi \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} D_1 \\ \psi \end{bmatrix},\ \ulcorner \varphi \land \psi \urcorner \rangle$$

$$(\land\ \mathrm{e}) : \begin{bmatrix} \dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi \land \psi \end{matrix}}{\varphi} \end{bmatrix} = \langle \langle 1,\ \ulcorner \land \urcorner \rangle,\ \begin{bmatrix} D \\ \varphi \land \psi \end{bmatrix},\ \ulcorner \varphi \urcorner \rangle$$

$$(\land\ \mathrm{e}) : \begin{bmatrix} \dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi \land \psi \end{matrix}}{\psi} \end{bmatrix} = \langle \langle 1,\ \ulcorner \land \urcorner \rangle,\ \begin{bmatrix} D \\ \varphi \land \psi \end{bmatrix},\ \ulcorner \varphi \urcorner \rangle$$

$$(\to\ \mathrm{i}) : \begin{bmatrix} \dfrac{\begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \to \psi} \end{bmatrix} = \langle \langle 0,\ \ulcorner \to \urcorner \rangle,\ \begin{bmatrix} D \\ \varphi \end{bmatrix},\ \ulcorner \varphi \to \psi \urcorner \rangle$$

付録：証明図のゲーデル数 2.

$$(\to \mathrm{e}) : \left[\dfrac{\begin{matrix} D_0 \\ \varphi \to \psi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_1 \\ \varphi \end{matrix}}{\psi}\right] = \left\langle \langle 1, \ulcorner \to \urcorner \rangle, \begin{bmatrix} D_0 \\ \varphi \to \psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_1 \\ \varphi \end{bmatrix}, \ulcorner \psi \urcorner \right\rangle$$

$$(\vee \mathrm{i}) : \left[\dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi \end{matrix}}{\varphi \vee \psi}\right] = \left\langle \langle 0, \ulcorner \vee \urcorner \rangle, \begin{bmatrix} D \\ \varphi \end{bmatrix}, \ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner \right\rangle$$

$$(\vee \mathrm{i}) : \left[\dfrac{\begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \vee \psi}\right] = \left\langle \langle 0, \ulcorner \vee \urcorner \rangle, \begin{bmatrix} D \\ \psi \end{bmatrix}, \ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner \right\rangle$$

$$(\vee \mathrm{e}) : \left[\dfrac{\begin{matrix} D_0 \\ \varphi \vee \psi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_1 \\ \sigma \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \sigma \end{matrix}}{\sigma}\right] = \left\langle \langle 1, \ulcorner \vee \urcorner \rangle, \begin{bmatrix} D_0 \\ \varphi \vee \psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_1 \\ \sigma \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_2 \\ \sigma \end{bmatrix}, \ulcorner \sigma \urcorner \right\rangle$$

$$(\forall \mathrm{i}) : \left[\dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi[y/x] \end{matrix}}{\forall x \varphi(x)}\right] = \left\langle \langle 0, \ulcorner \forall \urcorner \rangle, \begin{bmatrix} D \\ \varphi[y/x] \end{bmatrix}, \ulcorner \forall x \varphi(x) \urcorner \right\rangle$$

付録：証明図のゲーデル数 3.

$$(\forall\,\mathrm{e}):\ \left[\frac{\begin{matrix}D\\ \forall x\varphi(x)\end{matrix}}{\varphi[t/x]}\right] = \langle\langle 1,\ \ulcorner\forall\urcorner\rangle,\ \begin{bmatrix}D\\ \forall x\varphi(x)\end{bmatrix},\ \ulcorner\varphi[t/x]\urcorner\rangle$$

$$(\exists\,\mathrm{i}):\ \left[\frac{\begin{matrix}D\\ \varphi[t/x]\end{matrix}}{\exists x\varphi(x)}\right] = \langle\langle 0,\ \ulcorner\exists\urcorner\rangle,\ \begin{bmatrix}D\\ \varphi[t/x]\end{bmatrix},\ \ulcorner\exists x\varphi(x)\urcorner\rangle$$

$$(\exists\,\mathrm{e}):\ \left[\frac{\begin{matrix}D_0\\ \exists x\varphi(x)\end{matrix}\qquad\begin{matrix}D_1\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\right] = \langle\langle 1,\ \ulcorner\exists\urcorner\rangle,\ \begin{bmatrix}D_0\\ \exists x\varphi(x)\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}D_1\\ \psi\end{bmatrix},\ \ulcorner\psi\urcorner\rangle$$

$$(\mathrm{Exp}):\ \left[\frac{\begin{matrix}D\\ \psi\wedge\neg\psi\end{matrix}}{\varphi}\right] = \langle\langle 0,\ \ulcorner\neg\urcorner\rangle,\ \begin{bmatrix}D\\ \psi\wedge\neg\psi\end{bmatrix},\ \ulcorner\varphi\urcorner\rangle$$

$$(\mathrm{abs}):\ \left[\frac{\begin{matrix}D\\ \psi\wedge\neg\psi\end{matrix}}{\varphi}\right] = \langle\langle 1,\ \ulcorner\neg\urcorner\rangle,\ \begin{bmatrix}D\\ \psi\wedge\neg\psi\end{bmatrix},\ \ulcorner\varphi\urcorner\rangle$$

付録：証明図のゲーデル数 4.

$$\text{(id)} : \left[\frac{}{t = t}\right] = \langle\langle 0, \ulcorner = \urcorner\rangle, \ulcorner t = t \urcorner\rangle$$

$$\text{(subst)} : \left[\frac{\begin{matrix} D_0 & D_1 \\ \varphi[t/x] & t = s \end{matrix}}{\varphi[s/x]}\right] = \langle\langle 1, \ulcorner = \urcorner\rangle, \begin{bmatrix} D_0 \\ \varphi[t/x] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_1 \\ t = s \end{bmatrix},$$

$$\ulcorner \varphi[s/x] \urcorner\rangle$$

付録：再帰的関数

Definition (μ 最小化)

$k+1$-変数部分関数 g に対して,

$$f(\vec{x}) = \mu y(g(\vec{x},\ y) = 0)$$

で得られる関数 f は g から μ 最小化で得られるという.

ただし, $\mu y(g(\vec{x},\ y) = 0)$ は $g(\vec{x},\ y) = 0$ をみたす最小の y を表す.

Definition (再帰的部分関数)

再帰的部分関数のクラスをつぎのように再帰的に定める.

1. ゼロ関数, 後者関数, 射影関数は再帰的関数である.
2. 再帰的部分関数から関数合成, 原始再帰, μ 最小化で得られる関数も再帰的部分関数である.